Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

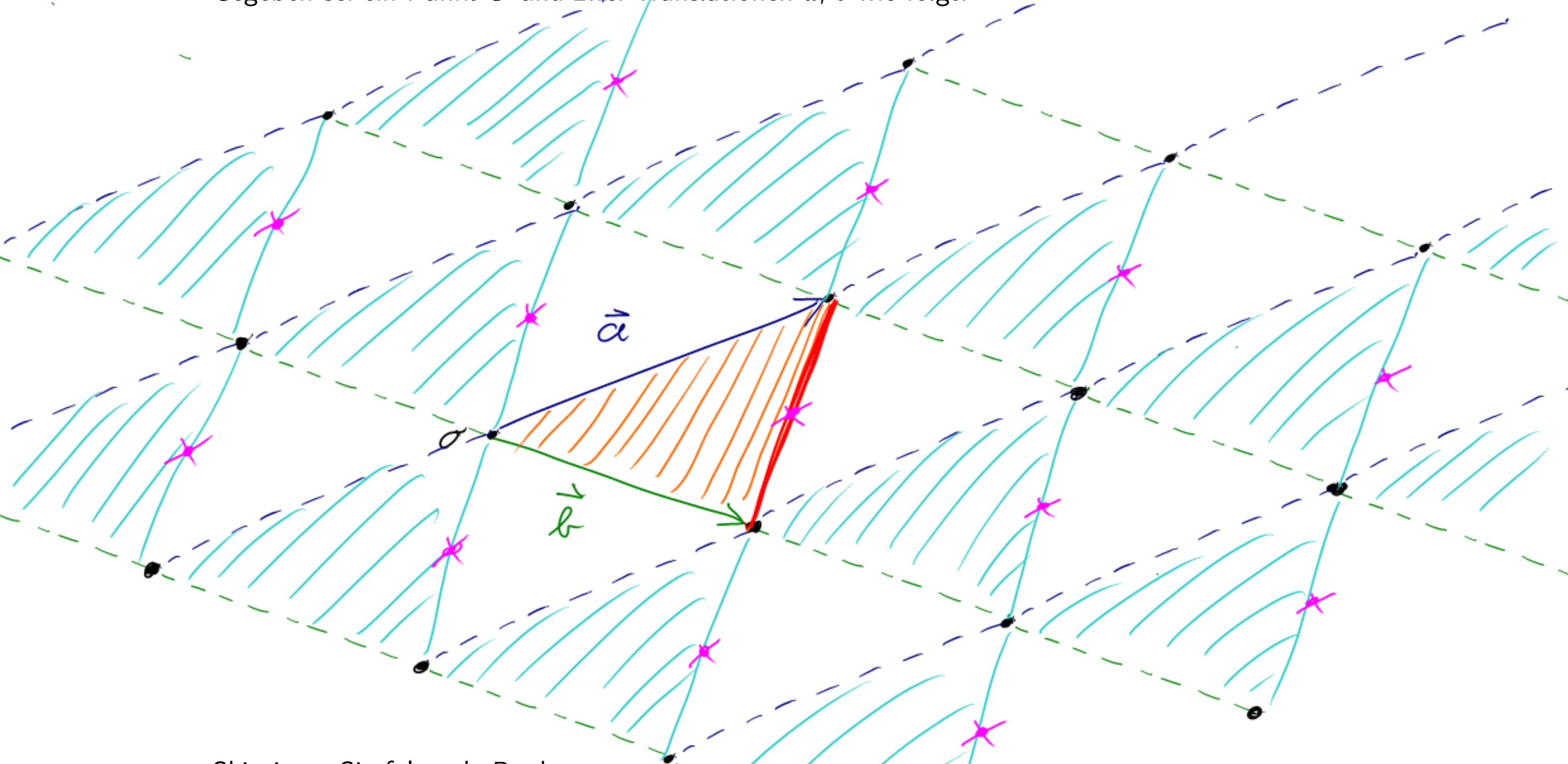
Vorkurs Physik WS2019/20 – Blatt 9

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/vorkurs2019.html/*

Besprechung: 23. September 2019

7. Punktmengen

Gegeben sei ein Punkt O und zwei Translationen $\vec{a}$, $\vec{b}$ wie folgt:



Skizzieren Sie folgende Punktmengen:

$M_1 = \{O + m\vec{a} + n\vec{b} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$, $\quad M_2 = \{O + (m + \frac{1}{2})\vec{a} + (n + \frac{1}{2})\vec{b} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$,

$M_3 = \{O + \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \,|\, \lambda \in [0, 1]\}$, $\quad M_4 = \{O + \mu(\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})) \,|\, \lambda, \mu \in [0, 1]\}$,

$M_5 = \{O + m\vec{a} + n\vec{b} + \mu(\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})) \,|\, m, n \in \mathbb{Z},\ \lambda, \mu \in [0, 1]\}$,

8. Lineare Unabhängigkeit und Vollständigkeit

a) Rekapitulieren Sie die Definitionen und Bedeutungen der folgenden, aus der Vorlesung bekannten Begriffe:

1. Linearkombination
2. Lineare Unabhängigkeit
3. Vollständigkeit
4. Basis

vgl. Skript

b) Welche der folgende Systeme von Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig, welche sind vollständig und welche bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

$$\text{(i)}\quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(ii)}\quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(iii)}\quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{(iv)}\quad \vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

s. u.

