Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

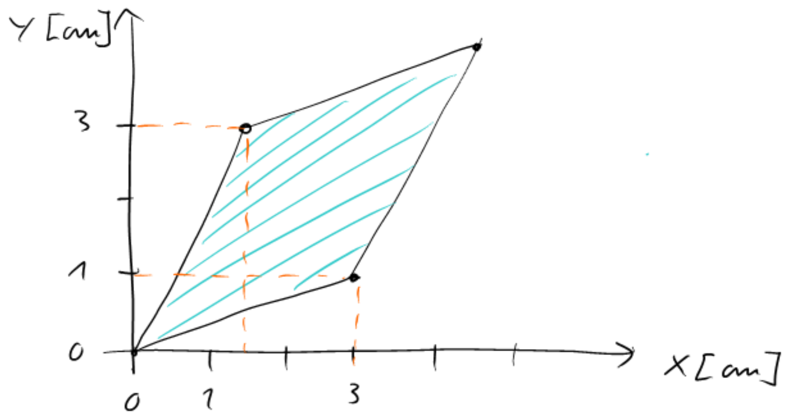
Vorkurs Physik WS2019/20 – Blatt 12

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/vorkurs2019.html/*

Besprechung: 26. September 2019

16. Flächenberechnung

Berechnen Sie den Flächeninhalt des abgebildeten Parallelogramms.



17. Linear oder nicht linear?

a) V sei ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum, $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sei eine ONB und $\vec{a}$ ein Vektor des Raums. Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind:

$$A : V \to \mathbb{R}\,, \quad \vec{u} \mapsto |\vec{u}| \qquad B : V \to V\,, \quad \vec{u} \mapsto \vec{a} + \vec{u} \qquad C : V \to V\,, \quad \vec{u} \mapsto \vec{a} \times \vec{u} \qquad D : V \to \mathbb{R}\,, \quad \vec{u} \mapsto \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle$$

$$E : V \to V\,, \quad \vec{u} \mapsto \langle \vec{e}_1, \vec{u} \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{e}_2, \vec{u} \rangle \vec{e}_2$$

b) Beweisen oder widerlegen Sie: eine lineare Abbildung bildet den Nullvektor des Definitionsvektorraums immer auf den Nullvektor des Wertevektorraums ab.

18. Abbildungsmatrix

Eine lineare Abbildung $A : V \to V$ bildet die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ einer Basis B des Raums auf folgende Vektoren ab:

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B, \qquad A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}_B, \qquad A\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}_B.$$

a) Wie lautet die Abbildungsmatrix von A bzgl B?

b) Bestimmen Sie die Bilder der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B , \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_B , \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B , \qquad \vec{d} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

unter der Abbildung A.

19. Matrixdarstellung diverser linearer Abbildungen

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der folgenden linearen Abbildungen in der Standardbasis, wobei $\mathbb{I}$ die identische Abbildung und $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ein fest gewählter normierter Vektor ist.

a) $A_{\vec{n}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{a} \mapsto \vec{n} \times \vec{a}$
b) $\mathcal{P}_{\vec{n}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{a} \mapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle\ \vec{n}$
c) $l_{\vec{n}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \vec{a} \mapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle$
d) $O_{\vec{n}} = \mathbb{I} - \mathcal{P}_{\vec{n}}$
Verwenden Sie im Folgenden $(1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$ als Basis für den Raum aller Polynome $n$ten Grades P_n.
e) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} : P_4 \to P_2,\ f(x) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$