Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
A. Wolff, T. Zell

4. Übung zur Theoretischen Physik in zwei Semestern II

Wintersemester 2009/2010

Abgabe: *Mittwoch 11. November,* **Klausur:** *Dienstag 1. Dezember, 10-12 Uhr*

14. Skalarprodukt *10 Punkte*

Zustände $|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle$ und $|\chi\rangle$ eines Teilchens in einer Dimension seien durch Wellenfunktionen

$$\psi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\,, \qquad \varphi(x) = \frac{e^{-\frac{(x-d)^2}{4\sigma^2}}}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\,, \qquad \chi(x) = e^{ikx}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}$$

gegeben. Die Konstanten σ und d haben die Dimension *Länge*, k die Dimension *1/Länge*.

a) Skizzieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten dieser Zustände für $\sigma = 1$, $d = 3\sigma$ und $k = 1/\sigma$.

b) Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\langle\psi|\psi\rangle$, $\langle\varphi|\psi\rangle$ und $\langle\chi|\psi\rangle$. Benutzen Sie dabei die Identität $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{b^2/4a}$, gültig für a reell positiv und b beliebig komplex.

Wir betrachten nun die Superposition $|\vartheta\rangle = \alpha(|\psi\rangle + |\chi\rangle)$, wobei α reell.

c) Bestimmen Sie die Norm von $|\vartheta\rangle$. Wie muss α gewählt werden, damit $|\vartheta\rangle$ normiert ist?

d) Welche Wellenfunktion besitzt der Zustand $|\vartheta\rangle$?

e) Skizieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte von $|\vartheta\rangle$ für $\alpha = 1/\sqrt{2}$, $\sigma = 1$, $k = 10/\sigma$ und vergleichen Sie diese mit $\frac{1}{2}(|\psi(x)|^2 + |\chi(x)|^2)$.

15. Orts- und Impulserwartungswert *10 Punkte*

Wir betrachten wieder die Zustände $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$ eines Teilchen in einer Dimension aus Aufgabe 14.

a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von Ort x und Impuls p bezüglich beider Zustände.

b) Bestimmen Sie nun auch die Erwartungswerte der quadrierten Observablen x^2 und p^2 für den Zustand $|\psi\rangle$. Diskutieren Sie die Abhängigkeit von σ. Was sagen diese Größen über den Ausgang von Orts- bzw. Impulsmessungen aus?

16. Kernspintomographie *10 Punkte*

In der Kernspintomographie werden, grob gesagt, Wasserstoffatome anhand des magnetischen Moments des Wasserstoffkerns, des *Kernspins* μ_N, detektiert. Wesentlich für die Funktionsweise des Tomographen sind neben einem sehr starken konstanten Magnetfeld $\mathbf{B}_0 = -B_0\hat{\mathbf{z}}$ ein schwaches, in der $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}$-Ebene rotierendes Wechselfeld $\mathbf{B}_1(t) = -B_1\cos(\tilde{\omega}t)\hat{\mathbf{x}} + B_1\sin(\tilde{\omega}t)\hat{\mathbf{y}}$. Der Effekt des Wechselfeldes $\mathbf{B}_1(t)$ auf den Zustand des Kernspins ist Gegenstand dieser Aufgabe.

a) Die quantenmechanische Beschreibung des Kernspins ist analog derjenigen des magnetischen Moments des Silberatoms im Stern-Gerlach-Experiment. D.h. wenn $|\psi_+\rangle$ und $|\psi_-\rangle$ $z+$ und $z-$ polarisierte Zustände des Kernspins beschreiben, dann sind $x+$ und $x-$ polarisierte Zustände durch $|\varphi_+\rangle = \frac{|\psi_+\rangle+|\psi_-\rangle}{\sqrt{2}}$ und $|\varphi_-\rangle = \frac{-|\psi_+\rangle+|\psi_-\rangle}{\sqrt{2}}$ gegeben, $y+$ und $y-$ polarisierte Zustände durch $|\chi_+\rangle = \frac{|\psi_+\rangle+i|\psi_-\rangle}{\sqrt{2}}$ und $|\chi_-\rangle = \frac{|\psi_+\rangle-i|\psi_-\rangle}{\sqrt{2}}$. Begründen Sie, dass die Observablen des magnetischen Moments in x, y und z Richtung durch folgende Operatoren gegeben sind:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}_x &= \mu_N(|\psi_-\rangle\langle\psi_+| + |\psi_+\rangle\langle\psi_-|)\,, \\
\hat{\mu}_y &= i\mu_N(|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|)\,, \\
\hat{\mu}_z &= \mu_N(|\psi_+\rangle\langle\psi_+| - |\psi_-\rangle\langle\psi_-|)\,.
\end{aligned}
$$

b) Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator $H = B_0\hat{\mu}_z + B_1\cos(\tilde{\omega}t)\hat{\mu}_x - B_1\sin(\tilde{\omega}t)\hat{\mu}_y$ in folgende Form gebracht werden kann:

$$H = B_0\hat{\mu}_z + \mu_N B_1(\,e^{-i\tilde{\omega}t}\,|\psi_+\rangle\langle\psi_-| \;+\; e^{+i\tilde{\omega}t}\,|\psi_-\rangle\langle\psi_+|\,)\,.$$

c) Verwenden Sie den Ansatz $|\psi(t)\rangle = \alpha_+(t)\,|\psi_+\rangle \;+\; \alpha_-(t)\,|\psi_-\rangle$ um zu zeigen, dass die Schrödinger-Gleichung für $|\psi(t)\rangle$ für die Koeffizienten $\alpha_+(t)$ und $\alpha_-(t)$ die Differentialgleichungen

$$\dot{\alpha}_+ = -i\frac{\omega}{2}\alpha_+ - i\frac{\omega_1}{2}e^{-i\tilde{\omega}t}\alpha_- \quad \text{und} \quad \dot{\alpha}_- = +i\frac{\omega}{2}\alpha_- - i\frac{\omega_1}{2}e^{+i\tilde{\omega}t}\alpha_+$$

impliziert. Hierbei ist $\omega = 2|B_0|\mu_N/\hbar$ die Larmor-Frequenz und $\omega_1 = 2|B_1|\mu_N/\hbar$.

d) Lösen Sie die Differentialgleichungen in c) für den Fall $\tilde{\omega} = \omega$ (Resonanz) mittels des Ansatzes

$$\alpha_+(t) = g(t)e^{-i\frac{\omega t}{2}} \quad \text{und} \quad \alpha_-(t) = f(t)e^{+i\frac{\omega t}{2}}\,.$$

(Einsetzen und nochmaliges Differenzieren führt auf die Ihnen bekannte DGL $\ddot{g} = -\frac{\omega_1^2}{4}g$.) Diskutieren Sie anhand der so bestimmbaren Koeffizientenfunktionen $\alpha_\pm(t)$ die Dynamik des Anfangzustandes $|\psi_0\rangle \equiv |\psi_-\rangle$. Welcher Zustand liegt zur Zeit $t_1 = \pi/\omega_1$ bzw. zur Zeit $t_2 = 2\pi/\omega_1$ vor?