Theoretische Mechanik

Alexander Altland

Bitte im Skript vorhandene Fehler – wahrscheinlich noch viele ! – an mich zurückmelden.

Inhaltsverzeichnis

Nev	Newton Mechanik 5					
1.1	Formale Grundlagen					
	1.1.1	Raum-Zeit	5			
	1.1.2	Galilei Transformationen	8			
1.2	Newto	on Axiome	10			
1.3	Analy	se der Newton Gesetze	16			
	1.3.1	Invarianzen und Symmetrien	16			
	1.3.2	Erhaltungssätze	19			
	1.3.3	Allgemeines zur Lösung	28			
1.4	Beispi	ele und Anwendungen	35			
	1.4.1	Zweikörper Zentralkraft Problem (allgemein)	35			
	1.4.2	Keplerproblem	42			
	1.4.3	Allgemeine Charakerisierung von Bewegungen (in Einer Di-				
		mension)	49			
	1.4.4	Kleine Schwingungen	53			
1.5	Kräfte	9	58			
	1.5.1	Geschwindigkeitsabhängige Kräfte	58			
	1.5.2	Zeitabhängige Kräfte	60			
	1.5.3	Zwangskräfte	61			
1.6	Zusam	nmenfassung	68			
Lag	range	Mechanik	69			
2.1	Ableit	ung I: d'Alembert'sches Prinzip	69			
	2.1.1	Formulierung des d'Alembert'schen Prinzips	71			
	2.1.2	Herleitung der Lagrange Gleichung	73			
2.2	Ableit	ung II: Variationsprinzipien	78			
	2.2.1	Exkurs über Variationsprinzipien	78			
	2.2.2	Hamilton'sches Extremalprinzip und Weitere Begriffsbildung.	85			
2.3	Über o	die Bedeutung des Hamiltonschen Extremalprinzips	87			
	2.3.1	Koordinateninvarianz der Lagrange Gleichungen	88			
2.4	Noeth	er Theorem	92			
<u></u>	11000011					
	New 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 Lag: 2.1 2.2 2.3 2.4	Newton N 1.1 Forma $1.1.1$ $1.1.1$ $1.1.2$ 1.2 1.2 Newton 1.3 Analy $1.3.1$ $1.3.2$ $1.3.3$ 1.4 $1.4.1$ $1.4.2$ $1.4.1$ $1.4.2$ $1.4.3$ $1.4.4$ 1.5 $1.5.1$ $1.5.2$ $1.5.3$ 1.6 ZusamLagrange 2.1 2.1 2.2 2.3 2.3 2.4 Noeth	Newton Mechanik 1.1 Formale Grundlagen 1.1.1 Raum-Zeit 1.1.2 Galilei Transformationen 1.1.2 Newton Axiome 1.2 Newton Axiome 1.3 Analyse der Newton Gesetze 1.3.1 Invarianzen und Symmetrien 1.3.2 Erhaltungssätze 1.3.3 Allgemeines zur Lösung 1.4 Beispiele und Anwendungen 1.4.1 Zweikörper Zentralkraft Problem (allgemein) 1.4.2 Keplerproblem 1.4.3 Allgemeine Charakerisierung von Bewegungen (in Einer Dimension) 1.4.3 Allgemeine Charakerisierung von Bewegungen (in Einer Dimension) 1.4.4 Kleine Schwingungen 1.5.1 Geschwindigkeitsabhängige Kräfte 1.5.2 Zeitabhängige Kräfte 1.5.3 Zwangskräfte 1.6 Zusammenfassung 2.1 Ableitung I: d'Alembert'sches Prinzip 2.1.1 Formulierung des d'Alembert'schen Prinzips 2.1.2 Herleitung der Lagrange Gleichung 2.2.1 Exkurs über Variationsprinzipien 2.2.2 Hamilton'sches Extremalprinzip und Weitere Begriffsbildung 2.3.1 Koordinateninvarianz der Lagrange Gleichungen 2.4 Neether Theorem			

INHALTSVERZEICHNIS

3	Der	Starre Körper	97
	3.1	Definition des Starren Körpers	97
	3.2	Bewegte Bezugssysteme	100
		3.2.1 Koordinatentransformationen	100
		3.2.2 Beschleunigungs-, Zentrifugal- und Corioliskräfte	104
	3.3	Lagrangefunktion des Starren Körpers	107
	3.4	Trägheitstensor und Eulergleichungen	109
		3.4.1 Analyse des Trägheitstensors	110
		3.4.2 Ableitung der Bewegungsgleichungen	113
	3.5	Schwerer Kreisel	115
		3.5.1 Lagrangefunktion des Schweren Kreisels	118
		3.5.2 Diskussion der Kreiselbewegung	122
	3.6	Zusammenfassung	126
4	Han	nilton Mechanik	129
	4.1	Hamilton Funktion und Hamilton Bewegungsgleichungen	130
		4.1.1 Herleitung der Hamilton Gleichungen	130
		4.1.2 Praktisches zum Übergang Lagrange \rightarrow Hamilton	134
	4.2	Formale Mechanik	137
		4.2.1 Struktur der Hamilton Gleichungen	138
		4.2.2 Symplektische Struktur des Phasenraums	141
		4.2.3 Poisson Klammern	143
		4.2.4 Variationsprinzip	146
		4.2.5 Kanonische Transformationen I: Definition	147
		4.2.6 Kanonische Transformationen II: Erzeugende	151
		4.2.7 Kanonische Transformationen III: Kriterien für Kanonizität	156
		4.2.8 Liouville'scher Satz	159
	4.3	Zusammenfassung	162
5	Stał	bilität und Chaos	165
	5.1	Beispiele Nichtintegrablen Verhaltens	166
		5.1.1 Das Henon-Heiles System	166
		5.1.2 Nichtintegrabilität im Sonnensystem	169
	5.2	Lineare Stabilitätstheorie	175
	5.3	Theorie von Hamilton-Jacobi	182
	5.4	Integrable Systeme	
	5.5	Winkel-Wirkungsvariable	190
		5.5.1 Winkel-Wirkungsvariable für Systeme mit $f = 1 \dots \dots \dots$	192
		5.5.2 Winkel-Wirkungsvariable für Systeme mit $f \ge 1$	195
	5.6	Störung Integrabler Systeme	200
		5.6.1 Störungstheorie \ldots	200
		5.6.2 KAM-Theorem \ldots	203
	5.7	Nichtintegrable Systeme	204
		5.7.1 Twist Maps \ldots	205
		5.7.2 Poincaré-Birkhoff Fixpunkt Theorem	207

4

Kapitel 1

Newton Mechanik

1.1 Formale Grundlagen

Wir beginnen dieses Kapitels mit der formalen Entwicklung der Newton'schen Mechanik. Der erste Schritt besteht in der Definition der 'Arena', in der sich die Mechanik abspielt, der Raum-Zeit und ihrer Gallilei'schen Struktur

1.1.1 Raum-Zeit

Grundlegend für den Aufbau der Mechanik ist die **Raum-Zeit**. Es handelt sich dabei um eine Menge $\mathcal{A}^4 \equiv \mathcal{T} \times \mathcal{A}^3$, die dem raum-zeitlichen Kontinuum unserer Anschauung entspricht. Man bezeichnet die Elemente $a \in \mathcal{A}$ als **Weltpunkte** oder **Ereignisse**. Ein Ereignis $a = (s, \mathbf{a})$ ist durch eine zeitliche Komponente s und eine räumliche Komponente **a** festgelegt. (Notation: Wir bezeichnen die raumartige Komponente eines Ereignisses a in Fettdruck, **a**.) Die Schreibweise $\mathcal{A}^4 = \mathcal{T} \times \mathcal{A}^3$ suggeriert, daß die Aufspaltung in Raum, \mathcal{A}^3 , und Zeit, \mathcal{T} , in der klassischen Mechanik *absolut* ist. Über diese Faktorisierung hinaus hat die Raum-Zeit aber noch viel mehr Struktur: Es handelt sich bei \mathcal{A}^4 nicht um irgendeine Menge von Punkten sondern um einen 4 = 1 + 3 dimensionalen Raum mit einer affinen Struktur. (Die Faktoren \mathcal{A}^3 und \mathcal{T} ihrerseits sind affine Räume der Dimension drei und eins.)

Info: Ein affiner Raum \mathcal{A} ist ein Tripel bestehend aus (i) einer Menge, die ebenfalls mit \mathcal{A} bezeichnet werden soll und deren Elemente Punkte genannt werden, (ii) einem Vektorraum V und (iii) einer Verknüfung $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, die folgende Eigenschaften hat:

- 1. Zu je zwei Punkten $a, b \in \mathcal{A}$ gibt es genau einen Vektor $v \in V$, derart daß a + v = b.
- 2. Für $a \in \mathcal{A}$ und $v, w \in V$ gilt (a + v) + w = a + (v + w).

Punkt 1. besagt, daß je zwei Punkte $a, b \in \mathcal{A}$ über einen Vektor $v \in V$ eindeutig miteinander verknüpft sind. Man bezeichnet diesen Vektor auch als v = b - a. (Punkte eines affinen Raumes können subtrahiert aber *nicht* addiert werden.) Sobald man einen Punkt $o \in \mathcal{A}$ als Referenzpunkt auszeichnet, wird der Vektorraum V mit dem affinen Raum \mathcal{A} indentisch. Jedes andere Element $a \in \mathcal{A}$ läßt sich dann nämlich in eindeutiger Weise als a = o + v mit einem $v \in V$ darstellen. Punkt 2. beinhaltet, daß die Addition in \mathcal{A} mit der Vektoraddition in V'verträglich' ist. Grob gesprochen kann man also sagen, daß ein affiner Raum äquivalent ist zu einem Vektorraum, mit der Ausnahme, daß kein Punkt eine ausgezeichnete Rolle spielt. (In einem Vektorraum spielt der Nullvektor eine ausgezeichnete Rolle.)

Die Affinität der Raum-Zeit bedeutet, (i) daß man für je zwei Punkte $a, b \in \mathcal{A}^4$, die Differenz $a - b \equiv v$ bilden kann, wobei $v \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ein Vektor aus dem vierdimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^4 ist. Die Aufspaltung des \mathbb{R}^4 in zwei Komponenten ist durch die raum-zeitliche Aufspaltung von \mathcal{A}^4 induziert. (ii) Läßt sich bei fester Wahl eines **Ursprungs** $o \in \mathcal{A}^4$ jeder Punkt $a \in \mathcal{A}^4$ in eindeutiger Weise als a = o+vmit einem $v \in \mathbb{R}^4$ darstellen. In Worten: Nach Wahl eines Ursprungspunkts ist die Raumzeit mit dem Vektorraum \mathbb{R}^4 identifizierbar. Zum Beispiel könnten sie sich entscheiden, alle Zeiten in Bezug auf diesen Moment und alle Orte in Bezug auf ihren momentanen Aufenthaltsort zu messen. Damit können sie jedes andere Ereignis in Raum und Zeit über seine zeitliche und räumliche Differenz zu 'ihrem' Ursprungspunkt festlegen. Es ist wichtig, sich in Erinnnerung zu behalten, daß die vorherige Wahl eines Ursprungspunkt hierbei wesentlich ist; In der Raum-Zeit gibt es kein absolutes Bezugssystem, alle Punkte sind 'gleichberechtigt'.



