
1. Übung zur Theoretischen Physik in zwei Semestern II

Wintersemester 2009/2010

Abgabe: *Mittwoch 21. Oktober, bis 14:30 in den Kasten vor dem Theoriesekretariat*

1. Komplexe Zahlen

Präsenzaufgabe, 0 Punkte

- a) Es seien $z = x + iy$ und $u = a + ib$ komplexe Zahlen (x, y, a, b reell). Bringen Sie folgende Ausdrücke auf die Form $\alpha + i\beta$, wobei α, β reell:

$$z^*z, \quad z + u, \quad zu, \quad z^*u, \quad zu^*, \quad \frac{1}{z}, \quad e^z, \quad \sin z.$$

- b) Vereinfachen Sie die Ausdrücke

$$e^{i\pi}, \quad e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad (e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{4}})^*, \quad e^{2\pi i}.$$

2. Zustandsvektoren

Präsenzaufgabe, 0 Punkte

Es seien ψ_1 und ψ_2 orthonormale Zustandsvektoren eines quantenmechanischen Systems. Zwei weitere Zustände seien durch

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\psi_1 + i\psi_2) \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_1 - i\sqrt{2}\psi_2)$$

gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass φ_1 und φ_2 ebenfalls orthonormale Zustandsvektoren sind.
b) Bestimmen Sie

$$\langle \varphi_1, \psi_2 \rangle, \quad \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle, \quad \langle \psi_1, \varphi_1 \rangle, \quad \|\varphi_1 + \varphi_2\|, \quad \|\varphi_1 + i\varphi_2\|.$$

- c) Eine Messung prüfe das Vorliegen des Zustands φ_1 . Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergibt die Messung ein positives Ergebnis, wenn sich das System in den Zuständen $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ befindet?

3. Grenzen der klassischen Mechanik

Präsenzaufgabe, 0 Punkte

Ein 1D Teilchen der Masse m werde zwischen zwei unendlich hohen Potenzialwänden hin- und her reflektiert. Der Abstand der Wände sei d , der konstante Betrag des Teilchenimpulses sei p . Für welche Abstände d ist mit nicht-klassischem Verhalten des Teilchens zu rechnen? Wie groß wären diese (i) für eine 1g schwere Murmel mit Geschwindigkeit $1m/s$, (ii) für ein Elektron mit kinetischer Energie von $0.1eV$? ($1eV \approx 1.6 \times 10^{-19}J$, $m_e \approx 10^{-30}kg$)

4. Zustandsvektoren und Messwahrscheinlichkeiten II 10 Punkte

Es seien ψ_1 und ψ_2 orthonormale Zustandsvektoren eines quantenmechanischen Systems. Zwei weitere Zustände seien durch

$$\varphi_1 = \cos(\alpha) \psi_1 + \sin(\alpha) \psi_2 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \sin(\alpha) \psi_1 - \cos(\alpha) \psi_2$$

gegeben, wobei $\alpha \in [0, 2\pi]$ ein fest gewählter Winkel sei.

- a) Zeigen Sie, dass φ_1 und φ_2 ebenfalls orthonormale Zustandsvektoren sind.
- b) Eine Messung prüfe das Vorliegen des Zustands φ_1 . Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergibt die Messung ein positives Ergebnis, wenn sich das System in den Zuständen $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ befindet?

5. Erweiterter Stern-Gerlach Versuch 10 Punkte

Betrachten Sie den Stern-Gerlach Versuch mit einer anderen Atomsorte. Die zu untersuchende Atomsorte habe die Eigenschaft, daß der Strahl im Stern-Gerlach-Magneten in *drei* Teilstrahlen aufgespalten werden, wieder einer in $+$ Richtung, einer in $-$ Richtung und zusätzlich einer, der auf die Magnetfelder gar nicht reagiert (0 -Richtung). Benutzt man die in der Vorlesung eingeführte Notation, so kann dieser Stern-Gerlach-Magnet repräsentiert werden wie in Abb.1.

