Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Vorkurs Physik WS2019/20 – Blatt 10

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vorkurs2019.html/*

Besprechung: 24 . September 2019

7. Summen

a) Wie ist das Kronecker-Delta δ_{ij} definiert? siehe Skript

b) Ermitteln Sie folgende Summen:

$$\sum_{n=0}^{10} \cos(\pi n)\delta_{n1}, \quad \sum_{n=0}^{10} \cos(\pi n), \quad \sum_{m=1}^{10}\sum_{n=1}^{10} 1, \quad \sum_{m,n=1}^{10} 1, \quad \sum_{m,n=1}^{10} \delta_{mn}$$

s. u.

$$\sum_{m=1}^{4} m, \quad \sum_{m,n=1}^{4} mn, \quad \sum_{m,n=1}^{4} mn\delta_{mn}, \quad \sum_{l,m,n=1}^{10} l\delta_{lm}\delta_{mn}, \quad \sum_{m,n=0}^{10} a_{mn}\delta_{mn}\delta_{n0}.$$

c) $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ sei eine ONB eines euklidischen Vektorraums. Ferner seien $\vec{u} = \sum_{l=1}^{n} u_l \vec{b}_l$ und $\vec{v} = \sum_{l=1}^{n} v_l \vec{b}_l$. Zeigen Sie, dass $u_m = \langle \vec{b}_m, \vec{u} \rangle$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{l=1}^{n} u_l v_l$ und $|\vec{u}| = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} u_l^2}$. s.u.

8. Parallelogramm

a und b seien die Seitenlängen eines Parallelogramms. Die Längen seiner Diagonalen seien e und f. Zeigen Sie:

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)\,.$$

s. u.

9. Winkel und Skalarprodukt

a) Wie ist der Winkel zwischen zwei Vektoren eines euklidischen Vektorraums definiert? s. Skript

b) Wie lautet der Kosinussatz?

c) Beweisen Sie den Kosinussatz mittels Vektorrechnung. s.u.

10. Orthonormalbasis

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ sei eine Orthonormalbasis eines euklidischen Vektorraums V. Eine weitere Basis C von V sei durch die Vektoren

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_3), \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 + \vec{e}_4), \quad \vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_3), \quad \vec{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 - \vec{e}_4),$$

gegeben.

a) Was ist eine Orthonormalbasis? Skript

b) Handelt es sich bei C um eine Orthonormalbasis von V? s.u.

c) Gegeben seien nun die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C .$$

s. u.

Bestimmen Sie die Beträge dieser Vektoren, den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$ (unterschiedliche Basen beachten!).

Summen: b) $\cdot \sum_{n=0}^{10} \cos(\pi n)\, \delta_{n1} = \cos\pi = -1$

- $\sum_{n=0}^{10} \cos(\pi n) = \sum_{n=0}^{10} (-1)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{9} (-1)^n}_{=0} + 1 = 1$
- $\sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^{10} 1 = \sum_{m=1}^{10} 10 = 100$
- $\sum_{m,n=1}^{10} 1 \equiv \sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^{10} 1 = 100$
- $\sum_{m,n=1}^{10} \delta_{mn} = \sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^{10} \delta_{mn} = \sum_{m=1}^{10} 1 = 10$
- $\sum_{m=1}^{4} m = (4+1)\cdot 2 = 10$
- $\sum_{m,n=1}^{4} m\cdot n = \sum_{m=1}^{4} m \sum_{n=1}^{4} n = \left(\sum_{m=1}^{4} m \right)^2 = 100$
- $\sum_{m,n=1}^{4} mn\, \delta_{mn} = \sum_{m=1}^{4} m^2 = 1+4+9+16 = 30$
- $\sum_{l,m,n=1}^{10} l\, \delta_{lm} \delta_{mn} = \sum_{l,m=1}^{10} l\, \delta_{lm} = \sum_{l=1}^{10} l = (10+1)\cdot 5 = 55$
- $\sum_{m,n=0}^{10} a_{mn}\, \delta_{mn} \delta_{n0} = \sum_{m=0}^{10} a_{m0}\, \delta_{m0} = a_{00}$

c) $\cdot \ \langle \vec{b}_m , \vec{u} \rangle = \langle \vec{b}_m , \sum_{l=1}^{n} u_l \vec{b}_l \rangle = \sum_{l=1}^{n} u_l \underbrace{\langle \vec{b}_m , \vec{b}_l \rangle}_{= \delta_{ml}} = u_m$

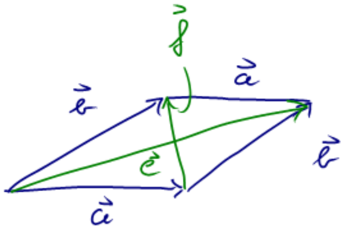
da B ONB

$\cdot \ \langle \vec{u} , \vec{v} \rangle = \langle \sum_{m=1}^{n} u_m \vec{b}_m , \sum_{l=1}^{n} v_l \vec{b}_l \rangle = \sum_{m,l=1}^{n} u_m v_l \underbrace{\langle \vec{b}_m , \vec{b}_l \rangle}_{= \delta_{ml}}$

$= \sum_{l=1}^{n} u_l v_l$

$\cdot \quad |\vec{u}| = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle^{1/2} = \left(\sum_\ell u_\ell^2 \right)^{1/2}$

<u>Parallelogramm</u>



$|\vec{a}| = a, \quad |\vec{b}| = b$

$|\vec{f}| = f, \quad |\vec{e}| = e$

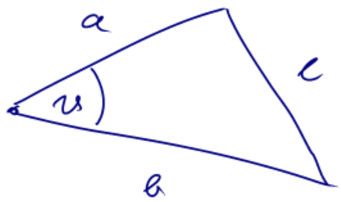
$$\left.\begin{aligned} \vec{e} &= \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{f} &= \vec{b} - \vec{a} \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \quad e^2 + f^2 = |\vec{e}|^2 + |\vec{f}|^2$$

$$= \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle + \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a} \rangle$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2(a^2 + b^2).$$

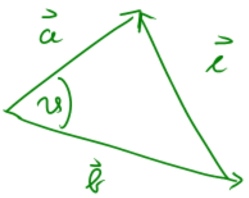
<u>Winkel und Skalarprodukt</u>

b) <u>Kosinussatz</u>:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta$$

c)



$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{= |\vec{a}||\vec{b}| \cos \vartheta} .$$

<u>Orthonormalbasis</u>

b) ja! z.B. $|\vec{f}_1|^2 = \frac{1}{2} \langle \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right\rangle$

$= 1$, etc.

$$\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right\rangle = 0$$

$$\langle \vec{f}_1, \vec{f}_3 \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right\rangle = 0$$

ebenso $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_4 \rangle = 0$, $\langle \vec{f}_2, \vec{f}_4 \rangle = 0$ etc.

c)

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{c}| = \sqrt{2}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right\rangle = 1$$

$$\vec{c} = \vec{f}_3 + \vec{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

$$\rightarrow \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

d.h. $$\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{2} \rightarrow \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3 \quad (\hat{=} 60^\circ)$$

$$\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4} \quad (\hat{=} 45^\circ)$$