Lösungen Blatt 5

1. Ableitung der Umkehrfunktion

Für eine Funktion $f(x)$ gilt: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

- $f(x) = x^{\frac{1}{a}}$; Umkehrfunktion: $f^{-1}(y) = y^a$, da

$f(f^{-1}(y)) = f(y^a) = (y^a)^{\frac{1}{a}} = y$

Bemerke: Wegen $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$. D.h. es wir können auch schreiben:

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$$

Mit $(f^{-1})'(y) = a\, y^{a-1}$ folgt

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(x^{\frac{1}{a}})} = \frac{1}{a(x^{\frac{1}{a}})^{a-1}} = \frac{1}{a}\, x^{\frac{1}{a}-1}$$

- $g(x) = \ln(x)$; Umkehrfunktion $g^{-1}(y) = e^y$, da

$g(g^{-1}(y)) = \ln(e^y) = y$; Ableitung der Umkehrfunktion: $(g^{-1})'(y) = e^y$

Damit:

$$g'(x) = \frac{1}{(g^{-1})'(g(x))} = \frac{1}{(g^{-1})'(\ln(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

- $h(x) = \arctan(x)$; Umkehrfunktion: $h^{-1}(y) = \tan(y)$, da $h(h^{-1}(y)) = \arctan(\tan(y)) = y$.

Ableitung der Umkehrfunktion:

$$(h^{-1})'(y) = \frac{d}{dy}\tan(y) = \frac{d}{dy}\,\frac{\sin(y)}{\cos(y)}$$

$$= \left(\frac{d}{dy}\sin(y)\right)\frac{1}{\cos(y)} + \sin(y)\cdot\left(\frac{d}{dy}\,\frac{1}{\cos(y)}\right)$$

$$= \frac{\cos(y)}{\cos(y)} + \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = 1 + \tan^2(y)$$

Damit:

$$h'(x) = \frac{1}{(h^{-1})'(h(x))} = \frac{1}{(h^{-1})'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

- $i(x) = \arcsin(x)$; Umkehrfunktion: $i^{-1}(y) = \sin(y)$, da

  $i(i^{-1}(y)) = \arcsin(\sin(y)) = y$

  Ableitung der Umkehrfunktion: $(i^{-1})'(y) = \cos(y)$

  Damit:

$$i'(x) = \frac{1}{(i^{-1})'(i(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \overset{*}{=} \frac{1}{(1 - \sin^2(\arcsin(x)))^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

* Hier haben wir verwendet, dass: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\Leftrightarrow \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

2. Extremwerte

Nullstellen:

$f(x) = 2x^4 - 8x^2 = x^2(2x^2 - 8)$

$f(x) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow x^2(2x^2 - 8) = 0$

$\Rightarrow x^2 = 0$ oder $(2x^2 - 8) = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$

$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 2$

Extremwerte:

Bedingung für Extremstellen: * $f'(x) = 0$

* $f''(x) \neq 0$

Bei Maxima: $f''(x) < 0$

Bei Minima: $f''(x) > 0$

Damit finden wir:

$f'(x) \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow 8x^3 - 16x = 0$

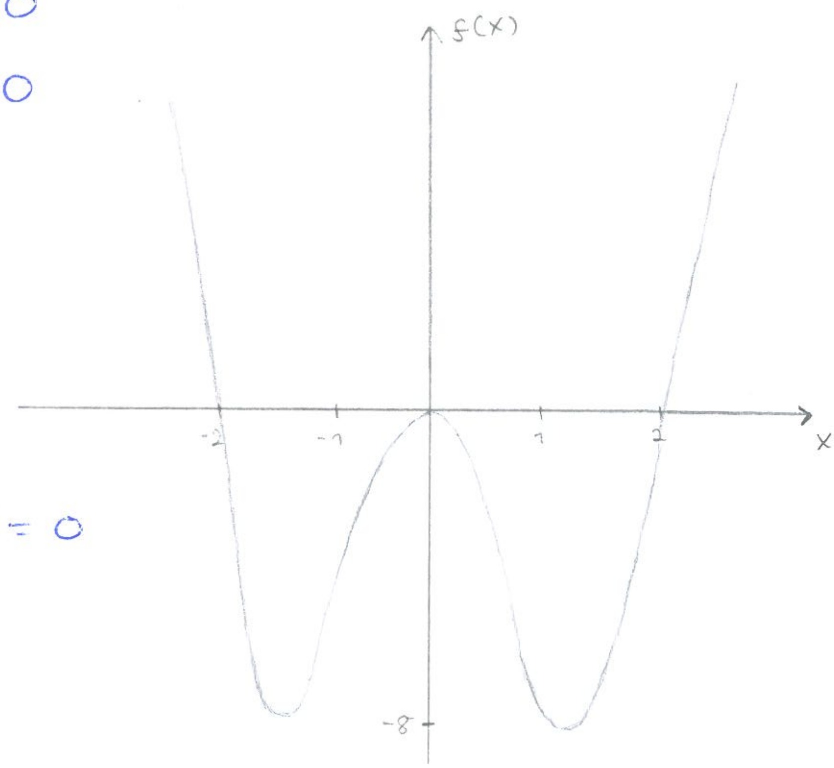
$\Rightarrow x(8x^2 - 16) = 0$

$\Rightarrow x_5 = 0$ oder $(8x^2 - 16) = 0$

$8x^2 - 16 = 0 \quad | :8$

$\Rightarrow x^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow x_{6/7} = \pm\sqrt{2}$



D.h. wir haben Extrema bei $x_5 = 0$, $x_{6/7} = \pm\sqrt{2}$

Haben wir Maxima, Minima oder Sattelstellen?