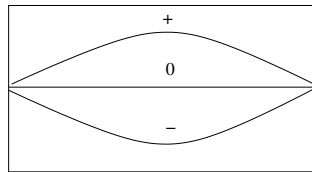


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Stern-Gerlach Magneten mit anderer Atomsorte

- a) Ist der Stern-Gerlach-Magnet in z -Richtung orientiert, ordnen wir den drei Teilstrahlen die Atomzustände ψ_+, ψ_- und ψ_0 zu. Mit welchen experimentellen Anordnungen von Stern-Gerlach-Magneten könnte man zeigen, daß diese Zustände paarweise orthogonal sind?
- b) Analog zur Vorlesung werden wieder drei Stern-Gerlach-Magnete hintereinander geschaltet. Die Aufspaltung des Strahls im ersten und letzten Magneten erfolgt entlang der z -Achse des Systems, die Aufspaltung im mittleren Magneten erfolgt entlang der x -Achse. In den folgenden drei Skizzen sind jeweils Teile des Strahls blockiert, wodurch die Anzahl der Teilchen, die den jeweiligen Versuchsteil passieren, abnimmt. Stellen Sie die in den Skizzen in Abb.2 definierten reellen Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ (alle ≥ 1) durch geeignete Skalarprodukte der Vektoren $\{\psi_+, \psi_-, \psi_0\}$ und $\{\varphi_+, \varphi_-, \varphi_0\}$ dar, wobei letztere den Teilstrahlen eines in x -Richtung orientierten Magneten entsprechen.

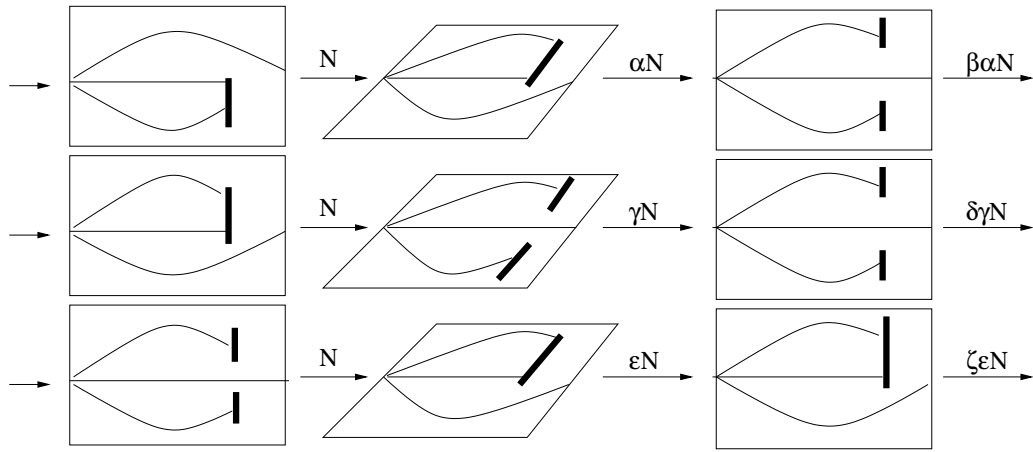


Abbildung 2: Skizzen zur Definition der sechs Koeffizienten

6. Zustand *eines* Atoms

10 Punkte

Angenommen, es stünde Ihnen ein *einziges* Silberatom zur Verfügung, und Sie wüssten, dass dieses Atom entweder im Zustand ψ_+ ($z+$ polarisiert) oder im Zustand φ_+ ($x+$ polarisiert) ist. Können Sie durch ein einziges Stern-Gerlach-Experiment mit Sicherheit entscheiden, in welchem Zustand sich das Atom vor dem Experiment befand? Hilft es Ihnen weiter, wenn Sie beliebig viele Stern-Gerlach-Experimente an dem Atom ausführen dürfen? Wie sieht es aus, wenn Sie statt einem nun 10 Silberatome bekommen, und sich diese 10 Atome entweder alle im Zustand ψ_- oder alle im Zustand φ_+ befinden?