Abbildung 1.1: Zur Struktur der Raum-Zeit. Bei a und b handelt es sich um gleichzeitige Ereignisse.

Als ein weiteres Strukturelement der Raum-Zeit führen wir den Begriff des Abstands ein. Wir alle sind es gewöhnt, Ereignisse über ihren räumlichen und zeitlichen Abstand zueinander zu charakterisieren. Im folgenden wollen wir diesen Begriff präzisieren und mit der oben eingeführeten affinen Struktur in Verbindung bringen.

▷ Für zwei Ereignisse $a = (s, \mathbf{a})$ und $a' = (s', \mathbf{a}')$ bezeichnet man $t \equiv s - s' \in \mathbb{R}$ als die **Zeit** die zwischen ihnen vergangen ist. Zwei Ereignisse (s, \mathbf{a}) und (s, \mathbf{a}') mit t = 0 heißen gleichzeitig (vgl. Fig. 1.1).

1.1. FORMALE GRUNDLAGEN

▷ Die Menge aller Ereignisse, die zu einem Referenzereignis gleichzeitig ist, ist in natürlicher Weise zu \mathcal{A}^3 , also der räumlichen Komponente der Raum-Zeit, isomorph. Für zwei solche Ereignisse, $(s, \mathbf{a}), (s, \mathbf{a}')$ ist $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{a}' \in \mathbb{R}^3$ ein dreikomponentiger Vektor. Wir bezeichnen

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \sqrt{\langle \mathbf{a} - \mathbf{a}', \mathbf{a} - \mathbf{a}' \rangle},$$

als den **Abstand** zwischen den Ereginissen, wobei $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \equiv \sum_{i=1}^{3} v_i w_i$ das Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^3 ist.

Beachten sie, daß der Begriff des Abstands nur für gleichzeitige Ereignisse erklärt ist. Von einem Abstand zwischen zwei ungleichzeitigen Ereignissen zu sprechen macht keinen Sinn.

Den mit dem oben eingeführten Zeit- und Abstandsbegriff ausgestatteten Raum \mathcal{A}^4 bezeichen wir als **Galilei'schen Raum**.



Abbildung 1.2: Zur Definition von Koordinatensystemen.

Um effizient mit der Galilei Raum-Zeit arbeiten zu können, führen wir noch den Begriff des **Koordinatensystems** ein. Ein für unsere Zwecke geeignetes Koordinatensystem läßt sich folgendermaßen konstruieren.

- 1. Wir zeichnen einen Punkt $o \in \mathcal{A}^4$ als Ursprung aus.
- 2. Im dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 , der den zu *o* gleichzeitigen Ereignisse entspricht, führen wir ein Basissystem orthonormaler Vektoren $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ein (vgl. Fig. 1.2, wo wir mangels darstellbarer Dimensionen den Raum zweidimensional gezeichnet haben.) Man kann sich die Zeit formal über einen vierten Einheitsvektor \mathbf{e}_0 erzeugt denken.
- 3. Damit ist jeder Punkt der Raum-Zeit als

$$a = o + t\mathbf{e}_0 + \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$$

darstellbar.

Bei vorgegebener Wahl eines Ursprungs und eines raumartigen Koordinatensystems können wir jeden Punkt der Raum-Zeit also über einen Koordinatenvektor

$$a \leftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

identifizieren. Der sprachlichen Effizienz halber werden wir im folgenden nicht immer explizit zwischen Koordinatenvektoren und den ihnen zugeordenten Punkten unterscheiden. Falls einmal Verwirrung entstehen sollte, ist es gut, sich die in diesem Abschnitt entwickelten Zusammenhänge noch einmal zu vergegenwärtigen.

1.1.2 Galilei Transformationen

Die Galilei Raum-Zeit spielt in der Entwicklung der klassischen Mechanik eine immens wichtige Rolle. Die bald einzuführenden Newton Gesetze werden sich ohne Rückgriff auf diese Struktur nicht vernünftig erklären lassen. Eine Frage, mit der wir immer wieder konfrontiert werden sein ist folgende: Gegeben einen Galilei Raum A^4 ; was ist die maximale Menge von Transformationen, d.h. affiner Abbildungen

$$g: \mathcal{A}^4 \to \mathcal{A}^4$$
$$a \mapsto g(a) \equiv b = (u, \mathbf{b}),$$

die seine Struktur invariant lassen?

Info: Eine Abbildung

$$g: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

 $a \mapsto g(a)$

eines affinen Raumes \mathcal{A} in sich heißt **affine Abbildung**, wenn es in dem \mathcal{A} zugeordneten Vektorraum eine lineare Abbildung $X : V \to V$ mit folgender Eigenschaft gibt:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} : g(a) - g(b) = X(a - b).$$

Setzen wir speziell b = o (o: Ursprungspunkt), so folgt

$$g(a) = g(o) + Xv_{a}$$

, wobei v = a - o der *a* zugeordnete Vektor ist. Affine Abbildungen sind also in gewisser Weise die natürliche Verallgemeinerung linearer Abbildungen auf affine Strukturen; Bis auf eine Translation (der Beitrag g(o) auf der rechten Seite) ist eine affine Abbildung durch eine lineare Abbildung festgelegt.

'Invariant' heißt hierbei, daß sich der zeitliche Abstand zwischen zwei Ereignissen unter der Transformation nicht ändert, t - t' = u - u' und daß der Abstand zwischen gleichzeitigen Ereignissen invariant bleibt $\rho(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = \rho(\mathbf{b} - \mathbf{b}')$. Abbildungen mit dieser Eigenschaft heißen **Galilei Transformationen**

1.1. FORMALE GRUNDLAGEN



Abbildung 1.3: Galilei Transformation: Links: Translation, Mitte: Rotation, Rechts: gleichförmige Bewegung. Oben: Aktives Bild; Unten: Passives Bild

Um Beispiele von Galilei Tranformationen zu formulieren, denken wir uns ein Koordinatensysstem gewählt, d.h. jeder Punkt ist über seinen Koordinatenvektor $x = (t, \mathbf{x})$ identifiziert. Drei verschiedene Typen von Galilei Transformationen lassen sich nun ohne weiteres angeben (vgl. Fig. 1.3, oben):

1. **Translation**: Die Raum-Zeit Koordinaten jedes Punktes werden um einen festen Vektor verschoben:

$$g_1 : \mathcal{A}^4 \quad \to \quad \mathcal{A}^4,$$

(t, **x**) $\mapsto \quad (t + u, \mathbf{x} + \mathbf{v})$

2. Rotation des Raumes: Die Raumkomponente jedes Punktes wird um einen Ursprungspunkt rotiert:

$$g_2: \mathcal{A}^4 \quad \to \quad \mathcal{A}^4,$$
$$(t, \mathbf{x}) \quad \mapsto \quad (t, R\mathbf{x}),$$

wobei R eine Drehung der räumlichen Komponente beschreibt. Genauer gesagt bezeichnet $R \in SO(3)$ eine dreidimensionale Drehmatrix, d.h. eine 3×3 Matrix mit den Eigenschaften $R^T R = 1_3$ und det R = 1. (SO(3) ist die dreidimensionale spezielle orthogonale Gruppe, also die Gruppe aller Matrizen O, mit $O^T O = 1_3$ und det O = 1.) Beachten sie, daß in der Definition dieser Transformation die Wahl des Ursprungspunktes **o** wesentlich ist: Wenn man von einer Drehung des Raumes aller Punkte spricht, muß man immer mit angeben umwelchen Punkt gedreht wird. 3. Gleichförmige Bewegung: Die Raum-Zeit Koordinaten jedes Punktes werden gemäß

$$\begin{array}{rccc} g_3: \mathcal{A}^4 & \to & \mathcal{A}^4, \\ (t, \mathbf{x}) & \mapsto & (t, \mathbf{x} + \mathbf{v}t) \end{array}$$

transformiert.

Jede dieser Abbildungen erfüllt die oben ausgesprochenen Bedingungen. Das gleiche gilt für Abbildungen, die durch Hintereinanderschaltung von g_1, \ldots, g_3 entstehen, z.B. $g_1 \circ g_3$, u.s.w. Etwas weniger trivial sind die folgenden zwei Aussagen: (i) Die Menge der Abbildungen der Struktur g_1, g_2, g_3 bildet eine Gruppe. Sie heißt **Galilei Gruppe**. (ii) Jede Galilei Transformation ist in der Galilei Gruppe enthalten

Aufgabe: Welche anderen (außer 2.)) der oben angegebenen Galilei Transformationen erfordern die Wahl eines Koordinatenursprungs. Formulieren sie die Transformationen ohne expliziten Bezug auf ein Koordinatensystem.

Aufgabe: Rekapitulieren Sie die Definition einer Gruppe. Verifizieren Sie, daß die Menge der Abbildungen vom Typ g_1, g_2, g_3 eine Gruppe bildet. Wieviele freie Parameter hat die Galilei Gruppe?

Aufgabe: Beweisen sie die Aussage (ii).

Die oben aufgeführten Abbildungen bilden jeden Punkt des Raumes auf einen anderen Punkt ab. Die Abbildung ist über ihre Koordinatendarstellung identifiziert. Man bezeichnet diese Interpretation von Galilei Transformationen als die **aktive Interpretation**. Der Grund der Wortwahl liegt darin, daß es – wie bei jeder affinen Abbildung – noch eine zweite, die sogenannte **passive Interpretation** der Galilei Transformation gibt. In diesem zweiten Bild denkt man sich die Punkte des Raumes als *fest*. Lediglich ihre Koordinaten ändern sich (vgl. Fig. 1.3, untere Reihe). M.a.W. die Galilei Transformation beschreibt den Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen. Unter einer allgemeinen Galilei Transformation können sich der Ursprung eines Koordinatensystems und die Basis seines raumartigen Anteils ändern. Aufgrund der Tatsache, daß in der Raumzeit kein Punkt ausgezeichnet ist, sind beide Bilder einander äquivalent.

Aufgabe: Machen Sie sich diesen letzten Sachverhalt anschaulich klar!

1.2 Newton Axiome

Das Grundproblem der klassischen Mechanik ist die Beschreibung der Bewegung von Körpern (genauer: Massenverteilungen) in der oben eingeführten Raumzeit. Newtons

1.2. NEWTON AXIOME

große Leistung war, ein konzises System von nur drei Gesetzen aufgestellt zu haben, die dieses Problem, im Prinzip, vollständig lösen. Ihrer Schönheit wegen, formulieren wir die Newton Gesetze (genauer sollte man sagen, die **Newton Axiome**) in ihrer Originalform:

Lex Prima: Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

Lex Secunda: Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Lex Tertia: Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich; oder: die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Wenn man diese zum ersten Mal liest, wirken sie vielleicht nicht sonderlich erhellend. Das liegt zu einem guten Teil daran, daß (i) Begriffe auftauchen, deren Bedeutung noch nicht klar gefasst ist (Was ist mit 'Kraft', 'Wirkung' u.s.w. gemeint?) und (ii) der Tatsache, daß die Gesetze, dem Gebrauch früherer Zeiten entsprechend, in Worten statt in Formeln abgefasst sind. Im folgenden wollen wir die Gesetze so aufbereiten, daß sie für den alltäglichen Gebrauch tauglich werden. Wir beginnen mit einer Begriffsklärung und nutzen die Gelegenheit, gleich noch einige Termini einzuführen, die zwar nicht in den Gesetzen selbst auftauchen, aber zu ihrer Interpretation benötigt werden.