$f''(x) = 24x^2 - 16$

$f''(x_5) = f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei $x_5 = 0$

$f''(x_{6/7}) = f''(\pm\sqrt{2}) = 32 > 0 \Rightarrow$ lokale Minima bei $x_{6/7} = \pm\sqrt{2}$

Die Extremwerte ergeben sich zu:

$f(x_5) = 0$; $f(x_{6/7}) = -8$

3. Exponentialreihe

$e^1 = 2{,}71828182$

$e^{0{,}1} = 1{,}10517091$

Notation: $\mathcal{O}(n)$: Terme n-ter Ordnung

Damit die Näherung auf 8 Stellen genau ist muss gelten:

$\mathcal{O}(n) < 5 \cdot 10^{-9}$

mit $n > a$; a: letzte berücksichtigte Ordnung

Mit $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ finden wir für e^1: $\mathcal{O}(n) = \frac{1}{n!}$.

Damit:

$\mathcal{O}(n) < 5 \cdot 10^{-9}$

$\Rightarrow \frac{1}{n!} < 5 \cdot 10^{-9} \Rightarrow n > 11$ durch testen.

D.h. es muss bis zur 11. Ordnung entwickelt werden ($a = 11$).

Für $e^{0{,}1}$ finden wir mit $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$: $\mathcal{O}(n) = \frac{1}{n!}(0{,}1)^n$.

Damit:

$\mathcal{O}(n) < 5 \cdot 10^{-9}$

$\Rightarrow \frac{1}{n!}(0{,}1)^n < 5 \cdot 10^{-9} \Rightarrow n > 5$ durch testen.

D.h. es muss bis zur 5. Ordnung entwickelt werden ($a = 5$).

4. Taylor-Entwicklung

Taylor-Entwicklung: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{f^n(x)}{n!}\right|_{x=x_0} (x-x_0)^n$; $f^n(x)$: n-te Ableitung

a) $f(x) = \ln(x+1)$

$f^n(x) = \frac{1}{(x+1)^n}(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!$

Mit $x_0 = 0$ folgt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{f^n(x)}{n!}\right|_{x_0=0} x^n = 0 + x + \frac{1}{2}(-1)x^2 + \frac{1}{6} \cdot 2x^3 + \frac{1}{24}(-6)x^4 + \mathcal{O}(5)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \mathcal{O}(5) \ldots$$

b) $f(x) = \tan(x)$

$$f'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$f''(x) = 2\tan(x) + 2\tan^3(x)$$

$$f'''(x) = 2 + 8\tan^2(x) + 6\tan^4(x)$$

$$f''''(x) = 16\tan(x) + 40\tan^3(x) + 24\tan^5(x)$$

Mit $x_0 = 0$ folgt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{f^n(x)}{n!}\right|_{x_0=0} x^n$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(5) \ldots$$

Bemerke: $\tan(x)$ ist ungerade. Daher $\mathcal{O}(n) = 0$ für n gerade.

c) $f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$

Wir benutzen $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(4) \ldots$

Damit finden wir:

$$f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \approx \left(\frac{x - \frac{1}{6}x^3}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{6}x^2\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36}x^4$$

5. Quadratische Näherung

$\sqrt{17} = 4{,}1231056256 1766\ldots$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$

Taylorentwicklung um $x_0 = 16$:

$$f(x) = 4 + \frac{x-16}{8} - \frac{(x-16)^2}{512} + \frac{(x-16)^3}{16384} + \mathcal{O}(4) \ldots$$

$f(17) \approx 4{,}12311$ bei Verwendung obiger Näherung.

6. L'Hôspital

Regel von de L'Hôspital:

Seien f und g zwei auf dem Intervall $]a,b[$ differenzierbare Funktionen. Für $x_0 \in]a,b[$ gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Falls $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{x} \right) := \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$$ mit $f(x) = 1 - \cos(x)$ & $g(x) = x$

$\lim_{x \to 0} (f(x)) = 0$; $\lim_{x \to 0} (g(x)) = 0$

Daher können wir L'Hôspital anwenden:

$f'(x) = \sin(x)$; $g'(x) = 1$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{1} \right) = \lim_{x \to 0} (\sin(x)) = 0$$

Daher, nach de l'Hôspital: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x} \right) = 0$