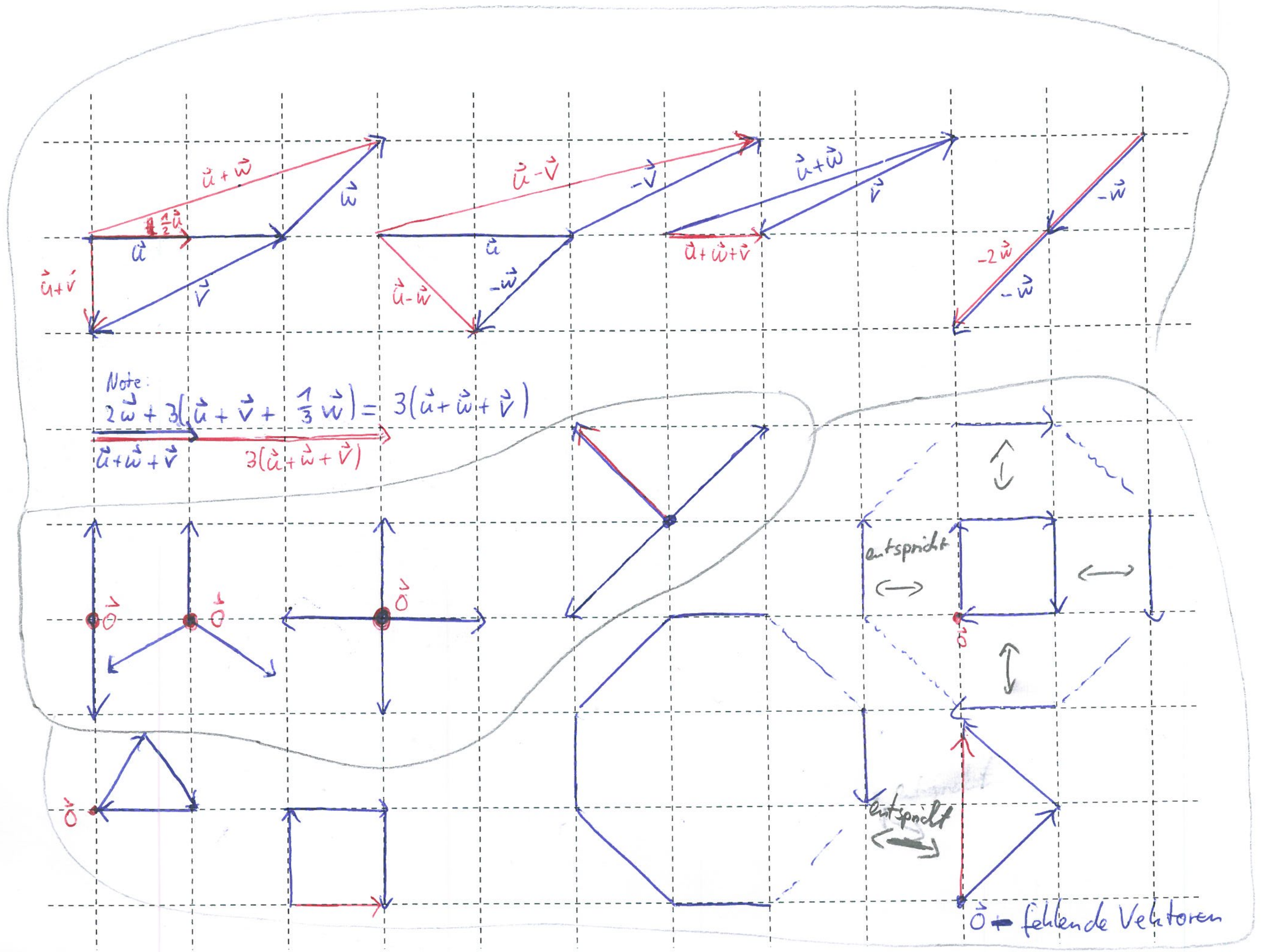


$\vec{u}+\vec{w}$
$\frac{1}{2}\vec{u}$
$\vec{u}$
$\vec{w}$
$\vec{v}$
$\vec{u}+\vec{v}$
$\vec{u}-\vec{v}$
$-\vec{v}$
$\vec{u}$
$-\vec{w}$
$\vec{u}-\vec{w}$
$\vec{u}+\vec{w}$
$\vec{v}$
$\vec{u}+\vec{w}+\vec{v}$
$-\vec{w}$
$-2\vec{w}$
$-\vec{w}$
Note:
$2\vec{w}+3(\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}) = 3(\vec{u}+\vec{w}+\vec{v})$
$\vec{u}+\vec{w}+\vec{v}$
$3(\vec{u}+\vec{w}+\vec{v})$
$\vec{0}$
$\vec{0}$
$\vec{0}$
$\vec{0}$
entspricht
$\vec{0}$
entspricht
$\vec{0}$ = fehlende Vektoren