Als einen **Körper** bezeichnen wir zunächst ein punktförmiges Objekt, dem wir eine **Masse** m zuweisen. (Bemerken Sie, daß wir einen Begriff auf den anderen abwälzen, denn was ist die Masse? Zur Klärung dieser Problematik, siehe unten.) Zu jedem Zeitpunkt s, ist die Position des Körpers durch einen Punkt $a = (s, \mathbf{a})$ in der Raumzeit bestimmt.

Info: Auf den ersten Blick mag die Punkt-Idealisierung akademisch annuten; welcher interessante Körper ist schon punktförmig? Tatsächlich ist diese Restriktion, die wir im übrigen später aufheben werden, nicht so einschränkend wie es zunächst scheint. Das liegt an folgendem Sachverhalt, den wir hier nur zitieren, später aber beweisen werden: (i) Jedem ausgedehnten Körper der Gesamtmasse m lässt sich in eindeutiger Weise ein Schwerpunkt a zuordnen. (ii) Bei Anwesenheit äußerer Kräfte, bewegt sich der Schwerpunkt des Körpers so, wie es ein mit dem Schwerpunkt zusammenfallendes *punktförmiges* Objekt der Gesamtmasse m täte.

Die **Bewegung** des Körpers ist durch eine Kurve im dreidimensionalen affinen Raum \mathcal{A}^3

 $\begin{array}{rccc} \mathcal{T} & \to & \mathcal{A}^3 \\ s & \mapsto & \mathbf{a}(s), \end{array}$



Abbildung 1.4: Bewegung eines Punktes in kartesischen Koordinaten dargestellt. Das hier auftretende Symbol \mathbf{a} bezeichnet den Beschleunigungsvektor und hat nichts mit den (gleichfalls mit \mathbf{a} bezeichneten) affinen Raumpunkten zu tun.

beschrieben, die jeder Zeit *s* den instantanen Raumpunkt des Körpers zuweist. Alternativ können wir uns die Bewegung als eine 'Linie' von Weltpunkten $\{a = (s, \mathbf{a}(s)) | s \in \mathcal{T}\}$ in der Raum-Zeit, eine sogenannte **Weltlinie** vorstellen. Es ist bei diesen Definitionen wichtig, sich folgendes klarzumachen.

▷ Eine Kurve ist ein geometrisches Objekt, daß unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems existiert. Um die Kurve konkret zu *beschreiben*, werden wir i.d.R. ein System von Koordinaten verwenden, d.h. wir werden einen Ursprung $o \in \mathcal{A}^4$ in der Raum-Zeit festlegen und jeden Punkt $a = (s, \mathbf{a}) \leftrightarrow (t, \mathbf{x})$ mit seinem Koordinatenvektor identifizieren. In Koordinaten hat die Bewegung dann die Darstellung (vgl. Fig. 1.4)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \mathbf{x}(t). \end{array}$$

Man muß sich hierbei in Erinnerung halten, daß die Koordinatenwahl willkürlich ist und – bei gleichbleibender Kurve – wechseln kann. Insbesondere ist es nicht immer zweckmäßig, sich auf kartesische Koordinaten zu beschränken. Gegeben, z.B. die in kartesischen Koordinaten beschriebene kreisförmige Bewegung

$$\mathbf{x}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), 0)$$

können wir zu einer sphärischen Polarkoordinatendarstellung übergehen (vgl. Fig. 1.5), in der jeder Punkt über ein Koordinatentripel (r, θ, ϕ)

$$\mathbf{x}(t) \leftrightarrow (r(t), \theta(t), \phi(t)) = (R, \pi/2, \omega t)$$

charakterisiert ist: gleiches Objekt, unterschiedliche Beschreibung. (Wir verwenden das Symbol ' \leftrightarrow ', um hervorzuheben, daß es sich bei dem Koordinatentripel rechts *nicht* um einen Vektor handelt; es macht keinen Sinn, solche

1.2. NEWTON AXIOME

Objekte komponentenweise zu addieren. (Falls Sie unsicher sind, rekapitulieren Sie die Darstellung des \mathbb{R}^3 in Polarkoordinaten.) Vielmehr ist ein allgemeiner Vektor in Polarkoordinaten durch

$$\mathbf{x} = r\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_1 + r\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_2 + r\cos\phi\mathbf{e}_3$$

gegeben.)



Abbildung 1.5: Zur Darstellung des Ortsraums mittels Polarkoordinaten.

Als die **Geschwindigkeit** (genauer den Geschwindigkeitsvektor) bezeichnen wir die Größe

$$\mathbf{v}(t) \equiv d_t \mathbf{r}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t),$$

als **Beschleunigung**

$$\mathbf{a}(t) \equiv d_t \mathbf{v}(t) \equiv \dot{\mathbf{v}}(t).$$

(Notation: Mit d_t bezeichnen wir die gewöhnliche Ableitung, $d_t \equiv d/dt$. Die zweite Ableitung ist mit d_t^2 bezeichnet u.s.w. Beachten Sie auch, daß sowohl Raumpunkte als auch die Beschleunigung mit 'a' gekennzeichnet sind; aus dem jeweiligen Kontext wird klar, welche Größe gemeint ist.)

Schließlich die **Kraft**: Die Newton Axiomen besagen, daß es sich dabei um eine Größe handelt, der sich an jedem Raumpunkt eine Richtung und eine Größe zuordnen läßt, um ein Vektorfeld **F**, also. Es wird weiter gesagt, wie sich ein Körper bei Anwesenheit von Kräften bewegt und welcher Art die Kraft ist, die Körper aufeinander ausüben. An dieser Stelle ist es zentral wichtig, sich klarzumachen, daß es sich um Axiome handelt: Es ist nicht möglich, diese Aussagen aus tiefer liegenden Prinzipien abzuleiten. Gleichfalls können die Begriffe 'Kraft' und 'Masse' nicht aus noch grundlegenderen Konzepten erzeugt werden. Die Newton Axiome stellen einen 'Anfangspunkt' dar, durch den diese Begriffe vielmehr *definiert* sind. Es ist jedoch durchaus möglich, die oben eingeführten Begriffsdefinitionen zu verwenden, um die Newton Axiome in eine konzise Formelsprache zu gießen.

Wir gehen dazu zunächst von einer idealisierten Situation aus, wo wir N Körper der Masse m_i an Punkten \mathbf{b}_i , i = 1, ..., N in einer ansonsten leeren und kräftefreien



Abbildung 1.6: Zur Formulierung der Newton Axiome, Erklärung siehe Text

Raumzeit vorgegeben haben. Solche Systeme werden wir von jetzt ab als Systeme von N Teilchen bezeichnen. Die Newton Axiome besagen nun, daß

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij},\tag{1.1}$$

wobe
i \mathbf{F}_{ij} die vom Körperjauf den Körpe
rjausgeübte Kraft ist¹. Diese Kraft hat folgende Eigenschaften

- 1. Der Vektor $\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i)$ ist parallel zu $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j$ (vgl. Fig. 1.6, links).
- 2. $\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i) = -\mathbf{F}_{ji}(\mathbf{r}_j).$
- 3. Im Prinzip ist es denkbar, daß die bei \mathbf{r}_i wirkende Kraft $\mathbf{F}_i \equiv \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$ von Lagekoordinaten und Geschwindigkeiten aller Punkte abhängt: $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i; \{\mathbf{r}_j, \dot{\mathbf{r}}_j\})$. Da in der Raum-Zeit kein Punkt ausgezeichnet ist, besteht der allgemeinst mögliche funktionale Zusammenhang jedoch in einer Abhängigkeit von den *Differenzen* der Lagekoordinaten der Punkte sowie, im allgemeinsten Fall, von den Differenzen der Geschwindigkeitsvektoren abhängen: $\mathbf{F}_{ij}(\{\mathbf{r}_l \mathbf{r}_m, \dot{\mathbf{r}}_l \dot{\mathbf{r}}_m\})^2$.

Das oben vorgegebene Szenario einer bis auf N Massenpunkte leeren Raum-Zeit ist hoch idealisiert. In realiter hat man es dagegen oft mit Situationen zu tun, in denen eine *äußere* Kraft F auf einen Körper der Masse m bei \mathbf{x} wirkt. Die Kraft kann von Lage und Geschwindigkeit des Körpers abhängen. (Damit ist die oben diskutierte Situation mit erfasst: Man kann die Kraft $\mathbf{F}_i \equiv \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$ als auf das Teilchen iwirkende äußere Kraft deuten, vgl. Fig. 1.6 rechts.) Die Newton Axiome sagen aus, daß sie die Bewegung des Körpers gemäß

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \tag{1.2}$$

¹Im Prinzip ist dies nicht die allgemeinst mögliche Form einer mit den Newton Axiomen verträglichen Kraft. Anstelle reiner Paarkräfte, \mathbf{F}_{ij} könnte man ein System von Kräften $\mathbf{F}_{i_1;i_2,...,i_N}$ betrachten, bei dem die auf die *i*-te Teilchen wirkende Kraft von der Lage aller anderen Teilchen abhängt. Da die in der Natur auftretenden fundamentalen Kräfte aber von Paarkraft-Typ sind, wollen wir auf diese Komplikation nicht weiter eingehen.

²Daß die Kräfte nicht von den *Beschleunigungen* der Körper abhängen, ist Teil der Newton Axiomatik (wenn auch nicht explizit in den Gesetzen ausgesprochen) und kann nicht 'bewiesen'werden.

1.2. NEWTON AXIOME

beeinflußt. Es ist hierbei zweitrangig, oft sogar unbekannt, wodurch diese Kraft verursacht wird. Die Formeln (1.1) und (1.2) bilden die formale Implementierung der Newton Gesetze. Einige Erklärungen zu diesen Gleichungen und ihrem Zusammenhang mit der Text-Formulierung zu Anfang des Abschnitts:

- \triangleright Bei Abwesenheit von Kräften gilt $\mathbf{a} = 0$. Die Geschwindigkeit eines Körpers ist dann konstant. Bewegungen mit dieser Eigenschaft heißen gleichförmig (Lex Prima).
- ▷ Die 'Änderung der Bewegung' ist durch den Beschleunigungsvektor gegeben. Daß er parallel zur Summe aller wirkenden Kräfte ist, is der Inhalt von Lex Secunda.
- $\triangleright \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ implementiert Lex Tertia.
- ▷ Besonders wichtig: Lex Secund und Tertia *definieren* die Begriffe Kraft und Masse: Betrachten Sie (1.1) für den Fall eines 2-Körpersystems. Aus $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ (Lex Tertia) folgt

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = -m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}_2|}{|\ddot{\mathbf{r}}_1|}$$

Durch Messung der Beschleunigung der beiden Körper ist ihr Massen*verhältnis* festgelegt. Definiere ich die Masse m_1 als Referenzmasse, lassen sich so, im Prinzip, alle anderen Massen eindeutig festlegen. Nehmen wir an, wir hätten auf diese Weise die Masse eines Testkörpers zu m_t festgelegt. Eine beliebige auf diesen Körper wirkende Kraft läßt sich nun dadurch bestimmen, daß man die Beschleunigung des Testkörpers mißt. Aus m_t (bekannt) und $\ddot{\mathbf{r}}$ (auch bekannt) folgt ja $\mathbf{F} = m_t \ddot{\mathbf{r}}$ (Lex Prima) eindeutig. Beachten Sie, daß die Festlegung der Begriffe Kraft und Masse wesentlich beide Gesetze, Lex Secunda und Tertia beinhaltet.