9. Vektorraum mit Skalarprodukt

a) Was ist ein Skalarprodukt und wozu ist es gut? vgl. Skript

b) Zeigen Sie:

1. Wenn $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$, dann gilt auch $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{c}$ und $\lambda\vec{a} \perp \vec{c}$.
2. $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$
3. $|\widehat{\vec{a}}| = 1$.

s. u.

10. Geometrie

Beweisen Sie mittels Vektorrechnung:

1. die Diagonalen einer Raute sind zueinander orthogonal,
2. den Satz des Pythagoras,
3. den Satz von Thales: *Alle Winkel am Halbkreisbogen sind rechte Winkel.*

s. u.

8b) (i) $0 \overset{!}{=} \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 \rightarrow \lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 0$; d. h. $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ lin. unabhängig

(ii) $\vec{b}_3 = \vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 \rightarrow \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ lin. abhängig

(iv) $0 \overset{!}{=} \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 + \lambda_3 \vec{d}_3 \rightarrow \lambda_1 = 0$

$$\rightarrow \begin{matrix} 0 = \lambda_2 - \lambda_3 \\ 0 = \lambda_2 + \lambda_3 \end{matrix} \rightarrow \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

d. h. $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$ lin. unabhängig;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \frac{x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{x_1 + x_3 - 2x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_3 - x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$ vollständig und damit auch Basis.

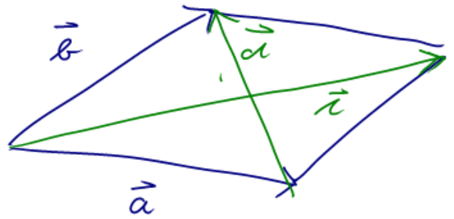
(iii) wegen $\vec{d}_1 = \vec{c}_1$, $\vec{d}_2 = \vec{c}_2$, $\vec{d}_3 = \vec{c}_3$ ist nach (IV) $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$ lin. abhängig und vollständig.

9b) 1. $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$ bedeutet $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0$ und $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$; somit $\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$, d.h. $(\vec{a}+\vec{b}) \perp \vec{c}$, und $\langle \lambda \vec{a}, \vec{c} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0$, d.h. $\lambda \vec{a} \perp \vec{c}$.

2. $|\lambda \vec{a}| = \sqrt{\langle \lambda \vec{a}, \lambda \vec{a} \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \lambda \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \lambda |\vec{a}|$.

3. $|\hat{a}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| \overset{2.}{=} \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1$.

10) 1.



$|\vec{a}| \overset{!}{=} |\vec{b}|$ (Raute!)

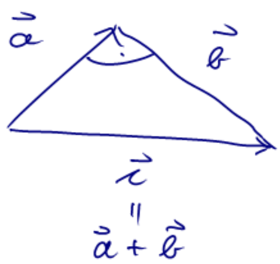
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$

$$\rightarrow \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{b}-\vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \underbrace{- \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}_{= 0} \underbrace{- \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}_{= -\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}$$

$$= 0; \text{ d.h. } \vec{c} \perp \vec{d}$$

2.



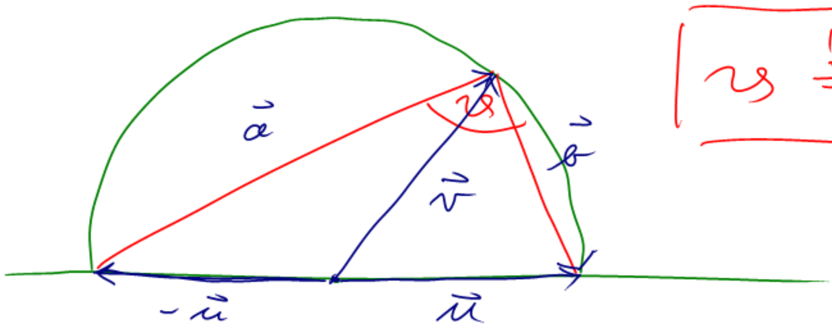
$\vec{a} \perp \vec{b}$ bedeutet $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$,

$$\rightarrow |\vec{c}|^2 = \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{= |\vec{a}|^2} + \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{= 0} + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}_{= 0} + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}_{= |\vec{b}|^2}$$

also $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$.

3. Satz von Thales:



$$\boxed{\vartheta \overset{!}{=} \frac{\pi}{2}}$$

- $|\vec{u}| = |\vec{v}|$
- $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$
- $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$

$$\Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle$$
$$= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$$

d.h. $\vec{a} \perp \vec{b}$.