Lösungen Blatt 2

1.) Umkehrfunktionen

a) $y = \frac{1}{x}$ ist bijektiv und wohldefiniert für

$D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $W = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

b) $y = \frac{1}{x-1}$ ist bijektiv und wohldefiniert für

$D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $W = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow x - 1 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1}{y} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 1$

c) $y = x^3 - 1$ ist bijektiv und wohldefiniert für

$D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$

$\Rightarrow x^3 = y + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+1}$

d) $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ ist bijektiv und wohldefiniert

für: $D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$, $W_1 = \mathbb{R}^+$

$D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$, $W_2 = \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{y} \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} - 1$

$f_1^{-1}(x) = \sqrt{y} - 1$, $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{y} - 1$

e) $y = |x|$ ist bijektiv und wohldefiniert für:

$D_1 = \mathbb{R}^+$, $W_1 = \mathbb{R}^+$

$D_2 = \mathbb{R}^-$, $W_2 = \mathbb{R}^+$

auf D_1 gilt: $y = x \Rightarrow f_1^{-1}(x) = x$

auf D_2 gilt: $y = -x \Rightarrow f_2^{-1}(x) = -x$

f)

$y = \frac{1}{x^2}$ ist bijektiv und wohldefiniert für

$D_1 = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $W_1 = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

$D_2 = \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$, $W_2 = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

$$\cancel{f} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{y}} = \pm \frac{\sqrt{y}}{y}$$

$$\Rightarrow f_1^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \quad , \quad f_2^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x}$$

g)

$y = (x^2)^5 = x^{10}$ ist bijektiv und wohldefiniert für

$D_1 = \mathbb{R}^+$, $W_1 = \mathbb{R}^+$

$D_2 = \mathbb{R}^-$, $W_2 = \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt[10]{y}$$

$$\Rightarrow f_1^{-1}(x) = \sqrt[10]{y} \quad , \quad f_2^{-1}(x) = -\sqrt[10]{y}$$

h)

$y = \frac{1}{2x+4} - 1$ ist bijektiv und wohldefiniert für

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $W = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\Rightarrow y + 1 = \frac{1}{2x+4} \Rightarrow 2x + 4 = \frac{1}{y+1} \Rightarrow x = \frac{1}{2y+2} - 2$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2x+2} - 2$$

$= (x+3)^3 - 3$ ist bijektiv und wohldefiniert für

$D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad y + 3 = (x+3)^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+3} - 3$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{y+3} - 3$

j)

$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x+3}{x-1}$$

ist bijektiv und wohldefiniert für

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow \quad y(x-1) = x + 3$

$\Leftrightarrow \quad yx - y = x + 3 \quad | -x, +y$

$\Leftrightarrow \quad yx - x = y + 3$

$\Leftrightarrow \quad x(y-1) = y + 3$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{y+3}{y-1}$

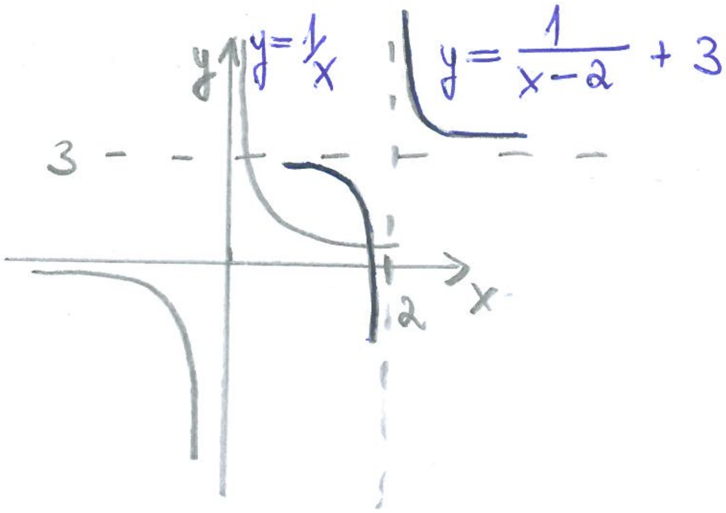
$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-1}$

2) <u>Verschieben, stauchen etc.</u>

a) Verschiebung um -2 nach links $f(x) \to f(x + (-2))$

Verschiebung um 3 nach oben $f(x) \to f(x) + 3$

$\Rightarrow g(x) = f(x-2) + 3 = \frac{1}{x-2} + 3$



b)

$$g(x) = f(x-2) + 3$$

$$= \frac{(x-2)^2+3}{x-2-1} + \sqrt{x-2-3} + 3$$

$$= \frac{x^2-4x+7}{x-3} + \sqrt{x-5} + 3$$

c)

Sagen wir, wir strecken erst mit k und verschieben dann um x.

$$h(t) \rightarrow \tilde{h}(t) = k(t^4 - 2t^2 + 2) + x$$

$\tilde{h}'(t) = 4kt(t^2-1) \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 1,\ t_3 = -1$ sind Extremstellen

$\Rightarrow$ wir müssen nur die y-Koordinate ändern!