Die so formulierten Axiome bilden eine im Prinzip vollständige Antwort auf das oben ausgesprochene Grundproblematik der klassischen Mechanik und wir könnten, zumindest vom Standpunkt des mehr philosophisch orientierten Wissenschaftlers aus, die Vorlesung an dieser Stelle beschließen. Der gesamte Rest, der noch folgen wird, besteht eigentlich 'nur noch' in der Interpretation und Anwendung der Newton Gesetze.

Um zu einem guten Verständnis eines Satzes von Bewegungsgleichungen in der Physik zu gelangen – nicht notwendigerweise der Newton, sondern z.B. auch der Maxwell Gleichungen, der Schrödinger Gleichung u.s.w. – ist es immer eine gute Idee sich zunächst einen Überblick über ihre Symmetrien, Invarianzeigenschaften und Erhaltungsgrößen zu verschaffen. Im folgenden wollen wir zunächst klären, was mit diesen zunächst abstrakt anmutenden Begriffen gemeint ist, und wie sie in Zusammenhang mit den Newton Gesetzen Bedeutung gewinnen.

Info: Bemerkungen über Einheiten: Die Form der Newton Gleichungen beinhaltet, daß zur Formulierung der Mechanik drei dimensionsbehaftete Größen erforderlich sind: Zeit,

Länge im Ortsraum und Masse. Wir schreiben

$$[X] = T, L, M$$

für eine physikalische Observable X, deren Dimension die einer Zeit (T), Länge (L) oder (M) Masse ist. In dieser Vorlesung verwenden wir das sogenannte **MKS-System** zur Festlegung physikalischer Einheiten: Zeit, Länge und Masse werden in Einheiten von Sekunden (s), Metern (m) und Kilogramm (kg) gemessen. Physikalische Dimension und Maßeinheit aller anderen Größen liegen damit fest. Aus dem Newton Gesetzen folgt, z.B., daß die Kraft die Dimension $[\mathbf{F}] = \mathrm{MLT}^{-2}$ hat und damit in Einheiten von mkg/s² zu messen ist. Die Krafteinheit 1mkg/s² = 1N heißt ein **Newton**.

1.3 Analyse der Newton Gesetze

Die Gleichungen (1.1) und (1.2) sind unter Bezug auf ein Koordinatensystem **K** formuliert. Andererseits sollten die Newton Gesetze, die ja den Anspruch erheben, eine vollständige Beschreibung der Mechanik zu liefern, nur bedingt davon abhängen, aus was für einem System heraus wir die Bewegung der Körper betrachten. Im folgenden wollen wir die Invarianzeigenschaften des Newton Formalismus beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen genauer studieren.

Info: Worin liegt der Bezug der obigen Formulierung auf ein Koordinatensystem? Eine Betrachtung der mathematischen Struktur der Newtongleichungen suggeriert, daß keine unmittelbarer Bindung an ein Koordinatensystem vorliegt. Tatsächlich ergibt sich die Koordinatenabhängigkeit in indirekter Weise aus lex prima: Angenommen wir beobachteten *in einem bestimmten Koordinatensystem*, K einen beit Abwesenheit einer Kraft sich gleichförmig bewegenden Körper: $m\mathbf{a} = 0$. Eine in einem relativ zu unserem System beschleunigten Koordinatensystem \mathbf{K}' sitzende Beobachterin würde aber eine andere Beobachtung, nämlich beschleunigte Bewegung machen: $m\mathbf{a}' \neq 0$, wobei \mathbf{a}' die im Alternativsystem vorgefundene Beschleunigung ist. Sie müßte die Sache so interpretieren, daß (i) auf den Körper eine Kraft wirkt, die (ii) zu Beschleunigung führt. Offensichtlich hat der Wechsel von einem zu einem anderen Bezugssystem zu einer anderen Form von Newtongleichungen geführt, d.h. den Gleichungen an sich kommt keine koordinateninvariante Bedeutung zu. Eine sich unmittelbar hieraus ergebende Fragestellung ist: Gegeben ein Koordinatensystem \mathbf{K} , wie sieht die Klasse all derjenigen Koordinatensysteme \mathbf{K}' aus, in denen die Newtongleichungen die gleiche algebraische Form, wie in \mathbf{K} haben. Dies ist eine der Fragen, mit denen wir uns im folgenden Abschnitt beschäftigen werden.

1.3.1 Invarianzen und Symmetrien

Nehmen wir an, wir wollten die Newton'sche Naturbeschreibung unter Bezug auf ein anderes Raum-Zeit Bezugssystem \mathbf{K}' formulieren. In \mathbf{K}' wird ein Weltpunkt *b* durch die Koordinaten (t', \mathbf{r}') anstelle von (t, \mathbf{r}) beschrieben. Die Koordinatenbeschreibung einer Bewegung ist durch $\mathbf{r}'(t')$ anstelle von $\mathbf{r}(t)$ gegeben, wobei beide Größen in eindeutiger Beziehung zueinander stehen. Wir bezeichnen das System Newton'scher Gleichungen als **invariant** beim Übergang von \mathbf{K} zu \mathbf{K}' , wenn die in neuen Koordinaten ausgedrückten Gleichungen die Form

$$m_i d_{t'}^2 \mathbf{r}'_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}'_{ij}$$

annehmen, wobei \mathbf{F}' die in neuen Koordinaten ausgedrückte Kraft ist. Um einzusehen, daß dies durchaus nicht selbstverständlich ist, betrachten wir das Beispiel eines Koordinatensystems \mathbf{K}' , daß achsenparallel zu \mathbf{K} ist, aber seinen Ursprung \mathbf{o} bei $\mathbf{a}_0 t^2/2$ hat. Der Ursprung von \mathbf{K}' bewegt sich also immer schneller von dem \mathbf{K} 's weg; es handelt sich um ein beschleunigtes Bezugssystem. Die Beziehung zwischen alten und neuen Koordinaten ist durch

$$t = t',$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + t^2 \frac{\mathbf{a}_0}{2}$$
(1.3)

gegeben. Substituieren wir dies in den Newton Gleichungen des Systems $\mathbf{K},$ so ergibt sich

$$md_{t'}^2\mathbf{r}' + m\mathbf{a}_0 = \mathbf{F}',$$

m.a.W., die Gleichungen haben ihre Form geändert, es ist ein Zusatzterm auf der linken Seite aufgetaucht. Wo liegt das Problem? Ist der Newton Formalismus unbrauchbar, weil an bestimmte Bezugssysteme gekoppelt?

Bevor wir zur Beantwortung dieser Frage kommen, wollen wir zunächst einmal diejenigen Koordinatentransformationen finden, die gutartig *sind* und die Gleichungen invariant lassen. Eine Idee davon, welche Transformationen zulässig sind, bekommt man, wenn man sich klarmacht, daß (i) der Raum an sich translations- und rotationsinvariant ist und (ii) die Zeit gleichfalls translationsinvariant ist. In der Tat überzeugt man sich leicht davon, daß die Transformationen

1. Translation von Raum- und Zeit-Ursprung,

$$(t',\mathbf{r}') = (t+s,\mathbf{r}+\mathbf{u}),$$

2. Rotation des Raumes

$$(t',\mathbf{r}') = (t,R\mathbf{r})$$

mit $R \in O(3)$ und

3. Gleichförmige Bewegung des Bezugssystems

$$(t',\mathbf{r}') = (t,\mathbf{r} + \mathbf{v}t)$$

die Newton Gleichungen in dem oben angesprochenen Sinne invariant lassen³. Etwas weniger offensichtlich ist, daß es sich bei 1.)-3.) um die maximale Invarianzgruppe von Koordinatentransformationen handelt⁴. Beachten Sie nun, daß es sich bei diesen Koordinatentransformationen um nichts anderes als die oben diskutierten Galilei Transformation in ihrer passiven Sichtweise handelt. Formal gesprochen:

Die Galilei-Gruppe ist die Invarianzgruppe der klassischen Mechanik.

Wir wiederholen, daß die Symmetriegruppe der Meachnik 10 frei relle Parameter hat, vier für Translation in Raum und Zeit, drei für die Rotation und drei für die gleichförmige Bewegung.

Info: Ähnlich wie die Galilei Transformation zwei Sichtweisen zuließ, eine aktive und eine passive, können wir auch die Invarianz der Newton Gleichungen nicht nur passiv, sondern auch aktiven deuten. Zum Beispiel bleibt die Dynamik eines Systems von N Körpern (genauer gesagt, die Relativbewegung der Körper) ungeändert, wenn wir das Gesamtsystem (innerhalb eines festen Koordinatensystems) um einen festen Vektor in Raum und Zeit translatieren. (Die Dynamik eines abgeschlossenen Systems von N Körpern wird nicht davon abhängen ob sie jetzt und hier oder zu einer anderen Zeit an einem anderen Ort stattfindet.) Ähnliches gilt für Rotationen im Raum und gleichförmige Bewegungen (machen Sie sich das anschaulich klar!)

Schließlich kommen wir auf das oben aufgetauchte Problem der nicht-Invarianz der Newton Gleichungen beim Übergang zu einem beschleunigten System \mathbf{K}' zurück. wir betrachten dazu den einfachen Fall eines Körpers der Masse m, der sich in \mathbf{K} kräftefrei bewegt, z.B. ruht:

$$\mathbf{K}: \qquad m\mathbf{a}=0.$$

Die transformrierte Gleichung lautet (vgl. (1.3))

$$\mathbf{K}': \qquad m\mathbf{a}' = -m\mathbf{a}_0.$$

Um zu verstehen, daß die nicht-Invarianz der Gleichung kein Problem darstellt, sogar physikalisch zwingend ist, muß man sich in Erinnerung rufen, wie die Newton Gleichungen aufzustellen sind: (i) man begibt sich in ein Koordinatensystem, (ii) stellt fest, was für Kräfte vorliegen und (iii) stellt die entsprechende Gleichung auf. Der Punkt ist nun, daß ein Beobachter in \mathbf{K}' , die Bewegung des Körpers *nicht* als

³Bei Translation (1.) und gleichförmiger Bewegung (3.) bleibt die Kraft invariant, $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$, bei Raumrotation (2.) transformiert sie sich gemäß $\mathbf{F}' = R\mathbf{F}$. Die Invarianz unter 1.,3. versteht man, wenn man sich klarmacht, daß es sich bei der Kraft nicht um Punkte des affinen Raumes \mathcal{A}^3 , sondern um eine vektorielle Größe handelt. (Auf der die Kraft definierenden linken Seite der Newtongleichung stehen Ableitungen, d.h. {infinitesimale} Differenzen von Punkten, also Vektoren.) Sowohl bei Translation als auch bei gleichförmiger Bewegung bleiben Vektoren aber invariant.

