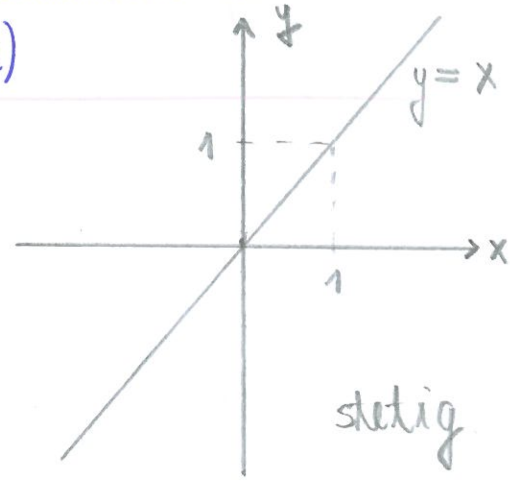
Lösungen Blatt 1

1.) Stetigkeit

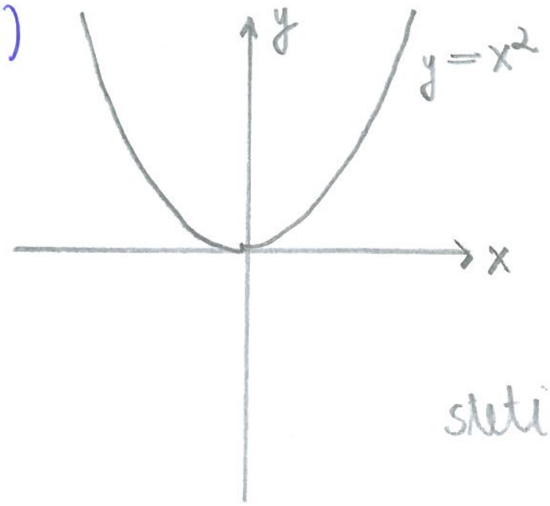
Wir überprüfen die Stetigkeit, indem wir die Funktionen zeichnen und schauen ob wir absetzen müssen.

a)



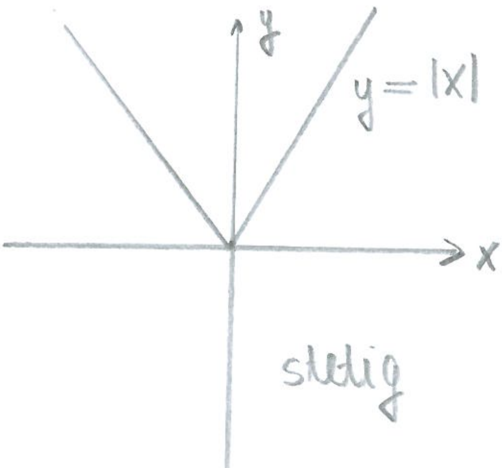
stetig

b)



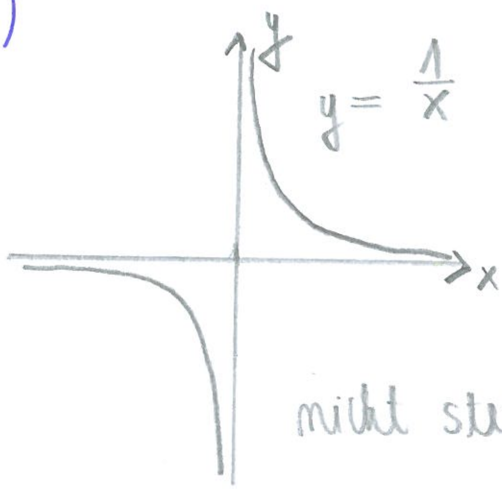
stetig

c)



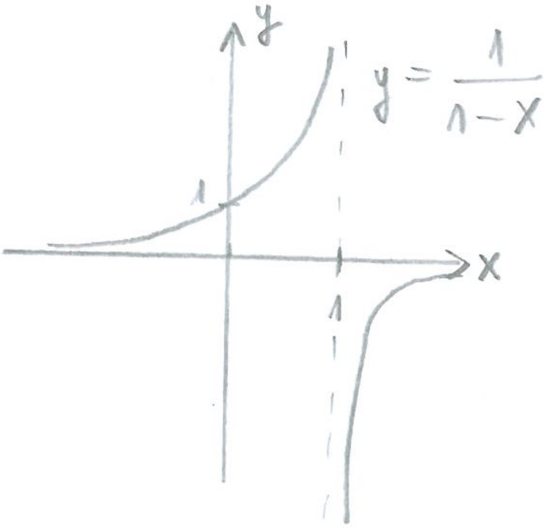
stetig

d)