Wir wollen: $\tilde{h}(0) = 4,\ \tilde{h}(1) = \tilde{h}(-1) = 1$

$$\tilde{h}(0) = 2k + x \overset{!}{=} 4$$

$$\tilde{h}(1) = k + x = \tilde{h}(-1) \overset{!}{=} 1$$

$\Rightarrow$ lineares GLS: $\begin{cases} 2k + x = 4 \\ k + x = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} k = 1 - x \\ 2 - 2x + x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 - x \\ 2 - x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

3.) Verkettung

a) $f: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ \quad , \; f(x) = \sqrt{-x}$

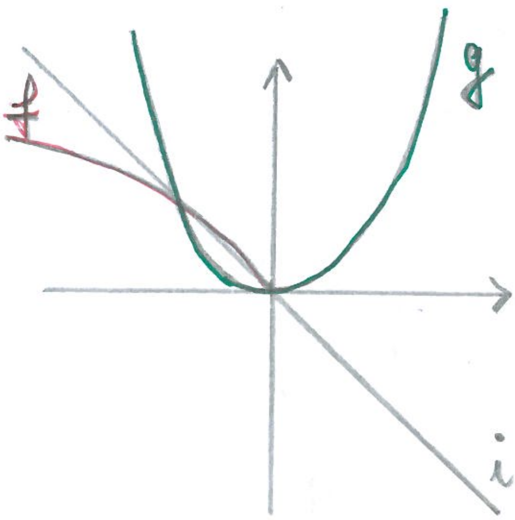
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad , \; g(x) = x^2$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \not\subset \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ nicht wohldefiniert wenn f reellwertig sein soll*

$g \circ f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$g(f(x)) = (\sqrt{-x})^2 = -x = i(x)$



* eine Ausnahme stellt der Punkt $x = 0$ dar,

$f(g(0)) = \sqrt{-0^2} = \sqrt{0} = 0$

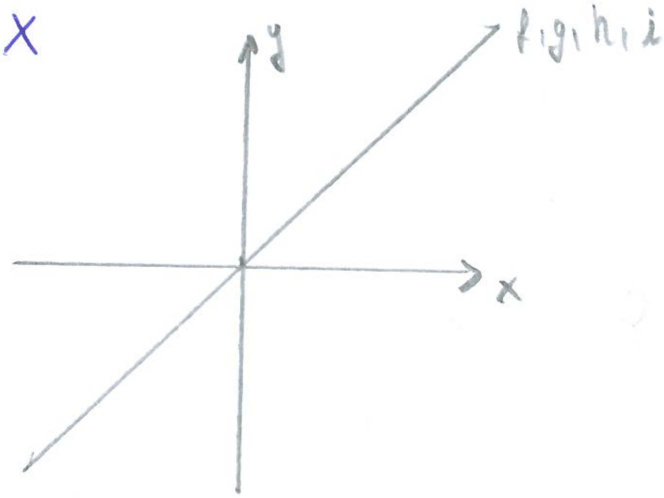
b)

$f(x) = x \ , \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x \ , \ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f \circ g = g \circ f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$i(x) = h(x) = x$



c)

$f(x) = 1 - x^2, \ f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

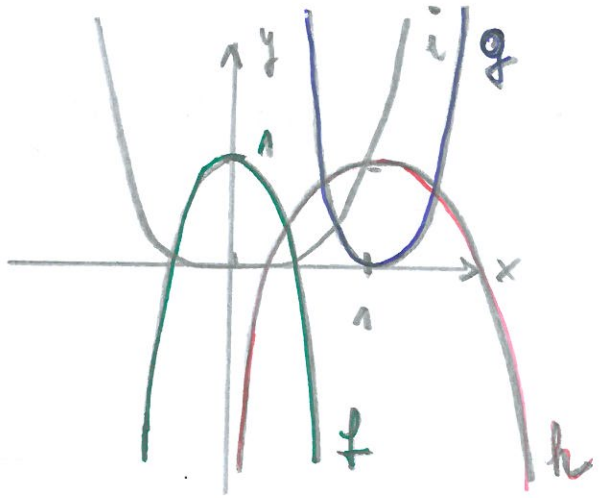
$g(x) = (1-x)^2, \ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

$h(x) = f(g(x)) = 1 - (1-x)^4$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$i(x) = g(f(x)) = (1 - (1-x^2))^2 = x^4$



$f(x) = 3 - x \;,\; f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

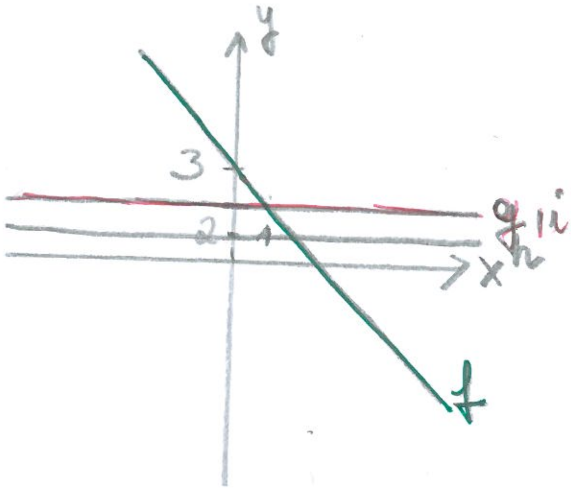
$g(x) = 2 \;,\; g: \mathbb{R} \to \{2\}$

$f \circ g: \mathbb{R} \to \{2\} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \{1\}$

$h(x) = f(g(x)) = 3 - 2 = 1$

$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to \{2\}$

$i(x) = g(f(x)) = 2$



4.) Verkettung rückwärts

Beispiele:

a) $f(x) = 3/x \;,\; g = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x} \;,\; g(x) = 3x$

c) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + x\right)$

$g(x) = 5x$

d) $f(x) = e^{x} \;,\; g(x) = -2 - 2x$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^4} \;,\; g(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = (x+1)(x-1) + \frac{1}{x}$

$g(x) = x - 1$