6. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2015/16

Internetseite: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/vorkurs2015.html/*

27. Linear oder nicht linear?

a) V sei ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum, $B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ sei eine ONB und $\underline{a}$ ein Vektor des Raums. Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind:

$$A : V \to \mathbb{R}\,, \quad \underline{u} \mapsto |\underline{u}| \qquad B : V \to V\,, \quad \underline{u} \mapsto \underline{a} + \underline{u} \qquad C : V \to V\,, \quad \underline{u} \mapsto \underline{a} \times \underline{u} \qquad D : V \to \mathbb{R}\,, \quad \underline{u} \mapsto < \underline{a}, \underline{u} >$$

$$E : V \to V\,, \quad \underline{u} \mapsto < \underline{e}_1, \underline{u} > \underline{e}_1 + < \underline{e}_2, \underline{u} > \underline{e}_2$$

b) Beweisen oder widerlegen Sie: eine lineare Abbildung bildet den Nullvektor des Definitionsvektorraums immer auf den Nullvektor des Wertevektorraums ab.

28. Abbildungsmatrix

Eine lineare Abbildung $A : V \to V$ bildet die Vektoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ einer Basis B des Raums auf folgende Vektoren ab:

$$A\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B , \qquad A\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}_B , \qquad A\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}_B .$$

a) Wie lautet die Abbildungsmatrix von A bzgl B?

b) Bestimmen Sie die Bilder der Vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B , \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_B , \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B , \qquad \underline{d} = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2$$

unter der Abbildung A.

29. Drehungen im E_3

a) Eine Drehung D_3 im E_3 (Ursprung O, ONB $B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$) um den Winkel ϑ bzgl. einer Drehachse durch O und parallel zu $\underline{e}_3$ wird nach Vorlesung durch die Drehmatrix

$$D_3 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{BB}$$

beschrieben. Wie lauten die entsprechenden Matrizen D_1 und D_2 für Drehungen um die Achsen $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$?

b) Wie lauten die Koordinaten des Punkts mit Ortsvektor $\underline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B$ *nach* Drehung D_3?

c) Zeigen Sie explizit für D_3:

1. Punkte auf der Drehachse,
2. der Abstand zwischen zwei Punkten,
3. und der Abstand eines Punkts zur Drehachse

ändern sich unter Drehungen nicht.