Lösung zu Blatt 3

1.) Gleichungen umformen

a) $e^{2x} = 3 \quad | \ln$

$2x = \ln(3) \quad |:2$

$x = \frac{1}{2}\ln(3)$

b) $\ln(3x) = 2 \quad | e^{\wedge}()$

$3x = e^2 \quad |:3$

$x = \frac{1}{3}e^2$

c) $3e^{3x} = 1 \quad |:3$

$e^{3x} = \frac{1}{3} \quad | \ln$

$3x = -\ln(3)$

$x = -\frac{1}{3}\ln(3)$

d) $\ln(e^{2x}) + 3\ln(e^{5x}) = 2$

$2x + 15x = 2$

$17x = 2 \quad |:17$

$x = \frac{2}{17}$

e) $e^{\ln(2x)} = 3$

$2x = 3 \quad |:2$

$x = 3/2$

f) $\ln(x^{-1/3}) = e$

$-\frac{1}{3}\ln(x) = e \quad | \cdot (-3)$

$\ln(x) = -3e \quad | e^{\wedge}()$

$x = e^{(-3e)}$

g) $2^x = 3$

$x = \log_2(3)$

h) $\ln(2x) + 3\ln(5x) = 2 \quad | e^{()} \Rightarrow e^{(\ln(2x) + 3\ln(5x))} = e^2$

$\Rightarrow e^{\ln(2x)} e^{3\ln(5x)} = e^2$

$\Rightarrow 2x\,(e^{\ln(5x)})^3 = e^2$

$\Rightarrow 2x\,(5x)^3 = e^2$

$\Rightarrow 250x^4 = e^2$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{(250)^{\frac{1}{4}}}$

2.) Zinsen

ohne Zinseszins: $K_1(n) = K_0(1 + 0.05n)$

mit Zinseszins: $K_2(n) = K_0 \cdot 1.05^n$

$K_1(\tilde{n}) \stackrel{!}{=} 2K_0$

$$\Rightarrow \quad K_0(1+0.05\tilde{n}) = 2K_0 \quad | : K_0$$

$$1+0.05\tilde{n} = 2 \quad | -1$$

$$0.05\tilde{n} = 1 \quad | : 0.05$$

$$\tilde{n} = 20 \quad (\text{Jahre})$$

$K_2(\tilde{n}) \stackrel{!}{=} 2K_0$

$$\Rightarrow \quad K_0 \cdot 1.05^n = 2K_0 \quad | : K_0$$

$$1.05^n = 2 \quad | \log$$

$$n = \log_{1.05}(2) \approx 14 \quad (\text{Jahre})$$

$K_1(n) \stackrel{!}{=} K_2(n)$

$$\Rightarrow \quad K_0(1+0.05n) = K_0 \cdot 1.05^n$$

$$1+0.05n = 1.05^n$$

$$\Rightarrow \quad 1.05^n - 0.05n = 1$$

$$\Rightarrow \quad n \in \{0,1\}$$

Für ein Jahr macht die Verzinsung keinen Unterschied, langfristig ist $K_2(n)$ aber aussichtsreicher.

3) Exponentieller Zerfall

Sei $n(t) = n_0 \exp(-t/\gamma)$ mit γ = "Zerfallskonstante"

Es soll gelten $n(t+\tau) = n(t)/2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} n_0 \exp(-t/\gamma) = \exp(-t/\gamma)\exp(-\tau/\gamma)\, n_0$$

$$\Rightarrow \quad \exp(-\tau/\gamma) = \frac{1}{2} \quad |\ln$$

$$-\frac{\tau}{\gamma} = -\ln(2)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{\tau}{\ln(2)}$$

Daher: $n(t) = n_0 \cdot \exp(-\ln(2)\, t/\tau)$

$$= n_0 \cdot 2^{(-t/\tau)}$$

Für die beiden Isotope gilt also:

$$n_1(t) = n_0^1\, 2^{(-t/\tau_1)}$$

$$n_2(t) = n_0^2\, 2^{(-t/\tau_2)}$$

$$= \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 \tau_2}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{n_0^1 \cdot 2^{(-t/\tau_1)}}{n_0^2 \cdot 2^{(-t/\tau_2)}} = r_0 \cdot 2^{-t\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r_0}{r} = 2^{t\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 \tau_2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \log_2\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

4) Verschiebungen an trigonometrischen Funktionen

a) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= -\sin(x)$

b) $\cos(x-\pi) = \cos(x)\cos(-\pi) - \sin(x)\sin(-\pi)$

$= \cos(x)\cos(\pi) + \sin(x)\sin(\pi)$

$= -\cos(x)$

c) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$= \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= -\cos(x)$

d) $\sin(x+\pi) = \sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi)$

$= -\sin(x)$

5) Uhrzeiger

$f_h = \frac{1}{T_h} = \frac{1}{1h} = \frac{1}{3600\,s}$

$f_m = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{1min} = \frac{1}{60\,s}$

Beide Zeiger rotieren auf einem Kreis also

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\omega} t) \\ \sin(\tilde{\omega} t) \end{pmatrix} \quad , \tilde{\omega} = 2\pi\omega$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_h(t) = R_h \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi t}{3600s}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi t}{3600s}\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_m(t) = R_m \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi t}{60s}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi t}{60s}\right) \end{pmatrix}$$

6) Geschickte Darstellung

a) $f(x) = f_0 \cdot e^{-x/x_0} \quad | \ln$

$$\ln(f(x)) = \ln(f_0) + \left(-\frac{x}{x_0}\right)$$

$\Rightarrow$ trage $\ln(f(x))$ gegen x auf, dann ist $\ln(f_0)$ der Ordinatenabschnitt und $-\frac{1}{x_0}$ die Steigung

b) wie a) nur dass man gegen $\frac{1}{x}$ aufträgt und die Steigung $-x_0$ ist

c) $f(x) = f_0 \cdot x^a \quad | \ln$

$$\ln(f(x)) = \ln(f_0) + a \cdot \ln(x)$$

$\Rightarrow$ trage $\ln(f(x))$ gegen $\ln(x)$ auf, dann ist $\ln(f_0)$ der Ordinatenabschnitt und a die Steigung

d) $f(x) = ax + bx^2$

für $x \neq 0$: $\frac{f(x)}{x} = a + bx$

$\Rightarrow$ trage also $f(x)/x$ gegen x auf, dann ist a der Ordinatenabschnitt und b die Steigung