Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Vorkurs Physik WS2019/20 – Blatt 8

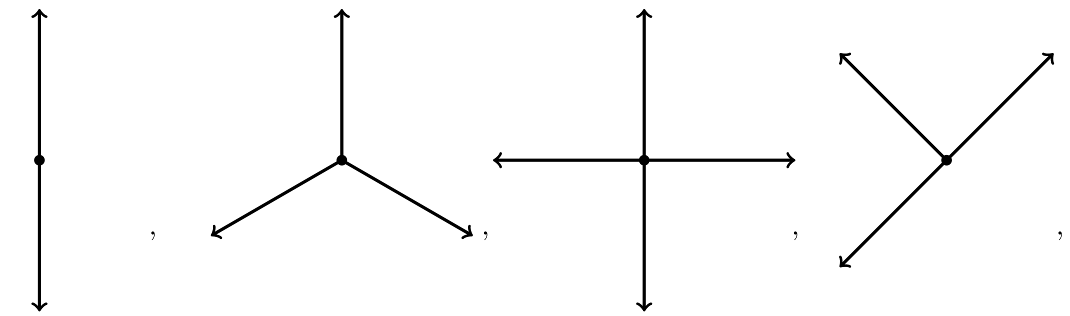
Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/vorkurs2019.html/*

Besprechung: 19. September 2019

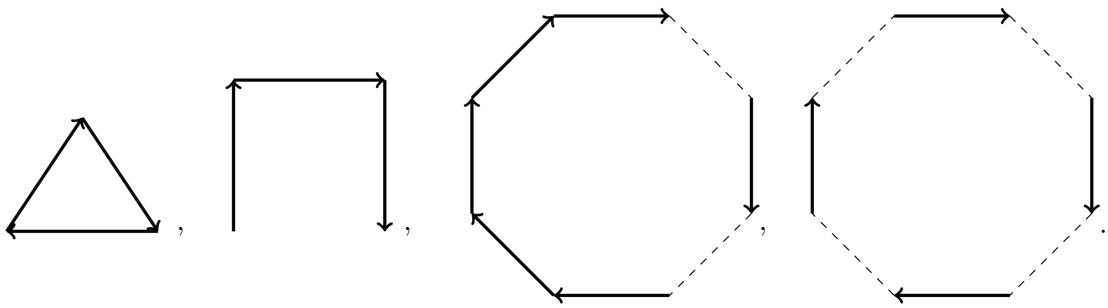
1. Vektoraddition I

Skizzieren Sie jeweils die Summe aller in einer Figur abgebildeten Vektoren:

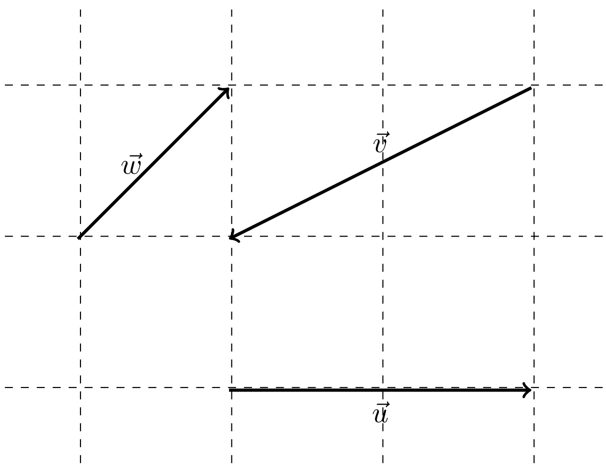
a)



b)



2. Vektoraddition II



Die in der nebenstehenden Abbildung gezeigten Pfeile $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ symbolisieren Vektoren, die hier als Parallelverschiebungen zu interpretieren sind. Skizzieren Sie folgende Ausdrücke von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

a) $\vec{u}+\vec{v}$, $\quad \vec{u}+\vec{w}$, $\quad \vec{u}-\vec{v}$, $\quad \vec{v}-\vec{w}$,

b) $\vec{u}+\vec{w}+\vec{v}$, $\quad -2\vec{w}$, $\quad \frac{1}{2}\vec{u}$,
$2\vec{w}+3(\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w})$.

3. Rechnen mit Vektoren

$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ seien nun *beliebige* Vektoren, α, β positive reelle Zahlen. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit wie möglich:

a) $2\alpha\vec{u} + \frac{1}{4\alpha}(2\vec{v} - 8\alpha^2\vec{u})$, $\quad (\alpha+\beta)^2\vec{u} + 4\alpha(\vec{w} - \beta\vec{u}) - (\alpha-\beta)^2\vec{v}$,

b) $2(\vec{u} - 2(\vec{v} - 2(\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2^2}\vec{u})))$, $\quad (\alpha-\beta)\vec{u} + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}(\vec{v} + \vec{u})$.

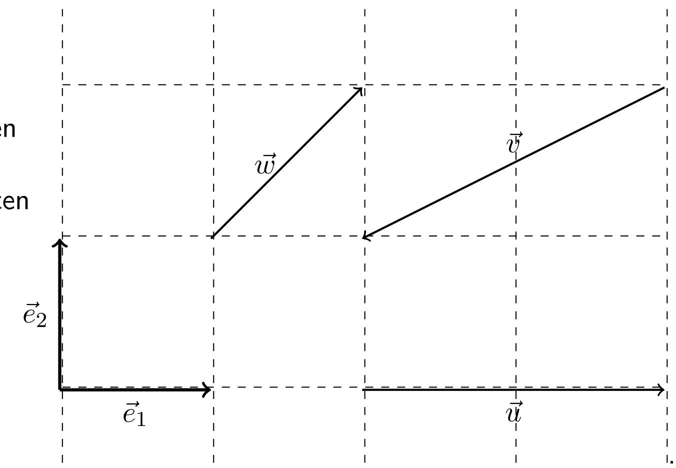
4. Basisvektoren

$\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ seien die in der nebenstehenden Abbildung skizzierten Vektoren.

a) Schreiben Sie die ebenfalls dargestellten Vektoren $\vec{u}$,$\vec{v}$ und $\vec{w}$ als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.
Wie lauten demnach jeweils die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$,$\vec{v}$ und $\vec{w}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$?

b) Skizzieren Sie folgende Vektoren:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$



5. Basisdarstellung

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sei Basis eines zweidimensionalen Vektrorraums. Zwei weitere Vektoren $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ seien gegeben durch

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

a) Schreiben Sie $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ jeweils als Linearkombination der Vektoren $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$. Wie lauten demnach die Komponenten und die Komponentendarstellung der Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$?

b) Schreiben Sie die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $2\vec{u} + \vec{v}$ in Komponentendarstellung bzgl. $\mathcal{B}'$.

c) Schreiben Sie die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$, $\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$ in Komponentendarstellung bzgl. $\mathcal{B}$.

6. Lineares Gleichungssystem

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Zeigen sie, dass mit einer weiteren Lösung $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

Lösungen des Gleichungssystems sind. Bilden die Lösungen des Gleichungssytstems einen Vektorraum?