$$\ldots \overset{(S1)}{=} 2\alpha\vec{u} + \left(\frac{1}{4\alpha}(2\vec{v}) + \frac{1}{4\alpha}(-2\alpha^2\vec{u})\right) \overset{(S3)}{=} 2\alpha\vec{u} + \left(\frac{1}{2\alpha}\vec{v} - 2\alpha\vec{u}\right) \overset{(A1)(A3)}{=} \frac{1}{2\alpha}\vec{v}$$

$$\ldots \overset{(S1)(S3)}{=} (\alpha-\beta)^2\vec{u} - (\alpha-\beta)^2\vec{v} + 4\alpha\vec{w} \overset{(S3)(A3)}{=} (\alpha-\beta)^2(\vec{u}-\vec{v}) - 4\alpha\vec{w}$$

$$\ldots \overset{(S1)(S3)}{=} 2\vec{u} - 4\vec{v} + 8\vec{w} + 4\vec{v} - 2\vec{u} \overset{(A1)(A3)}{=} 8\vec{w}$$

$$\ldots \overset{(S1)(A1)(A3)}{=} 2\alpha\vec{u} + (\alpha+\beta)\vec{v}$$

$$\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}_B$$

$$\vec{v} = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \overset{(S4)}{=} \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}_B$$

$$\vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \overset{(S4)}{=} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_B$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2\\ \vec{f}_2 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\vec{f}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{f}_2 &= \vec{e}_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}_{B'}\\ -\tfrac{1}{2}\vec{f}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{f}_2 &= \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}_{B'}\end{aligned}\right.$$

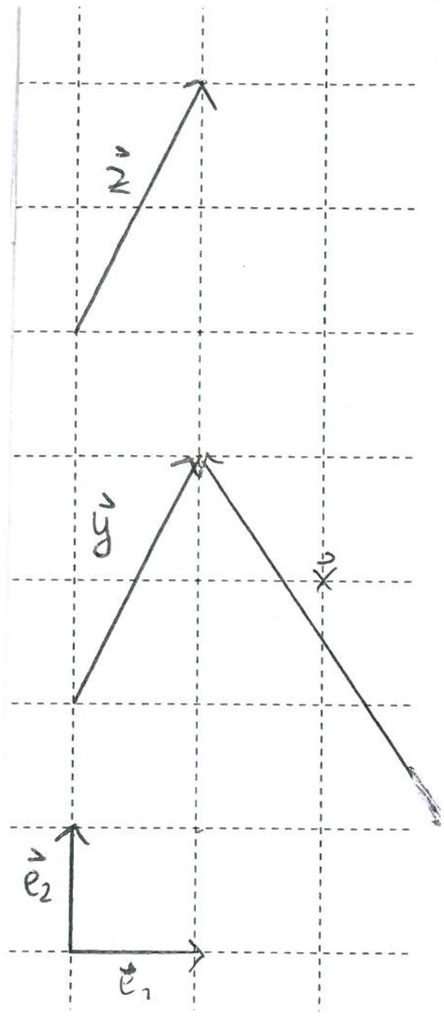
$$\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}_{B'} + 2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}_{B'}$$

$$\vec{v} = -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{B'} - 3\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}_{B'}$$

$$2\vec{u} + \vec{v} = 2(\ldots)_{B'} + (\ldots)_{B'} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{B'}$$

$$\vec{x} = 2\vec{f}_1 - \vec{f}_2 = 2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_B - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}_B$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}_B, \quad \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}_B$$



$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sind Lösung

$$\begin{cases} a_1 (x_1+y_1) + a_2 (x_2+y_2) \overset{!}{=} 0 \\ b_1 (x_1+y_1) + b_2 (x_2+y_2) \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overbrace{a_1 x_1 + a_2 x_2}^{=0} + \overbrace{a_1 y_1 + a_2 y_2}^{=0} = 0 \\ \underbrace{b_1 x_1 + b_2 x_2}_{=0} + \underbrace{b_1 y_1 + b_2 y_2}_{=0} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}$ ist auch Lösung

---

$$\begin{cases} a_1 \lambda x_1 + a_2 \lambda x_2 \overset{!}{=} 0 \\ b_1 \lambda x_1 + b_2 \lambda x_2 \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \overbrace{(a_1 x_1 + a_2 x_2)}^{=0} = 0 \\ \lambda \underbrace{(b_1 x_1 + b_2 x_2)}_{=0} = 0 \end{cases}$$

~~$\lambda \neq 0$~~

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0 \end{cases}$~~

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$ ist auch Lösung

---

Die Lösungen bilden einen Vektorraum.
Gezeigt wurde oben: Abgeschlossenheit bzgl. Addition und Skalarmultiplikation
Noch zu zeigen: Existenz von Inversem & Nullelement