⁴Das ist nicht ganz korrekt, denn die **Zeitspiegelung** $(t', \mathbf{r}') = (-t, \mathbf{r})$ läßt die Newtongleichungen ebenfalls invariant. Gleiches gilt für die **Raumspiegelung** $(t', \mathbf{r}') = (t, -\mathbf{r})$. Auf den Aspekt von Zeit- und Raumumkehr wollen wir hier aber nicht weiter eingehen (vgl. die Diskussion in[6]).

kräftefrei empfinden wird. Von \mathbf{K}' aus betrachtet wirkt auf den in \mathbf{K} ruhenden Körper eine 'Beschleunigungskraft', die der Richtung der Beschleunigung entgegengesetzt ist. (Ein Mensch der in einer fensterlosen Fahrstuhlkabine eingesperrt ist, wird nicht ohne weiteres entscheiden können, ob er sich in einem Schwerefeld mit Gravitationskraft befindet, oder beschleunigt durch den Weltraum gezogen wird!) Der Zusatzterm, der in den Gleichungen beim Übergang von \mathbf{K} zu \mathbf{K}' auftaucht, entspricht genau der Kraft, die der \mathbf{K}' Beobachter konstatiert. Die Nicht-Invarianz der Gleichungen ist also physikalisch erforderlich.

Aus diesen Betrachtungen lernen wir, daß Bezugssysteme, die miteinander über Galilei Transformationen in Beziehung stehen, zueinander physikalisch äquivalent sind, in dem Sinne, daß in ihnen, 'die gleichen Kräfte wirken'. Man bezeichnet zwei solche Galilei verknüpfte Bezugssysteme als zueinander intertial. Es liegt nahe zu fragen, ob es in der Menge aller möglichen Bezugssysteme, eine Klasse zueinander inertialer Systeme gibt, die in irgendeiner Weise ausgezeichnet ist. Daß dem so sein könnte, wird durch das Beispiel oben nahegelegt: Die in Bezugssystem \mathbf{K}' wirkende Kraft ist in gewisser Weise trivial, denn sie läßt sich ja durch einen Bezugssystemwechsel $\mathbf{K}' \to \mathbf{K}$ eliminieren. Ganz allgemein bezeichnet man Kräfte, die sich durch einen Wechsel des Bezugssystems eliminieren lassen als Scheinkräfte. Dagegen heïßen Kräfte, die nicht in diese Kategorie fallen, eingeprägte Kräfte. Systeme, die frei von Scheinkräften sind, werden als **Inertialsysteme** bezeichnet. Durch Anwendung aller Galilei Transformationen entsteht aus einem vorgegebenen Inertialsystem, eine ganze Klasse von Inertialsystemen. Die Inertialsysteme sind dadurch vor generischen Systemen ausgezeichnet, daß in ihnen die Newton Gesetze ihre einfachst mögliche Form annehmen; es treten keine die Naturbeschreibung komplizierenden Scheinkräfte auf.

1.3.2 Erhaltungssätze

Irgendwann einmal werden wir die Newton Gleichungen nicht nur betrachten, sondern auch lösen müssen. Die Lösung von eines Systems von Differentialgleichungen vereinfacht sich drastisch, wenn Erhaltungsgrößen vorliegen. (In Zusammenhang mit den Newton Gleichungen – eines Systems von Differentalgleichungen bzgl. der Variablen 'Zeit' – bezeichnet man eine Variable als erhalten, wenn sie sich zeitlich nicht ändert.) Dies ist die formale Motivation, die diesem Abschnitt zugrundeliegt. *Inhaltlich* relevant ist, daß alle Erhaltungsgrößen der klassischen Mechanik physikalisch zentral wichtig sind, eine Tatsache, die unser tägliches Leben ständig beeinflußt, ohne daß man sich dessens notwendigerweise bewußt ist.

Im folgenden sollen die Erhaltungsgrößen der Mechanik und noch einige weitere zur Charakterisierung dynamischer Prozesse benötigte Begriffe eingeführt werden. Um diese Diskussion in vernünftiger Allgemeinheit führen zu können, generalisieren wir zunächst den oben eingeführten Begriff des Systems von N-Teilchen noch etwas. Während bei der ursprünglichen Definition auf Seite 14 vorausgesetzt war, daß die Teilchen zwar untereinander Kräfte ausüben, ansonsten aber kräftefrei sind, soll von jetzt ab auch zugelassen sein, daß auf jedes Teilchen *i* eine **externe Kraft F**_{e,i} wirkt. Bei diesen externen Kräfte kann es sich z.B. um auf das Gesamtsystem wirkende

Gravitationskräfte, durch eine globale Beschleunigung hervorgerufene Scheinkräfte u.s.w. handeln.

Bei Anwesenheit solcher externen Kräfte verallgemeinert sich die Bewegungsgleichung zu

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{\mathrm{e},i}.$$

Man bezeichnet die die \mathbf{F}_{ij} als innere Kräfte des Systems. Die Summe

$$\mathbf{F}_{ ext{e}}\equiv\sum_{i}\mathbf{F}_{ ext{e},i}$$

heißt gesamte externe Kraft, die auf das System wirkt.

Impuls

Der Impuls eines Körpers, p ist definiert als Produkt von Masse und Geschwindigkeit,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Die Newton Gleichung,

 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$

besagt daß die zeitliche Änderung des Impulses gleich der angreifenden Kraft ist. Im trivialen Fall einer kräftefreien Bewegung ist der Impuls erhalten. Der Gesamtimpuls eines Systems von N Teilchen, P ist durch

Der Gesamtimpuls eines Systems von N Teilchen, P ist durc

$$\mathbf{P} = \sum_{i} m_i \mathbf{v}_i$$

definiert. Diese Größe genügt der Gleichung,

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{\mathrm{e}}.\tag{1.4}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{P} &\stackrel{(1.1)}{=} &\sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \mathbf{F}_{e,i} = \\ &= & \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ji}) + \mathbf{F}_e = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\mathbf{F}_{ji} - \mathbf{F}_{ij}) + \mathbf{F}_e = \mathbf{F}_e, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die 'dummy' Indices *i* und *j* vertauscht haben und das dritte Gleichheitszeichen auf $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ beruht.

Wir halten die triviale aber wichtige Tatsache fest, daß bei Abwesenheit externer Kräfte (oder, allgemeiner, für externe Kräfte, die sich zu 0 summieren), $\mathbf{F}_{e} = 0$, der Gesamtimpuls erhalten ist, $d_t \mathbf{P} = 0$.

Beachten Sie, daß die Bewegungsgleichung des Gesamtimpulses der eines *einzelnen* Teilchens ähnelt. Dieses 'Superteilchen' hat die **Gesamtmasse**

$$M \equiv \sum_{i} m_i$$

20

Impuls **P** und ist einer Kraft \mathbf{F}_{e} ausgesetzt. Anschaulich: Wenn Sie ein System von *N*-Teilchen aus sehr großer Entfernung betrachten, können sie die Lage der konstituierenden Teilchen nicht mehr auflösen. Die Bewegung 'wirkt' dann wie die eines einzelnen Körpers der Masse M, der der gesamten externen Kraft ausgesetzt ist, die auf das System wirkt. Gleichung (1.4), setzt diesen Eindruck in eine präzise Formulierung um.

Wir entwickeln diesen Zusammenhang noch etwas weiter und definieren:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i} m_i \mathbf{r}_i$$

als den **Schwerpunkt** des Systems. Es handelt sich beim Schwerpunkt in gewisser Weise um denjenigen ausgezeichneten Punkt des Systems, in dem seine Gesamtmasse konzentriert zu sein schiene, wenn man es aus weiter Ferne betrachtete (vgl. Fig. 1.7). Schwerpunkt, Gesamtmasse und Gesamtimpuls stehen wie bei einem einzelnen Teilchen miteinander in Beziehung:

$$Md_t\mathbf{R} = \mathbf{P},$$

wie elementar aus den Definitionen folgt.

Die Tatsache, daß der Gesamtimpuls eines Systems von Teilchen einer einfachen Gleichung genügt, legt es nahe, die Lagekoordinate jedes konstituierenden Teilchens i gemäß

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i$$

aufzuspalten. Man bezeichnet \mathbf{r}'_i als die **Relativkoordinate** des Teilchens (bezüglich des Schwerpunkts) und $\dot{\mathbf{r}}'_i \equiv \mathbf{v}'_i$ als seine **Relativgeschwindigkeit**.

Die Einführung von Schwerpunkt- und Relativkoordinaten induziert eine Aufspaltung der Dynamik des N-Teilchensystems in die Dynamik des Schwerpunkts und die der Relativkoordinaten. Generell bezeichnen wir die zur Angabe aller Lagekoordinaten eines mechanischen Systems erforderliche Zahl von Variablen als die Zahl seiner **Freiheitsgrade**. Die Zahl der Freiheitsgrade eines uneingeschränkten⁵ N-Teilchensystems ist 3N, entsprechend den 3N Koordinaten, die zur Fixierung der Koordinatenvektoren $\mathbf{r}_i, i = 1, \ldots, N$ benötigt werden. Da die Schwerpunktsdynamik über drei Freiheitsgrade (die drei Koordinaten des Schwerpunktsvektors \mathbf{R} , nämlich) festgelegt ist, verbleiben 3N - 3 Freiheitsgrade für die Relativdynamik. Woraus folgt, daß für N > 2, letztere wesentlich komplexer als die Schwerpunktsbewegung ist.

Drehimpuls

Der **Drehimpuls** eines Körpers bei \mathbf{r} bezüglich eines vorgegebenen Raumpunktes \mathbf{r}_0 ist definiert als

$$\mathbf{l} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{p},$$

 $^{{}^{5}}$ Es ist denkbar, daß die Bewegung der Konstituenten eines N-Teilchensystems aufgrund irgendeines Mechanismus eingeschränkt ist. (Denken Sie, z.B. an Kugeln, die auf einer Tischplatte rollen; die Bewegung ist auf eine Ebene eingeschränkt.) In diesem Fall ist die Zahl der Freiheitsgrade kleiner als 3N. (Im Beispiel, 2N, entsprechend der Zahl zweidimensionaler Koordinaten, die die Lage der Kugeln festlegen.)



Abbildung 1.7: Zur Definition von Schwerpunkt, Gesamtimpuls, Relativimpuls und Relativkoordinaten

wobei $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ (vgl. Fig. 1.8). Das am Körper angreifende **Drehmoment** ist

 $\mathbf{n} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{F}.$

Beachten Sie, daß die Definition von Drehimpuls und Drehmoment wesentlich einen Bezugspunkt beinhaltet. Zum Beispiel ist der Drehimpuls eines Wurfhammers von seinem eigenen Standpunkt aus gering, von dem des Hammerwerfers jedoch beträchtlich.

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses eines Körpers ist durch das angreifende Drehmoment bestimmt:

$$d_t \mathbf{l} = \mathbf{n},$$

wobei wir $d_t \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} = 0$ verwendet haben.



