
2. Übung zur Theoretischen Physik in zwei Semestern II

Wintersemester 2009/2010

Abgabe: *Mittwoch 28. Oktober*

7. Quantenmechanische Superposition

10 Punkte

Wir betrachten einen Strahl $x+$ polarisierter Silberatome. Der quantenmechanische Zustand φ_+ dieser Atome kann bekanntlich als Superposition $z+$ und $z-$ polarisierter Atome gemäß

$$\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ + \psi_-) \quad (1)$$

aufgefaßt werden. Jemand möchte diesen Zustand folgendermaßen interpretieren:

Die Atome befinden sich zufällig entweder im Zustand ψ_+ oder im Zustand ψ_- , jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. Von N Atomen sind daher im Mittel $N/2$ im Zustand ψ_+ , die restlichen im Zustand ψ_- , in Übereinstimmung mit den Resultaten einer μ_z -Messung.

Was ist Ihrer Meinung nach richtig oder falsch an dieser Interpretation?

8. Operatoren

10 Punkte

Beweisen Sie folgende Aussagen (z.T. analog zur Vorlesung):

a) A, B seien Operatoren und a eine komplexe Zahl. Es gelten die Beziehungen

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger, \quad (aB)^\dagger = a^* B^\dagger, \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.$$

b) Die Eigenwerte eines hermiteschen Operators sind reell.

c) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten eines hermiteschen Operators sind orthogonal.

d) Der Projektionsoperator P_φ (auf einen normierten Vektor φ) ist hermitesch und besitzt nur die Eigenwerte 0 und 1.

e) P_φ und P_ψ seien Projektionsoperatoren auf normierte Vektoren φ und ψ . Wenn $P_\varphi P_\psi = P_\psi P_\varphi$, dann entweder $\psi \perp \varphi$ oder $\psi = a\varphi$ mit $|a| = 1$.

9. Observable eines Zwei-Zustand-Systems

10 Punkte

Wir betrachten ein (nicht näher spezifiziertes) quantenmechanisches Zwei-Zustands-System mit orthonormalen Zuständen φ_1 und φ_2 . Eine Observable sei durch den Operator $A = a_1 P_{\varphi_1} + a_2 P_{\varphi_2}$ gegeben (a_1 und a_2 reell).

a) Welche Eigenwerte und Eigenvektoren besitzt A ?

b) Was sind die möglichen Messwerte der Observablen und bei welchen Zuständen werden sie mit Wahrscheinlichkeit $p = 1$ gemessen?

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von A bzgl. der Zustände

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad i\varphi_1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(\varphi_1 + \sqrt{2}\varphi_2).$$

10. Erwartungswert

10 Punkte

Eine Observable besitze die n möglichen Messwerte a_1, \dots, a_n , die an einem System im Zustand ψ mit Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_n gemessen werden. Die Observable werde durch einen geeigneten hermiteschen Operator A beschrieben. Zeigen Sie, ausgehend von der Definition des Erwartungswertes $\langle A \rangle_\psi = \sum_{i=1}^n p_i a_i$, dass

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle .$$