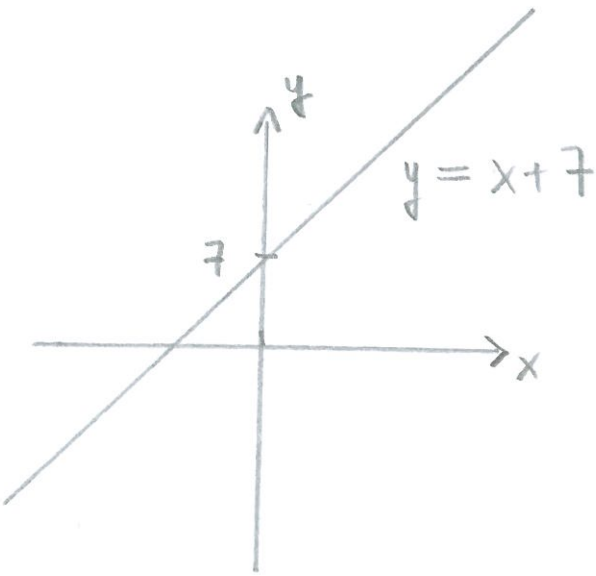
nicht stetig

e)



stetig bei $x = 0$, nicht stetig bei 1

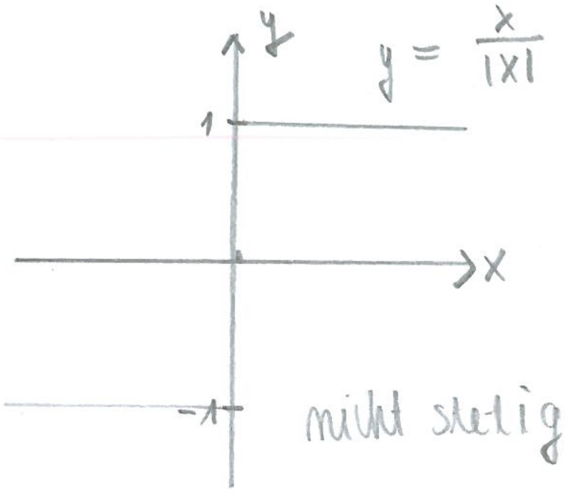
f)



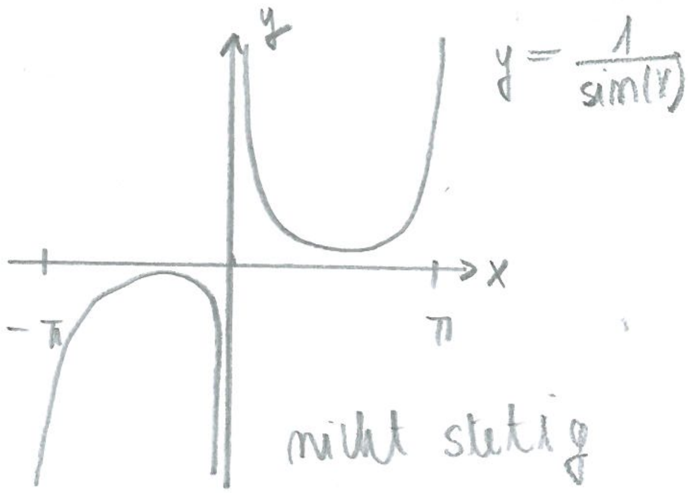
stetig

g) $y = \frac{x^2 + 7x}{x} = x + 7 \Rightarrow$ wie f)

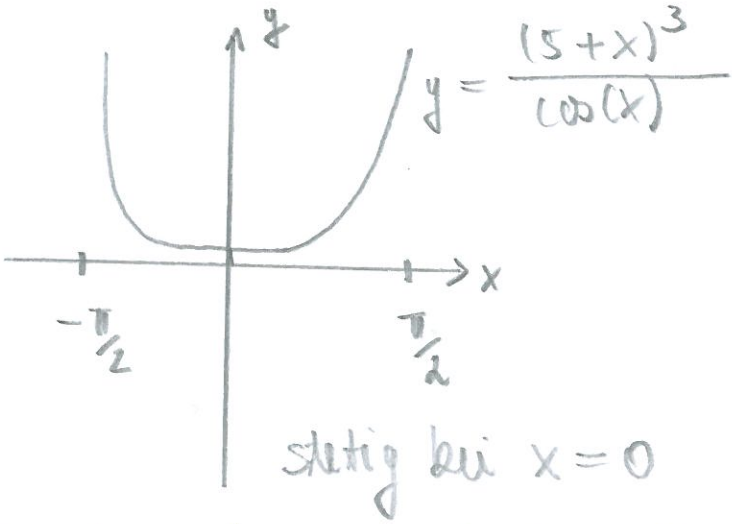
h)



i)



j)



