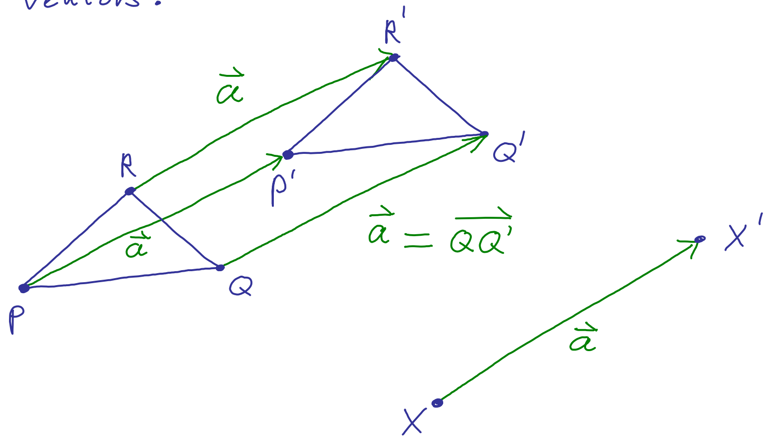
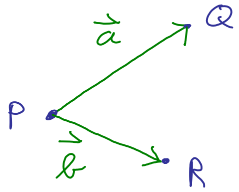
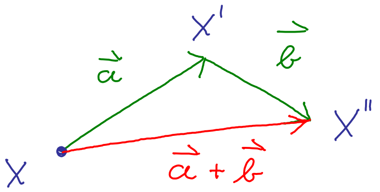
# Vektor, Vektorraum, Euklidischer Raum

Translation (d.h. Parallelverschiebung) als Prototyp eines Vektors:




Hintereinanderausführung =: **Addition** „+"

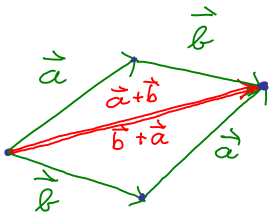



d.h.

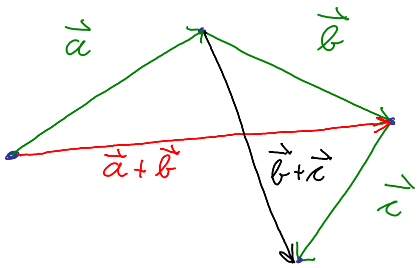
$$\vec{a} = \overrightarrow{XX'}$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{X'X''}$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{XX''}$$

ist kommutativ,




$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} \overset{!}{=} \vec{b} + \vec{a}}$$

und assoziativ,




$$\boxed{(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c} \overset{!}{=} \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})}$$

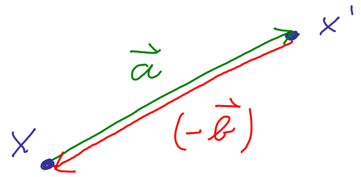
<u>Null-Translation</u> $\vec{o} := \overrightarrow{XX}$ erfüllt für beliebige $\vec{a}$

$$\boxed{\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}}$$

die <u>Inverse</u> (Translation) zu $\vec{a} = \overrightarrow{XX'}$ ist

$$(-\vec{a}) := \overrightarrow{X'X} \,,$$

erfüllt $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{X'X} = \overrightarrow{XX} = \vec{o}$



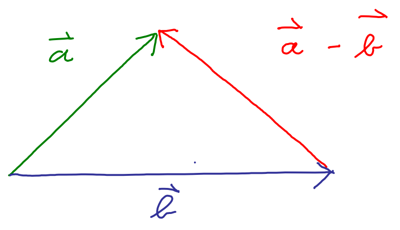

$$\boxed{\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}}$$

<u>Konvention</u>: statt $+(-\vec{a})$ schreibe $-\vec{a}$

→ <u>Subtraktion</u>:

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

geometrisch:




[ denn

$$\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + \overbrace{\vec{b} + (-\vec{b})}^{=\vec{o}}$$

$$= \vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$$

]

zusammenfassend:

<u>Addition</u> (= Hintereinanderausführung) von Translationen erfüllt:

(A1) <u>Assoziativität</u>: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

(A2) Existenz einer <u>Null</u> $\vec{o}$: $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$

(A3) Existenz der <u>Inversen</u> $(-\vec{a})$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$

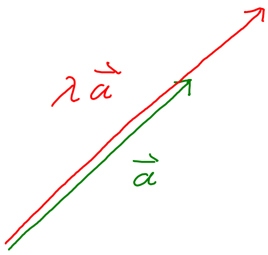
(A4) <u>Kommutativität</u>: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Statt Eigenschaften (A1)-(A3) aufzulisten sagt man kurz: "Translationen mit Addition bilden eine Gruppe."