Abbildung 1.8: Zur Definition des Drehimpulses. Erklärung, siehe Text

Der Drehimpuls eines Systems von N Teilchen bezüglich eines Punktes \mathbf{r}_0 ist

definiert als

$$\mathbf{L}\equiv\sum_{i}\mathbf{x}_{i} imes\mathbf{p}_{i}$$

wobei $\mathbf{x}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$ und $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ der Impuls des *i*-ten Teilchens ist. Die zeitliche Änderung dieser Größe ist durch das angreifende Drehmoment der *externen* Kraft,

$$\mathbf{N}_{ ext{e}}\equiv\sum_{i}\mathbf{x}_{i} imes\mathbf{F}_{ ext{e},i}$$

bestimmt:

 $d_t \mathbf{L} = \mathbf{N}_{\mathbf{e}}.$

Beweis:

$$egin{array}{ll} d_t \mathbf{L} &\stackrel{(1.1)}{=} &\sum_{i
eq j} \mathbf{x}_i imes \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \mathbf{x}_i imes \mathbf{F}_{\mathrm{e},i} = \ &= & rac{1}{2} \sum_{i
eq j} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) imes \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{N}_{\mathrm{e}} = \mathbf{N}_{\mathrm{e}}, \end{array}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen wiederum auf einem Austausch der Summationsindizes beruht und das dritte wegen $\mathbf{F}_{ij}||(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ folgt. Für verschwindendes externes Drehmoment ist der Drehimpuls erhalten.

Wir bemerken noch, daß sich der Drehimpuls eines *N*-Teilchensystems, ähnlich wie der Impuls, in einen Schwerpunktsbeitrag und eine Summe von Teildrehimpulsen der einzelnen Teilchen bezüglich des Schwerpunkts aufspalten läßt:

$$\mathbf{L} = (\mathbf{R} - \mathbf{r}_0) imes \mathbf{P} + \sum_i \mathbf{r}'_i imes \mathbf{p}'_i$$

Aufgabe: Beweisen Sie diese Identität!

Energie

Wir geben uns zwei Punkte im Raum, \mathbf{r} und $\mathbf{r'}$ vor und einen Weg γ , der die beiden verbindet (vgl. Fig. 1.9). Betrachte die Größe

$$A_{\gamma} \equiv -\int\limits_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

also das Wegintegral der wirkenden Kraft entlang des Wegs γ . Wir bezeichnen A_{γ} als die **Arbeit**, die entlang des Wegs gegen die Kraft zu verrichten ist. Im allgemeinen läßt sich über die Definition hinaus nicht viel mehr über die Arbeit sagen. Eine besondere Situation stellt sich jedoch ein, wenn es sich bei γ nicht um einen generischen Pfad, sondern um die Kurve einer Bewegung handelt. Damit ist gemeint, daß in einer geeigneten Parameterisierung, $\gamma = {\mathbf{r}(t) | t \in [t_1, t_2]}$, wobei $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}$,

(1.5)



Abbildung 1.9: Zur Definition der Arbeit. Erklärung, siehe Text

 $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}(t)$ die Newton Gleichungen löst. Für einen solchen Pfad können wir das Integral unter Verwendung der Newton Gleichungen ausführen:

$$A_{\gamma} = -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d_t \mathbf{r} dt =$$
$$= -m \int_{t_1}^{t_2} (d_t^2 \mathbf{r}) \cdot d_t \mathbf{r} dt = -\frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} d_t (d_t \mathbf{r})^2 dt =$$
(1.6)

$$= \frac{m}{2} (\mathbf{v}(t_1)^2 - \mathbf{v}(t_2)^2). \tag{1.7}$$

Wir bezeichnen die Größe

$$T \equiv \frac{m}{2} \mathbf{v}^2$$

als die **kinetische Energie** eines Teilchens. In Worten besagt die Identität oben, daß die Arbeit, die im Laufe einer Bewegung gegen die Kraft zu verrichten ist, der Änderung der kinetischen Energie des Teilchens gleicht.

Der Zusammenhang zwischen Arbeit und kinetischer Energie läßt sich noch viel weiter entwickeln, wenn das Kraftfeld \mathbf{F} konservativ ist. Für den Begriff der **konservativen Kraft** gibt es drei äquivalente Definitionen: Eine Kraft heißt konservativ, wenn

- $\triangleright \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}', \text{ das Integral } \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \text{ nicht von der Wahl des zwichen } \mathbf{r} \text{ und } \mathbf{r}' \text{ eingeschla$ $genen Wegs abhängt.}$
- $\triangleright \text{ für alle geschlossenen Wege } \gamma, \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$
- ▷ **F** als Gradient einer eindeutigen skalaren Funktion geschrieben werden kann: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})^6$.

⁶Das negative Vorzeichen ist natürlich inhaltlich unerheblich. Mit der Wahl des Vorzeichens folgen wir einer in der Mechanik gebräuchlichen, physikalisch motivierten Konvention.

1.3. ANALYSE DER NEWTON GESETZE

Aufgabe: Zeigen Sie, die Äquivalenz der drei Definitionen!

Bevor wir die physikalische Bedeutung konservativer Kräfte besprechen, noch eine Bemerkung zu den eben gegebenen Definitionen. In der Praxis sind sie etwas unhandlich, und zwar weil die ersten beiden nichtlokaler Natur sind (Integrale beinhalten) und die dritte, bei vorgegebener Kraft, die Lösung der Differentialgleichung $\mathbf{F} = -\nabla U$ erfordert. Es ist daher nützlich zu wissen, daß es eine einfach zu überprüfende *notwendige* Bedingung für die Konservativität einer Kraft gibt:

\mathbf{F} konservativ $\Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0.$

Beweis: Der Stoke'sche Satz besagt, daß für jeden geschlossenen Weg γ ,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_{\gamma}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot dS,$$

wobei S_{γ} eine Fläche mit Rand γ bezeichnet. Da (i) für eine konservative Kraft die linke Seite verschwindet und (ii) der Weg γ , und damit das Integrationsgebiet auf der rechten Seite beliebig gewählt werden können, muß $\nabla \times \mathbf{F}$ identisch verschwinden. Gegeben eine Kraft unbekannter Natur, ist es also immer eine gute Idee, zunächst einmal ihre Rotation zu berechnen. Verschwindet sie, stehen die Chancen gut, daß es sich um eine konservative Kraft handelt. Wir wiederholen jedoch, daß es sich hierbei lediglich um eine notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung handelt.

Aufgabe: Gegeben sei ein Kraftfeld mit Komponenten

$$F_1 = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad F_2 = \frac{-x}{x^2 + y^2}, \qquad F_3 = 0.$$

Skizzieren Sie **F**. Berechnen Sie, $\nabla \times \mathbf{F}$ und $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ entlang eines kreisförmigen Weges mit Radius R und Mittelpunkt **o**. Zeigen Sie, daß mit $V = \arctan(y/x)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla V(\mathbf{r})$ für $\mathbf{r} \neq \mathbf{o}$. Es handelt sich bei V jedoch nicht um eine *eindeutige* Funktion⁷ und daher nicht um eine Funktion, die die Bedingungen der obigen Definition erfüllt. **F** ist nicht konservativ! Machen sie sich diesen Sachverhalt anhand der Skizze von **F** und der Definition der Arbeit anschaulich klar.



Abbildung 1.10: Links: im \mathbb{R}^2 einfach zusammenhängendes Gebiet. Rechts: nichteinfach zusammenhängendes Gebiet.

⁷Da $\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$ ist die Umkehrfunktion des tangens, d.h. arctan nur modulo 2π bestimmt; es handelt sich um eine sogenannte 'mehrblättrige' Funktion.

Info: Tatsächlich kann man die Rotationsfreiheit von Kräften zu einem Kriterium für Konservativität ausbauen, wenn man noch den Begriff des Zusammenhangs von Gebieten hinzunimmt. Ein Gebiet A heißt einfach zusammenhängend, oder einfacher nur 'zusammenhängend', wenn man jede in A geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen kann (vgl. Fig. 1.10, links für ein Beispiel eines im \mathcal{R}^2 zusammenhängenden Gebietes.) Das in Fig. 1.10, rechts gezeichnete Gebiet ist nicht zusammenhängend, da eine das Loch umschließende Kurve nicht kontrahierbar ist. Es gilt nun folgendes Kriterium, für dessen Beweis wir auf einschlägige Lehrbücher der Vektoranalysis verweisen: Ein auf einem zusammenhängenden Gebiet rotationsfreies Vektorfeld ist als Gradient eines Skalarfelds darstellbar.

Worin liegt die Besonderheit konservativer Kräfte? Zunächst einmal ist die Mehrzahl der uns in der Mechanik begegnenden Kräfte konservativ. Die gegen eine solche Kraft zu verrichtende Arbeit ist

$$A_{\gamma} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2),$$

unabhängig vom gewählten Weg. Wir bezeichnen die die Kraft erzeugende Funktion U als die **potentielle Energie** des Teilchens. Gleichung (1.6) läßt sich nun so umschreiben

$$(T+U)(\mathbf{r}_1) = (T+U)(\mathbf{r}_2).$$

Wir definieren

$$E = T + U$$

als die **Gesamtenergie** eines Teilchens und schließen, daß diese Größe entlang einer Bewegung erhalten ist,

$$d_t E = 0.$$

Wir können das nocheinmal unabhängig von der oben verwendeten Definition der Arbeit nachrechnen:

$$d_t E = d_t T + d_t U = m \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \nabla U \cdot \dot{\mathbf{r}}$$
$$= \dot{\mathbf{r}} \cdot (-\mathbf{F} + \nabla U) = 0.$$

wobei wir im zweiten Gleichheitszeichen die Kettenregel verwendet haben.

Der physikalische Inhalt des Energieerhaltungssatzes ist in Fig. 1.11 veranschaulicht. Im Laufe einer Bewegung kann kinetische Energie in potentielle umgewandelt werden und umgekehrt (Kugel, die einen Berg hinaufläuft). Die Gesamtenergie bleibt jedoch konstant.

