Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
A. Wolff, T. Zell

3. Übung zur Theoretischen Physik in zwei Semestern II

Wintersemester 2009/2010

Abgabe: *Mittwoch 4. November*

11. Erhaltungsgrößen *10 Punkte*

a) Was versteht man unter einer Erhaltungsgröße eines quantenmechanischen Systems?

b) Geben Sie ein hinreichendes und notwendigs Kriterium dafür an, dass die Observable A eine Erhaltungsgröße ist.

c) Ein quantenmechanisches System werde durch den Hamilton-Operator

$$H = iE(|\psi\rangle\langle\varphi| - |\varphi\rangle\langle\psi|)$$

beschrieben, wobei $|\psi\rangle$ und $|\varphi\rangle$ zwei orthonormale Zustände des Systems seien. E sei eine reelle Größe der Dimension Energie. Welche der folgenden Observablen sind Erhaltungsgrößen des Systems?

$$A_1 = a_1\,|\varphi\rangle\langle\varphi|\,,\quad A_2 = a_2\,|\psi\rangle\langle\psi|\,,\quad A_3 = ia_3(|\varphi\rangle\langle\psi|-|\psi\rangle\langle\varphi|),\quad A_4 = a_4(|\psi\rangle\langle\varphi|+|\varphi\rangle\langle\psi|)$$

($a_1, \ldots, a_4$ seien reelle Konstanten.)

d) Der Zustand $|\psi(t)\rangle$ folge der quantenmechanischen Zeitentwicklung gemäß obigen Hamilton-Operators. Zur Zeit $t = 0$ sei

$$\text{(i)}\ \ |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi\rangle + |\varphi\rangle)\,, \qquad \text{bzw. (ii)}\quad |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi\rangle + i\,|\varphi\rangle).$$

Bestimmten Sie für beide Fälle jeweils $\langle A_3\rangle_{\psi(t)}$ für Zeiten $t > 0$.

12. y-Komponente des magnetischen Dipolmoments *10 Punkte*

Neben den Zuständen $\psi_\pm$ und $\varphi_\pm$, die $z\pm$ polarisierte und $x\pm$ polarisierte Silberatome beschreiben, wollen wir nun auch die Zustände $\chi_\pm$ für $y\pm$ polarisierte Silberatome und die entsprechende Observable μ_y konstruieren. (x, y, z stehen für drei orthogonale Richtungen im Raum.)

a) Die Zustände $\chi_\pm$ können durch die Bedingungen

$$\langle\chi_+, \chi_-\rangle = 0\,, \quad |\langle\chi_m, \psi_n\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,, \quad |\langle\chi_m, \varphi_n\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,, \quad m, n = -, +\,,$$

charakterisiert werden. Begründen Sie diese Bedingungen physikalisch und zeigen Sie, dass sie durch die Zustände

$$\chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ \,+\, i\psi_-) \quad \text{und} \quad \chi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ \,-\, i\psi_-)$$

erfüllt werden.

b) Die Observable der y-Komponente des magnetischen Dipolmoments ist $\hat{\mu}_y = \mu_0(P_{\chi+} - P_{\chi-})$. Begründen Sie dies und bestimmen Sie die Erwartungswerte von μ_y bzgl. der Zustände

$$\chi_+ \,, \quad \psi_+ \,, \quad \varphi_- \,, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(i\psi_+ \,+\, \psi_-) \,.$$

13. Präzession im Magnetfeld

10 Punkte

Wir betrachten die Dynamik des magnetischen Dipolmoments eines Silberatoms in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = -B_0\hat{\mathbf{z}}$ (vgl. Vorlesung).

a) Wie lauten der Hamilton-Operator und die Schrödinger-Gleichung dieses Systems?

b) Wie entwickelt sich der Anfangszustand $\psi_0 = \alpha_+\psi_+ + \alpha_-\psi_-$ in der Zeit?

c) Bestimmen Sie für den Anfangszustand $\psi_0 = \varphi_+$ den Zustand $\psi(t)$ zur Zeit $t > 0$ und die Erwartungswerte von μ_x, μ_y und μ_z bzgl. $\psi(t)$: Zeigen Sie, dass

$$\langle \mu_x \rangle_{\psi(t)} = \mu \cos \omega t \,, \quad \langle \mu_y \rangle_{\psi(t)} = \mu \sin \omega t \,, \quad \langle \mu_z \rangle_{\psi(t)} = 0 \,:,$$

wobei $\omega = 2B_0\mu_0/\hbar$ die Lamor-Frequenz ist. Interpretieren Sie das Ergebnis.