

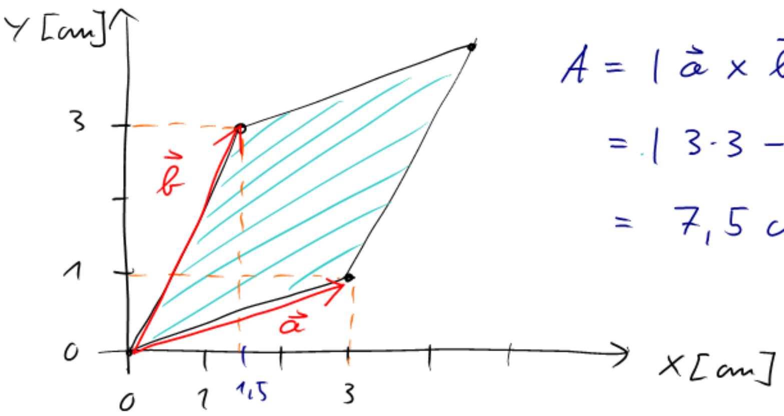
Vorkurs Physik WS2019/20 – Blatt 12

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vorkurs2019.html/*

Besprechung: 26. September 2019

16. Flächenberechnung

Berechnen Sie den Flächeninhalt des abgebildeten Parallelogramms.



$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$= |3 \cdot 3 - 1 \cdot 1{,}5|\ \text{cm}^2$

$= 7{,}5\ \text{cm}^2$

17. Linear oder nicht linear?

a) V sei ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum, $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sei eine ONB und $\vec{a}$ ein Vektor des Raums. Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind:

$$A : V \to \mathbb{R}\,, \quad \vec{u} \mapsto |\vec{u}| \qquad B : V \to V\,, \quad \vec{u} \mapsto \vec{a} + \vec{u} \qquad C : V \to V\,, \quad \vec{u} \mapsto \vec{a} \times \vec{u} \qquad D : V \to \mathbb{R}\,, \quad \vec{u} \mapsto \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle$$

$$E : V \to V\,, \quad \vec{u} \mapsto \langle \vec{e}_1, \vec{u} \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{e}_2, \vec{u} \rangle \vec{e}_2$$

s. u.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: eine lineare Abbildung bildet den Nullvektor des Definitionsvektorraums immer auf den Nullvektor des Wertevektorraums ab.

s. u.

18. Abbildungsmatrix

Eine lineare Abbildung $A : V \to V$ bildet die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ einer Basis B des Raums auf folgende Vektoren ab:

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B, \quad A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}_B, \quad A\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}_B.$$

a) Wie lautet die Abbildungsmatrix von A bzgl B?

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{BB}$$

$-6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\underline{\underline{A}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ $\underline{\underline{A}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-5\\-6\end{pmatrix}$

b) Bestimmen Sie die Bilder der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}_B, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}_B, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}_B, \quad \vec{d} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \vec{b}$$

unter der Abbildung A.

$\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} \xleftarrow{A}$

19. Matrixdarstellung diverser linearer Abbildungen

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der folgenden linearen Abbildungen in der Standardbasis, wobei $\mathbb{I}$ die identische Abbildung und $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ ein fest gewählter normierter Vektor ist.

a) $A_{\vec{n}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{a} \mapsto \vec{n} \times \vec{a}$
b) $\mathcal{P}_{\vec{n}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{a} \mapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle\ \vec{n}$
c) $l_{\vec{n}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \vec{a} \mapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle$
d) $O_{\vec{n}} = \mathbb{I} - \mathcal{P}_{\vec{n}}$

Verwenden Sie im Folgenden $(1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$ als Basis für den Raum aller Polynome $n$ten Grades P_n.

e) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} : P_4 \to P_2,\ f(x) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

17a) A nicht linear, da z.B. $A(-\vec{u}) = A(\vec{u}) \neq -A(\vec{u})$;

B nicht linear, da z.B. $B(\vec{u}+\vec{v}) = B(\vec{u}) + B(\vec{v}) - \vec{a} \neq B(\vec{u}) + B(\vec{v})$ $\quad (\vec{a} \neq \vec{0})$

C, D, E sind offenbar additiv und homogen und damit linear (Beweis auch „hinschreiben")

b) A linear $\Rightarrow$ $A\vec{0} = \vec{0}$!

(denn $A\vec{0} = A(0 \cdot \vec{0}) \underset{\uparrow}{=} 0\, A(\vec{0}) = \vec{0}$)

A homogen

19

$$\underline{\underline{A_{\hat{n}}}} = (\vec{n} \times \vec{e}_1,\ \vec{n} \times \vec{e}_2,\ \vec{n} \times \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{P_{\hat{n}}}} = (n_1 \vec{n},\ n_2 \vec{n},\ n_3 \vec{n}) = \begin{pmatrix} n_1 n_1 & n_2 n_1 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & n_2 n_2 & n_3 n_2 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3 n_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\ell_{\hat{n}}}} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{O_{\hat{n}}}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} - \underline{\underline{P_{\hat{n}}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 n_1 & \cdots \\ \vdots & \text{s.o.} \end{pmatrix}$$

Basis $B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ von P_4

Basis $C = (1, x, x^2)$ von P_2

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\partial^2 1}{\partial x^2} = 0 \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C \; ; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = 0 \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C$$

$$\frac{\partial^2 x^2}{\partial x^2} = 2 \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C \; ; \quad \frac{\partial^2 x^3}{\partial x^2} = 6x \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}_C$$

$$\frac{\partial^2 x^4}{\partial x^2} = 12x^2 \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}_C$$

d.h. $$\underline{\underline{\text{"} \partial^2 / \partial x^2 \text{"}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} .$$