Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Vorkurs Physik WS2019/20 – Blatt 11

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/vorkurs2019.html/*

Besprechung: 25. September 2019

11. Dreiecksungleichungen

Beweisen Sie mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgende sogenannte *Dreiecksungleichungen* für euklidische Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$:

$$\Big| |\vec{a}| - |\vec{b}| \Big| \;\leq\; \Big| \vec{a} \pm \vec{b} \Big| \;\leq\; |\vec{a}| + |\vec{b}| \,.$$

Warum heißen diese Ungleichungen Dreiecksungleichungen?

12. Parallel- und Orthogonalkomponente

a) Wie lassen sich Parallel- und Orthogonalkomponente eines Vektors $\vec{b}$ bzgl. eines anderen Vektors $\vec{a}$ mittels Skalar- und Vektorprodukt darstellen? ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind dreidimensionale euklidische Vektoren.)

b) Zeigen Sie:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 \;+\; \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \;=\; |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \,.$$

13. Vektorprodukt

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

bezüglich einer rechtshändigen Orthonormalbasis B.

a) Bestimmen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$, $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle$ sowie $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$. Wie groß ist die Fläche eines von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms?

b) Zwei Ebenen enthalten jeweils den Punkt O und sind normal zu $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$. Wie lautet die Schnittgerade dieser Ebenen?

14. Spatprodukt

a) Weshalb ist für beliebige dreidimensionale euklidische Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$

$$|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle| = |\langle \vec{c} \times \vec{a}, \vec{b} \rangle| = |\langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle| = |\langle \vec{b} \times \vec{a}, \vec{c} \rangle| = |\langle \vec{c} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle| = |\langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle| \,?$$

b) Zeigen Sie, dass das Volumen eines von den Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Tetraeders

$$V = \frac{1}{6} | < \vec{u} \times \vec{v} \,,\, \vec{w} > |$$

beträgt. Benutzen Sie, dass hier $V = \frac{1}{3}$ *Grundfläche·Höhe* gilt.

11. Cauchy-Schwarz: $|\langle\vec{a},\vec{b}\rangle| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|^2 = \langle\vec{a}\pm\vec{b},\vec{a}\pm\vec{b}\rangle = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2 \pm 2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$$

$$\le |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|$$

$$\underset{C.S.}{\le} |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\,|\vec{b}| = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$$

$$\rightarrow \quad |\vec{a}\pm\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|\;;$$

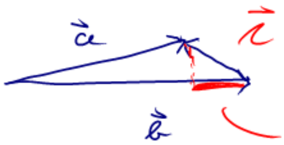
ebenso $\quad |\vec{a}\pm\vec{b}|^2 \ge |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2 - 2|\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|$

$$\underset{C.S.}{\ge} |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\,|\vec{b}| = (|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2$$

$$\rightarrow \quad |\vec{a}\pm\vec{b}| \ge \big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|\,.$$

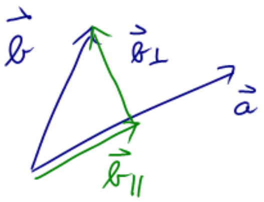
geometrisch:

$\vec{c} = \vec{a}-\vec{b}$ $\qquad |\vec{c}| = |\vec{a}-\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$ ✓



$|\vec{b}|-|\vec{a}| \le |\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{c}|$ ✓

12:



a)

$$\vec{b}_\parallel = \langle\hat{a},\vec{b}\rangle\,\hat{a}$$

$$\vec{b}_\perp = (\hat{a}\times\vec{b})\times\hat{a}$$

b) $\quad |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\sin\vartheta|, \qquad \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\vartheta$

$$\rightarrow \quad |\vec{a}\times\vec{b}|^2 + |\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2.$$

13) a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$, $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = 0$

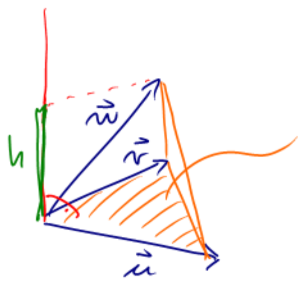
$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} = -2(\vec{a} \times \vec{b})$.

$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = 3$

b) $g = \{ \sigma + \lambda \, \vec{a} \times \vec{b} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

14 a) alle Ausdrücke beschreiben das Volumen desselben Spats mit Kanten $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und müssen deshalb übereinstimmen.

b)



$A = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$

$h = \left| \left\langle \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}, \vec{w} \right\rangle \right|$

$\rightarrow \quad V = \frac{1}{3} h A = \frac{1}{3} \left| \left\langle \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\cancel{|\vec{u} \times \vec{v}|}}, \vec{w} \right\rangle \right| \cdot \frac{1}{2} \cancel{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{1}{6} |\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|$.