Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

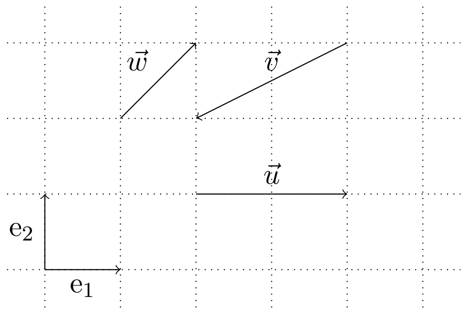
1 Verschiebungen in der Ebene (7 P) Die in der unten stehenden Abbildung gezeigten Pfeile repräsentieren Vektoren, die hier als Verschiebungen in der Ebene zu interpretieren sind.

a) (2 P) Skizzieren Sie folgende Linearkombinationen: $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$, $2\vec{w} + 3(\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w})$

b) (2 P) Bestimmen Sie die Komponenten $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ bezüglich des Basissystems $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$.

c) (2 P) Bestimmen Sie die Komponenten $\mathbf{e}_2$ von e_2 bezüglich des Basissystems $(\mathrm{e}_1, \vec{w})$.

d) (1 P) Warum ist $(\mathrm{e}_1, \vec{u})$ kein geeignetes Basissystem für alle Verschiebungen in der Ebene?



2 Komponenten eines Vektors bezüglich einer Basis (5 P) Gegeben seien zwei Basen $\mathcal{E} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ und $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ des dreidimensionalen Vektorraums V. Damit lässt sich jedes $\vec{v} \in V$ sowohl bezüglich $\mathcal{E}$ als auch bezüglich $\mathcal{F}$ darstellen:

$$\vec{v} = v_1\mathrm{e}_1 + v_2\mathrm{e}_2 + v_3\mathrm{e}_3 = \tilde{v}_1\vec{f}_1 + \tilde{v}_2\vec{f}_2 + \tilde{v}_3\vec{f}_3. \tag{1}$$

Die Wahl der Basis deuten wir in der Komponentenschreibweise mittels eines zusätzlichen obenstehenden Index an, d.h.

$$\mathbf{v}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{pmatrix}$$

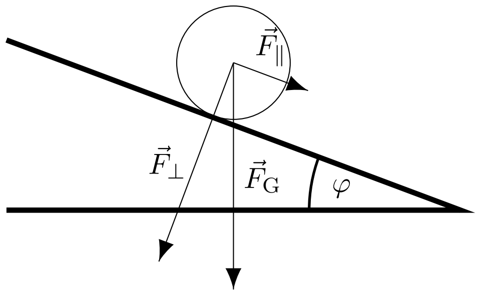
Für die Beziehung zwischen den beiden Basen gilt

$$\vec{f}_1 = 2\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_3, \quad \vec{f}_3 = -\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2.$$

a) (2 P) Geben Sie die Komponenten $\mathbf{e}_i^{\mathcal{E}}$ der Basisvektoren e_i $(i = 1, 2, 3)$ sowie die Komponenten $\mathbf{f}_i^{\mathcal{E}}$ der Basisvektoren $\vec{f}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$ an.

b) (3 P) Drücken Sie die Komponenten eines beliebigen Vektors $\mathbf{v}^{\mathcal{E}}$ mithilfe der Komponenten $\mathbf{v}^{\mathcal{F}}$ aus. Mit anderen Worten: angenommen Sie kennen die Komponenten $\tilde{v}_i$ in (1), finden Sie die zugehörigen Komponenten v_i.

3 Kräftezerlegung (5 P) Eine Kugel mit Masse m rollt eine geneigte Ebene mit Steigungswinkel φ hinab. Es wirkt die Gewichtskraft $F_\mathrm{G} = mg$, wobei g die Fallbeschleunigung bezeichnet (die Richtung der Gewichtskraft entnehmen Sie bitte der Skizze). Berechnen Sie daraus die Kraft $\vec{F}_\parallel$, die entlang der Bewegungsrichtung wirkt, und die Kraft $\vec{F}_\perp$, die senkrecht auf die Auflage wirkt.



4 Axiome des Vektorraums (10 P)

a) (5 P) Sei $\mathcal{F} = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\}$ die Menge der reellen Funktionen. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{F}, +, \times)$ einen Vektorraum bildet, wobei Addition und Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ für $f, g \in \mathcal{F}$ punktweise erklärt wird

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \times f)(x) = \lambda \times f(x). \tag{2}$$

b) (3 P) Die Menge der Polynome vom Grad n ist die Menge aller Funktionen, die sich als Summe der Potenzen $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$ der Variablen x mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ schreiben lassen,

$$\mathcal{P}_n = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}_n, +, \times)$ ein Untervektorraum[1] von $\mathcal{F}$ ist. Hierbei sind $+$ und $\times$ wie in (2) definiert.

c) (4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass die Funktionen $p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ $(k = 0, \ldots, n)$ eine Basis für $\mathcal{P}_n$ sind. Was schlussfolgern Sie für die Dimension von $\mathcal{P}_n$?

d) (2 P) Betrachte $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{P}_n$ mit $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$. Berechnen Sie explizit die Koeffizienten von $f + g$ und $\lambda \times f$ bezüglich der p_k.

5 Linearkombination und lineare Unabhängigkeit (8 P) Gegeben sind die Komponenten $\mathbf{x}$,... von Vektoren $\vec{x}$,... bezüglich einer Basis des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) (4 P) Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linear unabhängig sind und begründen Sie, ob diese eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) (4 P) Drücken Sie die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ jeweils als Linearkombination von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aus.

[1] Wir nennen $U \subset V$ einen *Untervektorraum* von V, wenn U den Nullvektor enthält und unter Addition und skalarar Multiplikation abgeschlossen ist. Eine Gerade durch den Ursprung der Ebene (als Vektorraum aufgefasst) ist bspw. ein Untervektorraum.