In ähnlcher Weise kann man die **Gesamtenergie eines Systems von** N **Teilchen** diskutieren. Wir betrachten hierzu den Fall konservativer Paarkräfte. Damit ist ein System von Kräften \mathbf{F}_{ij} gemeint, daß sich aus Potentialfunktionen U_{ij} gemäß

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = -\nabla_{\mathbf{r}_i} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

erzeugen läßt. ($\nabla_{\mathbf{r}_i}$: Gradient bezüglich des Arguments \mathbf{r}_i .) Wiederum handelt es sich bei der Einschränkung auf konservative Paarkräfte um keine besonders einschneidende Maßnahme; die Mehrzahl der in der Natur vorkommenden Wechselwirkungen



Abbildung 1.11: Zum Energieerhaltungssatz

gehört zu diesem Typ. Die auf das System wirkenden externen Kräfte seien gleichfalls konservativ:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{e},i} = -\nabla_{\mathbf{r}_i} U_{\mathrm{e}}.$$

Als die potentielle, kinetische und Gesamtenergie des *i*-ten Teilchens bezeichnen wir

$$U_i(\mathbf{r}_i) \equiv \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) + U_{e_j}$$

(wobei die Rolle des Vorfaktors 1/2 gleich klar werden wird,)

$$T_i(\mathbf{r}_i) \equiv \frac{m}{2} \mathbf{v}_i^2$$

und

$$E_i = T_i + U_i$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Gesamtenergie einzelner Teilchen *nicht* erhalten ist. Physikalisch: Einzelne Teilchen können Energie miteinander austauschen. Die **Energie des Gesamtsystems**,

$$E = \sum_{i} E_i$$

ist es aber,

$$d_t E = 0. \tag{1.8}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} d_t E &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} d_t U_{ij} (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) + d_t U_{\mathrm{e},i} = \\ &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\nabla_{\mathbf{r}_i} U_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \nabla_{\mathbf{r}_j} U_{ij} \dot{\mathbf{r}}_j \right) + \nabla_{\mathbf{r}_i} U_{\mathrm{e},i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \\ &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i \neq j} \nabla_{\mathbf{r}_i} U_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \nabla_{\mathbf{r}_i} U_{\mathrm{e},i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \\ &= \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \left(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} - \mathbf{F}_{\mathrm{e},i} \right) = 0, \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile verwendet haben, daß aus $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ und $\nabla_{\mathbf{r}_i} U_{ij} = -\nabla_{\mathbf{r}_j} U_{ij}$

$$U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = U_{ji}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$

 $folgt^8$.

Erhaltungsgröße	1–Teilchensystem	N-Teilchensystem
Impuls	$\mathbf{F} = 0$	$\mathbf{F}_{e} = 0$
Drehimpuls	$\mathbf{N} = 0$	$N_e = 0$
Energie	${\bf F}$ konservativ	\mathbf{F}_{ij} und $\mathbf{F}_{i,e}$ konservativ

Tabelle 1.1: Erhaltungsgrößen der Punktmechanik

Die in diesem Abschnitt herausgearbeiteten Erhaltungssätze sind in Tabelle 1.1 unten zusammengefaßt. In Kapitel 2 wird sich herausstellen, daß es kein Zufall ist, daß die Mechanik sowohl drei Symmetrien (Raum-Zeit Translation, Rotation und gleichförmige Bewegung) als auch drei Erhaltungsgrößen hat. Vielmehr werden wir sehen, daß ein Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen besteht, der sehr allgemein ist und sich weit über den Gültigkeitsbereich der Mechanik hinaus erstreckt.

1.3.3 Allgemeines zur Lösung

Bislang haben wir die allgemeine Struktur der Newton Gleichungen analysiert aber noch nichts zu ihrer tatsächlichen Lösung gesagt. Kann man diese Gleichungen tatsächlich immer lösen und wenn ja, wovon hängen die Lösungen ab? Unsere alltägliche Erfahrung sagt, daß bei vorgegebenen Kräften die Bewegung eines Körpers eindeutig bzw. **deterministisch** verläuft, sobald Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit vorgegeben sind (vgl. Fig. 1.12). Ziel dieses letzten Abschnitts unserer allgemeinen Analyse der Newton Gleichungen ist es, diese Erfahrungstatsachen aus den Gleichungen formal abzuleiten.

Technisch handelt es sich bei den Newton Gleichungen eines Systems von N Teilchen um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die 3N Komponenten des Vektors $\mathbf{q} \equiv (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)$ der Positionsvariablen⁹. Um allgemeine Aussagen zur Lösbarkeit dieser Gleichung(en) machen zu können, bedienen wir uns eines Standardverfahrens der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen und formulieren die Newton Gleichungen als ein System von $6N = 2 \times 3N$ Gleichungen *erster* Ordnung.

Info: Eine gewöhnliche Differentialgleichung *n*-ter Ordnung

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y) = 0$$

⁸Streng genommen, ist diese Aussage nicht ganz korrekt: da die Kraft über eine Ableitung definiert ist, ist $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ bereits durch $U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = U_{ji}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \text{const.}$ gewährleistet. Aus dem selben Grund ist das Potential aber nur bis auf einen Konstante bestimmt, d.h. wir knnen o.B.d.A. const = 0 setzen.

⁹In Hinblick auf die weiter unten durchgeführte Analyse, speziell der Einführung des sogenannten Phasenraums, folgen wir schon jetzt einer in der Literatur gebräuchlichen Konvention und bezeichnen die Raumkoordinaten mit \mathbf{q}_i anstelle den bislang verwendeten \mathbf{r}_i 's.



Abbildung 1.12: Zur Rolle von Anfangsbedingungen. Bei vorgegegebener Kraft hängt die Bewegung eines Körpers von seiner Anfangsposition und -geschwindigkeit ab

 $(y^{(n)}: n$ -fache Ableitung) läßt sich stets auf ein System *n*-gekoppelter Differentialgleichungen erster Ordnung reduzieren. Wir führen dazu n-1 neue Funktionen y_1, \ldots, y_{n-1} ein. Die Gleichung *n*-ter Ordnung ist dann offensichtlich dem System von Gleichungen erster Ordnung

$$y' = y_1,$$

$$y'_1 = y_2,$$

$$\vdots ,$$

$$y'_{n-2} = y_{n-1}$$

$$F(y'_{n-1}, y_{n-1}, \dots, y_1, y) = 0$$

äquivalent. Man muß sich bewußt machen, daß man mit dieser Manipulation der Lösung der Differentialgleichung nicht näher gekommen ist. Man hat lediglich eine Schwierigkeit (n-te Ordnung) gegen eine andere (n-faches System) eingetauscht.

Die 3N neu zu verwendenden Variablen sind uns bereits früher begegnet, es sind die Impulse \mathbf{p}_i der Teilchen. Aus ihrer Definition folgt in trivialer Weise, daß die Newton Gleichung (1.1) dem gekoppelten System

$$\dot{\mathbf{q}}_{i} = \frac{1}{m_{i}}\dot{\mathbf{p}}_{i},$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{i} = \mathbf{F}_{i}(\{\mathbf{q}_{l}, \mathbf{p}_{l}\}), \qquad (1.9)$$

äquivalent ist, wobei

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j
eq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{\mathrm{e},i}$$

die auf das *i*-te Teilchen wirkende Gesamtkraft ist.

Auf den ersten Blick sieht das nur wie eine formale Umschreibung aus, deren Nutzen nicht ganz klar ist. Das täuscht. Tatsächlich ist (1.9) der erste Schritt hin zu einer völligen Umformulierung der Mechanik, einer Formulierung, die den Weg zu Anwendungen weit jenseits des Einzugsbereichs des Newton Formalismus öffnet. Gleichung (1.9) legt die Einführung eines 6N-komponentigen Vektors

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$$

nahe. Für ein allgemeines mechanisches System mit f Freiheitsgraden (hier f = 3N) bezeichnet man den 2f-dimensionalen Raum Γ , der von den Koordinatenvektoren \mathbf{x} aufgespannt wird als den **Phasenraum**¹⁰. Ohne es an dieser Stelle deutlich machen zu können, weisen wir schon jetzt darauf hin, daß es sich beim Phasenraum um ein für die Mechanik zentral wichtiges Konzept handelt; die gesamte moderne Entwicklung der klassischen Mechanik, insbesondere die Theorie nicht-integrabler dynamischer Systeme ('Chaos') ist im Phasenraum formuliert.

In kompakter Notation nehmen die Newton Gleichungen nun die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x}),$$

an, wobei die Funktion \mathcal{F} durch die rechte Seite von (1.9) definiert ist. Die entsprechenden Gleichungen für ein einzelnes Teilchen bei vorgegebener Kraft **F** lauten

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{m} \dot{\mathbf{p}},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}),$$
(1.10)

bzw. einfach

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F},$$

wobei $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}).$

Die Bedinungen unter denen Gleichungen dieses Typs – Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung – lösbar sind, werden in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt. Wir zitieren hier nur den für uns entscheidenden



Abbildung 1.13: Zum Eindeutigkeitssatz der Lösung gewöhnlicher Differentialgkleichungen. Erklärung, siehe Text.

Satz: Es sei $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ bezüglich $\mathbf{x} \in \Gamma$ stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{z} \in \Gamma$ eine Umgebung U und ein Zeitintervall $I \ni 0$ derart, daß es $\forall \mathbf{x}_0 \in U$

 $^{^{10}}$ Vorausgreifend erwähnen wir, daß es sich beim Phasenraumn nur in Spezialfällen, nämlich der Mechanik des unbeschränkten N-Teilchensystems, um einen Vektorraum handelt. Im allgemeinen hat der Phasenraum die Struktur einer gewissen differenzierbaren Mannigfaltigkeit (näheres, siehe unten), die *lokal* durch den 6N-komponentigen Satz von Koordinaten **x** dargestellt werden kann.

genau eine Kurve $\mathbf{x}(t)$ mit $t \in I$ gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt (vgl. Fig. 1.13):

1. $d_t \mathbf{x}(t) = \mathcal{F}(\mathbf{x}(t)).$

2. $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

3. $\mathbf{x}(t)$ ist bezüglich \mathbf{x}_0 stetig differenzierbar.

Inhaltlich besagt dieser Satz, daß zu vorgegebener Kraft und $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ immer eine Bewegung $\mathbf{x}(t)$ existiert, die \mathbf{x}_0 als Anfangsbedingung hat. Die Kurve ist durch die Anfangsbedingung eindeutig bestimmt. Dies ist die oben angekündigte Formalisierung des aus dem Alltagsleben bekannten Sachverhalts.

Es ist instruktiv, sich die Eindeutige Lösbarkeit Newton'scher Gleichungen anhand einiger Beispiele zu veranschaulichen. Wir beginnen mit dem nach der kräftefreien Bewegung zweit-einfachsten Beispiel, das die Mechanik zu bieten hat, dem

Bsp.: Bewegung im Konstanten Kraftfeld

Wir betrachten ein Teilchen bei Anwesenheit einer Kraft $\mathbf{F} = F\mathbf{e}$, wobei \mathbf{e} ein vorgegebener Einheitsvektor ist. O.B.d.A. können wir ein Koosrdinatensystem so wählen, daß $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$. Die erste Hälfte der Newton Gleichungen hat dann die eindeutige Lösung,

$$p_1(t) = p_1(0) + Ft,$$
 $p_2(t) = p_2(0),$ $p_3(t) = p_3(0),$

Substitution dieser Komponenten in die zweite Hälfte führt auf die Gleichungen

$$\dot{q}_1(t) = \frac{1}{m}(Ft + p_1(0)),$$

 $\dot{q}_i(t) = \frac{1}{m}p_i(0), \qquad i = 2, 3,$

die sich gleichfalls trivial zu

$$q_1(t) = \frac{Ft^2}{2m} + \frac{p_1(0)t}{m} + q_1(0),$$

$$q_i(t) = \frac{p_i(0)t}{m} + q_i(0), \qquad i = 2, 3$$

lösen lassen. Beachten Sie, daß diese Lösungen aufgrund der Vorgabe der Anfangsbedingungen eindeutig sind.