2.) Gerade und ungerade Funktionen

"Regelset":
- Potenzfunktionen mit geradem / ungeradem Exponenten sind gerade / ungerade
- die Funktion $f(x) = |x|$ ist gerade
- ein Produkt aus einen geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade
- $f(x) = \sin(x)$ ist ungerade
- $f(x) = \cos(x)$ ist gerade

Also: a) gerade b) ungerade c) ungerade d) gerade

e) gerade f) ungerade g) gerade h) gerade

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

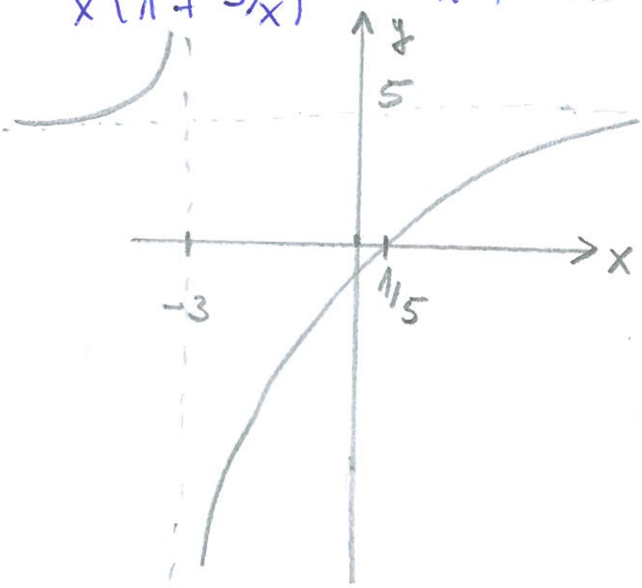
3.) Asymptoten, Polstellen, Nullstellen

a) $f(x) = \dfrac{5x-1}{x+3}$

$5x - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1/5$ (Nullstelle)

$x + 3 = 0 \Rightarrow x_p = -3$ (Polstelle)

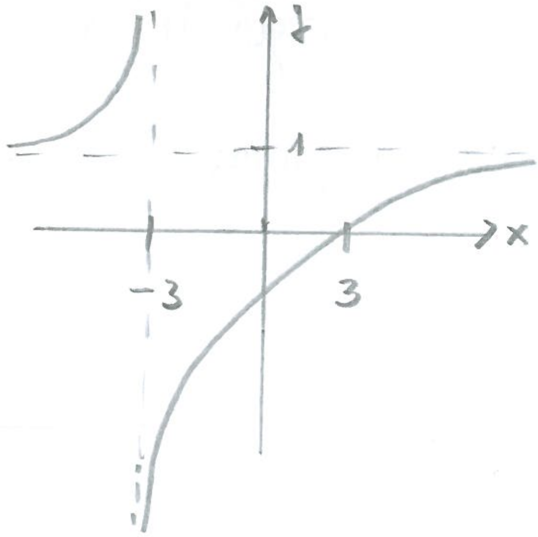
$f(x) = \dfrac{x(5 - 1/x)}{x(1 + 3/x)} = \dfrac{5 - 1/x}{1 + 3/x} \xrightarrow{x \to \pm\infty} 5$ (Asymptotik)



b) $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2 - 9} = \dfrac{(x-3)^2}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{x-3}{x+3}$

