Skalarprodukt, euklidischer Raum

Translationen besitzen <u>geometrische</u> Eigenschaften (<u>Länge</u> einer Transl., <u>Winkel</u> zwischen zwei Translationen) und genügen <u>euklidischer Geometrie</u> (z.B. dem Satz des Pythagoras: $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ dann

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$;

)

$\rightarrow$ Vektorraum der Translationen benötigt zusätzliche Struktur, damit diese geometrischen Eigenschaften erfasst und beschrieben werden können:

Skalarprodukt

$\rightarrow$ geometrische Begriffe (Länge, Orthogonalität, Winkel, s.u.)

$\rightarrow$ euklidische Geometrie

Definition

Ein <u>Skalarprodukt</u> eines reellen Vektorraums V ist eine Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{a}, \vec{b} \longmapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

mit den Eigenschaften

(SP1) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ (Symmetrie)

(SP2) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ für $\vec{a} \neq 0$ und $\langle \vec{o}, \vec{o} \rangle = 0$.
(Positivität)

(SP3) $\langle \vec{a}, \vec{b} + \lambda \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \lambda \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ (Linearität)

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt bildet einen <u>euklidischen Raum</u>.

alternative Notationen:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \vec{a}\vec{b} \equiv (\vec{a}, \vec{b}) \equiv \ldots$$

mittels Skalarprodukt definieren wir weiter:

<u>Länge</u> (auch: <u>Betrag</u>) eines Vektors $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

<u>Orthogonalität</u>:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad („\vec{a} \text{ orthogonal } \vec{b}") \quad :\Longleftrightarrow \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

<u>Richtungsvektor</u> $\hat{a}$ eines Vektors $\vec{a}$:

$$\hat{a} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

offenbar gilt:

- $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c} \longrightarrow \vec{a} + \vec{b} \perp \vec{c}, \; \lambda \vec{a} \perp \vec{c}$
- $|\lambda \vec{a}| = \lambda |\vec{a}|$
- $|\hat{a}| = 1$

obige Definitionen beinhalten z.B. auch den Satz des Pythagoras:

$\vec{a} \perp \vec{b}$ bedeutet $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ und somit für $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$:

$$|\vec{c}|^2 = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle$$
$$= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}_{=0} + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$$
$$= |a|^2 + |b|^2 .$$

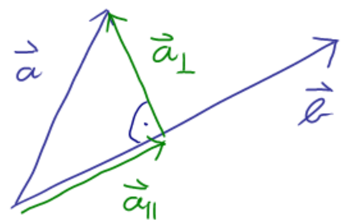
<u>Parallelität</u> benötigt <u>nicht</u> das Skalarprodukt:

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ („$\vec{a}$ parallel $\vec{b}$") $:\Longleftrightarrow$ $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$

oft benötigt:

<u>Parallel- und Orthogonalkomponente eines Vektors $\vec{a}$ bzgl $\vec{b}$</u>:

<u>geometrisch</u>:



$\vec{a}_\parallel$ und $\vec{a}_\perp$ sind bestimmt durch:

- $\vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp = \vec{a}$
- $\vec{a}_\parallel \parallel \vec{b}$
- $\vec{a}_\perp \perp \vec{b}$

<u>mittels Skalarprodukt</u>:

$$\boxed{\vec{a}_\parallel = \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \hat{b}} \qquad (*)$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel$$

denn damit offenbar $\vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} = \vec{a}$, $\vec{a}_{\parallel} \parallel \vec{b}$ und auch $\vec{a}_{\perp} \perp \vec{b}$, da

$$\langle \vec{a}_{\perp}, \hat{b} \rangle = \langle \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}, \hat{b} \rangle = \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle - \langle \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \hat{b}, \hat{b} \rangle$$

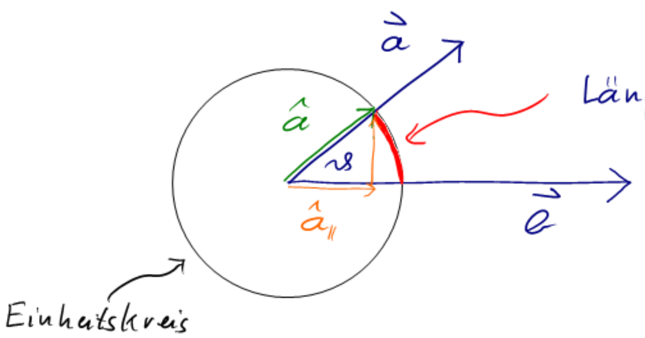
$$= \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle - \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \langle \hat{b}, \hat{b} \rangle = 0 .$$

[(*) kann auch als <u>geometrische Definition</u> des Skalarprodukts verstanden werden ...]

Zerlegung in $\vec{a}_{\perp}$ und $\vec{a}_{\parallel}$ zeigt auch:

$|\langle \vec{a}, \hat{b} \rangle|$ ist <u>die Länge der Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$</u>

$\rightarrow$ <u>Winkel zwischen Vektoren</u>



Länge des Bogens = Winkel ϑ im <u>Bogenmaß</u>

$$\boxed{\begin{aligned} |\hat{a}_{\parallel}| &= \cos\vartheta \\ |\hat{a}_{\perp}| &= \sin\vartheta \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ Winkel $\vartheta \in [0, \pi]$ ist definiert durch

$$\boxed{\cos\vartheta = \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}}$$

<u>Geometrie</u>: Projektion $|\langle \vec{a}, \hat{b} \rangle|$ ist nie größer als $|\vec{a}|$!

d.h. $\quad |\langle \vec{a}, \hat{b} \rangle| \leq |\vec{a}|$; Multiplikation mit $|\vec{b}|$ führt auf

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\boxed{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}||\vec{b}|}$$

⌈ formaler Beweis: Ungleichung $\iff$ $|\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle| \leq 1$;

setze $\vec{u} = \hat{a}$ und $\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$ bzgl. $\hat{b}$;

dann $1 = |\vec{u}|^2 = \langle \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}, \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp} \rangle = |\vec{u}_{\parallel}|^2 + \underbrace{|\vec{u}_{\perp}|^2}_{\geq 0}$

$\geq |\vec{u}_{\parallel}|^2 = \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle^2$

d.h. $1 \geq |\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle|$, womit die Ungleichung bewiesen ist. ⌋

Orthonormalbasis (ONB)

Eine Basis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ eines euklidischen VRs ist orthonormal g.d.w.

1) $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ für $i \neq j$

2) $|\vec{e}_i| = 1$

⌈ 1) und 2) ist äquivalent zu

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ 1 & : i = j \end{cases}$$

↑ Kronecker-Delta ⌋

$\rightarrow$ Skalarprodukt in Komponenten bzgl. einer ONB:

Ist B ONB und $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, dann

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{l=1}^{n} a_l b_l}$$; insbes. $|\vec{a}| = \left(\sum_{l=1}^{n} a_l^2\right)^{1/2}$. (vgl. Übg.)