

---

## Vorkurs Physik: Übung 12

---

Sommersemester 2018

[www.thp.uni-koeln.de/~skleinbo/vorkurs18](http://www.thp.uni-koeln.de/~skleinbo/vorkurs18)

### 22. Monotonie und Ableitung

Sei  $I := ]a, b[$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und differenzierbare Funktion. Dann gilt

- a)  $(\forall t \in I : f'(t) = 0) \Leftrightarrow f$  ist konstant
- b)  $(\forall t \in I : f'(t) \geq 0) \Leftrightarrow f$  ist monoton wachsend
- c)  $(\forall t \in I : f'(t) > 0) \Rightarrow f$  ist streng monoton wachsend

Für monoton fallende Funktionen lassen sich b) und c) analog formulieren. Zeigen Sie jeweils zu a) und b) die „ $\Leftarrow$ “-Richtung und finden Sie zu c) ein Gegenbeispiel dafür, dass „ $\Leftarrow$ “ nicht gilt.

### 23. Kurvendiskussion

Untersuchen Sie folgende Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  für beliebiges  $a \in \mathbb{R}^+$  auf Nullstellen, Polstellen, Maxima, Wendepunkte und Asymptotik (d.h. das Fernverhalten von  $f$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ ). Fertigen Sie für  $a = 1$  eine Skizze der jeweiligen Graphen an.

- a)  $f(x) = 2x^4 - 8x^2$
- b)  $f(x) = x + \frac{a}{x}$
- c) Die Fermi-Funktion:  $f(x) = \frac{1}{e^{ax} + 1}$
- d) Die Bose-Funktion:  $f(x) = \frac{1}{e^{ax} - 1}$

### 24. Unbestimmte Integrale

Überprüfe die folgenden Gleichungen:

$$(1) \quad \int \frac{2dx}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$(2) \quad \int \ln(x)dx = x \ln(x) - x$$

## 25. Zusatzaufgabe: Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Die Definition des Grenzwertes (Aufgabe 7, 2. Übung) kann folgendermaßen auf Funktionen erweitert werden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \quad \text{falls für alle Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} x_n = x_0 \text{ gilt: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) = g$$

In Worten: Für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $x_0$  konvergiert, konvergiert die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  der Bilder gegen  $g$ .

Hiermit kann man nun die Stetigkeit definieren:

$$f \text{ stetig an der Stelle } x_0 \quad \iff \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

In Worten: Der Grenzwert der Funktion an der Stelle  $x_0$  stimmt mit dem Funktionswert überein.

a) Zeige für die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$ :

$$(i) : \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1, \quad (ii) : \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

b) Zeige, dass die in der Vorlesung eingeführte Heaviside'sche Sprungfunktion  $\Theta(x)$  bei  $x = 0$  nicht stetig ist.