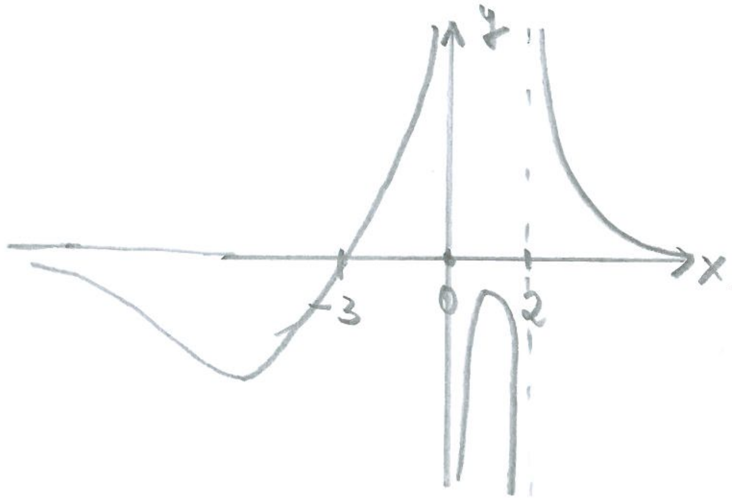
Nullstelle bei $x_0 = 3$, Polstelle bei $x_p = -3$

f geht asymptotisch gegen 1 (für $x \to \pm\infty$)



c) $f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x(x-2)^2} = \frac{(x+3)}{x(x-2)}$

Nullstelle bei $x_0 = -3$, Pole bei $x_{p_1} = 0$, $x_{p_2} = 2$
f geht asymptotisch gegen 0 $(x \to \pm\infty)$

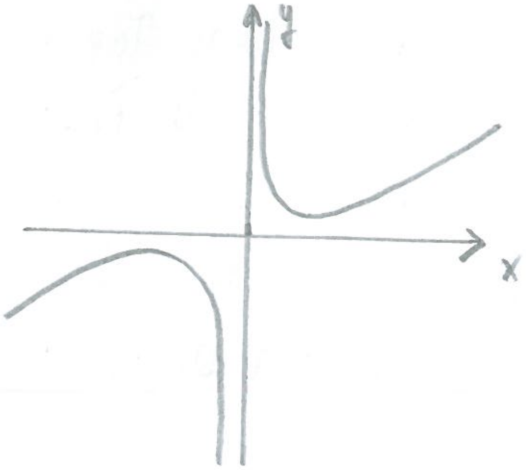


d) $f(x) = \frac{\frac{1}{4}x^2 + 2}{x}$

$\frac{1}{4}x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -8 \Rightarrow x_0^{1,2} = \pm 2i\sqrt{2}$
nur Nullstellen auf der imaginären Achse

Pol bei $x_p = 0$

Funktion divergiert für $x \to \pm\infty$ gegen $\pm\infty$



4.) Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

1.

- bei festem α bleiben die Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{p} = (x, y, z)$ und $\vec{q} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ gleich
  $\Rightarrow$ zwei Punkte mit gleichem z, aber verschiedenen x, y können nicht auf denselben Punkt abgebildet werden
  $\Rightarrow$ Abbildung ist injektiv
- jeder Punkt $Q \in \mathbb{E}^3$ kann durch Rotation mit α um die z-Achse aus einem anderen Punkt erhalten werden
  $\Rightarrow$ Abbildung ist surjektiv
- Abbildung ist also bijektiv

2.

- einem Handy h_1 kann der gleiche Besitzer b zugeordnet werden wie Handy h_2 $\Rightarrow$ nicht injektiv
- jeder Handybesitzer hat ein Handy gekauft (sieht man von Diebstahl ab) $\Rightarrow$ alle Elemente $b \in W$ werden durch die Abbildung getroffen $\Rightarrow$ surjektiv
- nicht bijektiv

3.

- zwei Personen p_1, p_2 können am selben Tag Geburtstag haben $\Rightarrow$ nicht injektiv (es sei denn alle Personen haben an verschiedenen Tagen Geburtstag)
- (hoffentlich) ist $\#D < 365/366$, somit können nicht alle Jahrestage abgedeckt werden $\Rightarrow$ nicht surjektiv
- nicht bijektiv

4.

- Jeder zweitgeborene Zwilling hat genau einen erstgeborenen Zwilling (injektiv)* und alle ~~erst~~geborenen Zwillinge haben genau einen zweitgeborenen Zwilling (surjektiv)

  * und $z_1, z_2 \in W$ können kein gleiches $e \in D$ haben, sonst $z_1 = z_2$
- Abbildung ist bijektiv

5.

z.B. sei $f(x) = x^2$ und $f: D \to W$

- mit $D = \mathbb{R}^+$, $W = \mathbb{R}$ ist die Abb. injektiv aber nicht surjektiv
- mit $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^+$ ist die Abb. surjektiv aber nicht injektiv
- mit $D = W = \mathbb{R}^+$ ist die Abb. bijektiv.