gilt zudem (A4) so nennt man diese Gruppe "abelsch" (nach Niels Henrik <u>Abel</u> 1802-1828)

Translationen kann man aber nicht nur addieren, sondern auch <u>strecken</u> bzw. <u>stauchen</u>:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Streckung um Faktor } \lambda \geq 1 \\ \text{Stauchung um Faktor } \lambda < 1\end{array}\right\} = \underline{\text{Skalarmultiplikation von } \vec{a} \text{ mit } \lambda}$$

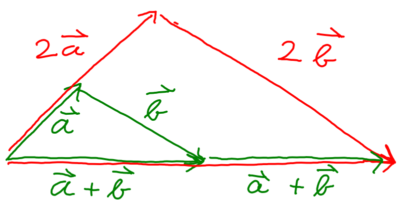



$$\left.\begin{array}{l}\text{Translation } \vec{a} \\ \text{Skalar } \underset{\text{reelle Zahl}}{\underset{\shortparallel}{\lambda}}\end{array}\right\} \longrightarrow \underline{\text{Translation } \lambda\vec{a}}$$

Geometrie impliziert folgende <u>Eigenschaften der Skalarmultipl.</u> für bel. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und bel. Translationen $\vec{a}, \vec{b}$:

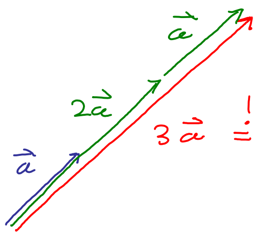
$$\boxed{\begin{array}{lll}(S1) & \lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \\ (S2) & (\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \\ (S3) & \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \\ (S4) & 1\vec{a} = \vec{a}\end{array}}$$

zu (S1):




$$2(\vec{a}+\vec{b}) \overset{!}{=} 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

zu (S2):




$$3\vec{a} \overset{!}{=} 2\vec{a} + 1\vec{a}$$

hieraus folgen weiterhin:

(S5) $\quad 0\vec{a} = \vec{0}$

(S6) $\quad (-1)\vec{a} = -\vec{a}$

für $\lambda < 0$ demnach $\quad \lambda\vec{a} = (|\lambda|(-1))\vec{a} = |\lambda|(-\vec{a})$ .

$\ulcorner$ zu (S5): $\quad 0\vec{a} = (0+0)\vec{a} \overset{(S2)}{=} 0\vec{a} + 0\vec{a}$ ; Addition des Inversen von $0\vec{a}$ führt dann auf $\vec{0} = 0\vec{a}$ .

zu (S6): $\quad \vec{0} \overset{(S5)}{=} 0\vec{a} = (1+(-1))\vec{a} \overset{(S2,S4)}{=} \vec{a} + (-1)\vec{a}$ , Addition von $-\vec{a}$ führt auf $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$ . $\lrcorner$

Fazit:

Addition mit Eigenschaften (A1-A4) (= Gruppeneigenschaften) und Skalarmultiplikation mit Eigenschaften (S1 - S4) sind eine formale Beschreibung dessen was wir anschaulich unter Translationen verstehen.

"Mehrwert":

mathematische Objekte, für die es Addition und Skalarmultiplikation mit obigen Eigenschaften gibt können wir uns (u.a.) als Translationen vorstellen und dadurch besser verstehen.

Beispiele:

- Lösungen von homogenen, linearen Gleichungssystemen
- Lösungen von homogenen, linearen (partiellen) Differenzialgleichungen

$\rightarrow$
- elektromagnetische Wellen
- Schwingungen eines mechanischen Systems / eines Moleküls

• Zustände eines quantenmechanischen Systems

Häufiges Auftreten der durch Addition (A1–A4) und Skalarmultiplikation (S1–S4) gegebenen Strukturen rechtfertigt Abstraktion im Begriff des Vektors bzw. Vektorraums:

Definition (Vektor, Vektorraum)

Eine Menge V von Objekten, für die eine Addition mit Eigenschaften A1 – A4 und eine Skalarmultiplikation mit Eigenschaften S1 – S4 gegeben ist, nennen wir einen (reellen) Vektorraum; ein Element aus V nennen wir Vektor.

Beispiele:

1) Translationen ✓

2) $$V = \mathbb{R}^n := \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

mit Addition und Skalarmultiplikation erklärt durch:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

3) Lösungen $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$ der Gleichungen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$$

mit Addition und Sk. Mul. wie unter 2)