Etwas weniger trivial ist das

Bsp.: Der Eindimensionale Harmonische Oszillator

Als einen eindimensionalen harmonischen Oszillator bezeichnet man ein Teilchen,

das sich (i) nur in einer Dimension bewegt¹¹ und (ii) eine potentielle Energie $U(x) = \frac{m\omega^2}{2}q^2$ hat, wobei q die ein-dimensionale Positionskoordinate und ω ein Parameter der Dimensionalität $[\omega] = T^{-1}$ ist. Die Gesamtenergie des Teilchens ist also,

$$E = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$
 (1.11)



Abbildung 1.14: Zum ein-dimensionalen harmonischen Oszillator

Mit $F=-\partial_q U$ (eindimensionale Version des Gradienten!), lauten die Newton Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{1}{m}p,$$

$$\dot{p} = -m\omega^2 q.$$

Wir können diese Gleichungen in eine symmetrischere Form bringen, indem wir neue, umskalierte Variable einführen. Mit

$$q = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} z_1, \qquad p = \sqrt{m} z_2,$$

nehmen die Gleichungen die Form

$$\dot{z}_1 = \omega z_2,
\dot{z}_2 = -\omega z_1$$
(1.12)

an. Die in neuen Variablen ausgedrückte Energie ist $E = (z_1^2 + z_2^2)/2$. Die allgemeine Lösung der transformierten Newton Gleichungen läßt sich leicht erraten:

$$z_1 = x \sin(\omega t + \phi)$$

$$z_2 = x \cos(\omega t + \phi),$$

wobei x und ϕ reelle Konstanten sind, die durch die Anfangsbedingungen fixiert werden müssen. Um konkret zu sein, nehmen wir an, daß wir das Teilchen bei t = 0

 $^{^{11}\}mathrm{Ausgehend}$ von einer drei-dimensionalen Welt kann man das immer durch Vorgabe von Zwangsbedingungen erreichen (siehe hierzu unsere Diskussion unten). Genausogut kann man von vorn herein annehmen, daß die Dynamik sich nur in einer Dimension abspielt.

mit einer Auslenkung q_{max} und Anfangsgeschwindigkeit v = 0 gestartet hätten (vgl. Fig. 1.14). Man rechnet leicht nach, daß das auf die Forderungen $\phi = \pi/2$ und $x = \sqrt{m}\omega q_{\text{max}}$ führt. Rücksubstitution der alten Variablen führt auf

$$q(t) = q_{\max} \cos(\omega t),$$

$$p(t) = -mq_{\max} \omega \sin(\omega t).$$
(1.13)

Damit ist das Problem gelöst. Das Teilchen führt eine periodische Bewegung mit charakteristischer Frequenz ω aus. Substitution der Lösung zeigt daß

$$E = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) = \frac{m\omega^2 q_{\max}}{2}$$

konstant ist, wie es aus allgemeinen Gründen ja auch sein muß. Daß der Wert der Gesamtenergie gerade mit dem der potentiellen Energie bei q_{max} übereinstimmt liegt daran, daß wir das Teilchen dort ja mit Anfangsgeschwindigkeit 0, d.h. T = 0 gestartet hatten. Bei q_{max} , und damit bei jeder anderen Koordinate auch, ist die Energie also durch $E = U(q_{\text{max}})$ gegeben.

An der obigen Darstellung der Energie läßt sich übrigens ein Sachverhalt erahnen, der uns später noch in erheblichen Maße beschäftigen wird: Nach Einführung der z-Variablen, sieht es so aus, als bestehe vollständige Symmetrie zwischen den Variablen des Problems. Es ist gelungen, von der vormals asymmetrischen Darstellung im Variablenpaar (p, q) auf eine manifest symmetrische Form zu transformieren. Damit drängt sich der Verdacht auf, daß die Trennung in 'koordinatenartige' und 'impulsartige' Variable keinen besonders tiefen Ursprung hat, unter gewissen Bedingungen Umständen sogar artifiziell ist. Tatsächlich werden wir später forgeschrittene Formulierungen der Mechanik kennenlernen, in denen sich die Unterscheidung zwischen Koordinaten und Impulsen vollständig auflöst.

Info: Für Leute, die sich mit dem 'Erraten' der Lösung einer Differentialgleichung nicht zufriedengeben wollen, skizzieren wir hier noch kurz die Idee einer systematischen Lösung. Es ist gut investierte Zeit, sich mit den hierbei verwendeten Konzepten näher vertraut zu machen.

Wir führen einen Vektor

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

und die Matrix

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$$

ein. Mit diesen Definitionen nehmen die Newton Gleichungen die Form

$$\dot{z} = i\omega\sigma_2 z$$

an. Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Ihre allgemeine Lösung lautet (vgl. einschlägige Lehrbücher über gewöhnliche Differentialgleichungen)

$$z(t) = \exp(i\omega\sigma_2 t)z(0),$$

wobei die Exponentialfunktion einer Matrix A über die Potenzreihe

$$\exp A = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots$$

definiert ist. Die Matrix σ_2 hat nun die schöne Eigenschaft $\sigma_2^2 = 1_2$, wobei 1_2 die zweidimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Damit erhalten wir

$$z(t) = \exp(i\omega\sigma_2 t)z(0) = (\cos(\omega\sigma_2 t) + i\sin(i\omega\sigma_2 t))z(0) =$$

= (\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\sigma_2)z(0).

Man verifiziert leicht, daß das mit der oben erratenen Lösung identisch ist.



Abbildung 1.15: Karikatur eines generischen Potentials mit lokalem Minimum (durchgezogene Linie) und seiner Approximation durch ein Oszillatorpotential (gestrichelte Linie).

Schließlich noch eine Bemerkung zur Anwendungsbedeutung des harmonischen Oszillators. Tatsächlich begegnet man dem Oszillatorproblem in der theoretischen Physik auf Schritt und Tritt, eine Tatsache, die sich anhand eines einfachen Beispiels erläutern läßt: Denken Sie an das (klassische) Modell eines zweiatomigen Moleküls. Die Kräfte, die die Atome aufeinander ausüben, lassen sich durch eine im allgemeinen hochkomplexe Potentialfunktion beschreiben, die z.B. ähnlich wie die in Fig. 1.15 skizzierte Funktion aussehhen könnte. Dieses Potential hat ein Minimum bei einer Ortskoordinate q_{\min} , die dem Bindnungabstand der Atome entspricht. Stellen wir uns nun vor, daß wir an der Bewegung der Atome für kleine Anregungsenergien interessiert seien. Es ist klar, daß sich die Bewegung in erster Linie in der Umgebung von q_{\min} abspielen wird. Für ein halbwegs gutartiges Potential, können wir nun in der Nähe von q_{\min} entwickeln (vgl. Fig. 1.15):

$$U(q) = U(q_{\min}) + \frac{1}{2}U''(q_{\min})q^2 + \dots$$

In erster Näherung läßt sich die Bewegung also als ein Oszillatorproblem mit einer charakteristischen Frequenz $\omega = (U''/m)^{1/2}$ formulieren. Dieser hier am Molekülbeispiel veranschaulichte Sachverhalt hat für allgemeine Gültigkeit: Bewegungen in der Nähe von Potentialminima lassen sich als harmonische Oszillatoren approximieren.

An dieser Stelle wollen wir mit der formalen Diskussion der Newton Mechanik zu

einem vorläufigen Abschluss kommen. In den vorangegangenen Abschnitten haben wir

- ▷ die Galilei Raum-Zeit als den allgemeinen Bezugsrahmen eingeführt, über dem die Mechanik definiert ist,
- ▷ die Newton'sche Formulierung der Mechanik eingeführt,
- ▷ ihre Invarianzen und Symmetrien untersucht und
- ▷ die allgemeine Lösbarkeit der Bewegungsgleichungen mechanischer Systeme diskutiert.

Es ist nun dringend an der Zeit, diesen allgemeinen Formalismus auf Beispiele mechanischer Systeme anzuwenden ...

1.4 Beispiele und Anwendungen

In diesem Abschnitt diskutieren wir eine Reihe von Anwendungen des oben entwickelten Formalismus. Wir beginnen mit der Untersuchung eines der klassischen Probleme der Mechanik, des sogenannten Zweikörper Zentralkraftproblems. Die Lösung dieses Problem war für die Entwicklung der älteren Mechanik von zentraler Bedeutung, da Zweikörper Zentralkräfte bei der Beschreibung von Planetenbewegungen eine wesentliche Rolle spielen. In Hinblick auf die Mechanik als Ganzes, hat das Zweikörperproblem jedoch Sonderstatus, insofern nämlich als es sich um ein lösbares Problem handelt, also um eines für das Lösungen der Newton Differentialgleichungen explizit berechnet werden können.

Die Mehrzahl mechanischer Probleme fällt nicht in diese Klasse, auch wenn man bei der Lektüre von Lehrbüchern oft einen anderen Eindruck gewinnt. (Dort wird eben den wenigen lösbaren Problemen besondere Bedeutung geschenkt.) Tatsache ist, daß für den bei weiten größten Teil mechanischer Systeme Lösungen nicht angegeben werden können oder, schlimmer, daß man von den Lösungen nur weiß, daß sie pathologischen Charakter haben (für die Präzisierung des Begriffs 'pathologisch' siehe, Abschnitt XX). Es ist ist daher von besonderer Wichtigkeit, Methoden zu kennen, die eine möglichst weitgehende Charakterisierung dynamischer Systeme auch bei Abwesenheit expliziter Lösungen erlauben. Im zweiten Teil dieses Abschnitts werden wir anhand von Beispielen einige solcher Methoden erarbeiten.

Drittens werden wir uns in diesem Abschnitt, einen Uberblick darüber zu verschaffen, welche Arten von Kräften in typischen Problemen der Mechanik auftauchen. Diese Klassifizierung wird weitreichende Konsequenzen haben; wir werden sehen, daß es zur Analyse des Großteils der Probleme der 'irdischen' Mechanik einer völligen Neuformulierung des Formalismus bedarf.

1.4.1 Zweikörper Zentralkraft Problem (allgemein)

Beim Zweikörper Zentralkraft Problem handelt es sich um einen der Klassiker der Mechanik. Ein Großteil der frühen Forschung der Mechanik bezog sich auf die Beschreibung von Planetenbewegungen. Eine Reihe von Gesetzen der Mechanik wurden in vor-Newton'scher Zeit empirisch durch Beobachtung von Planetenbahnen erhalten. So ist z.B. das oben abgeleitete Gesetz von der Drehimpulserhaltung erstmals von Kepler durch direkte Beobachtung der Bahn des Mars gefunden worden.

Planetenbewegungen lassen sich oft in erster Näherung als ein Zweikörper Problem beschreiben: Man konzentriert sich auf die zwei wichtigsten zur Beschreibung der Bewegung relevanten Himmelskörper und 'vergißt' den Rest des Universums. Z.B. ist die Bewegung unseres Mondes näherungsweise im Rahmen des Zweikörper Systems (Erde/Mond) zu verstehen, die der Erde im Rahmen des Systems (Erde/Sonne) u.s.w. Ein erster und wesentlicher Schritt hin zu einem Verständnis der Dynamik von Himmelskörpern besteht daher in der Analyse des allgemeinen Zweikörper Problems. Dieses ist durch

definiert, wobei \mathbf{r}_i und $m_i, i = 1, 2$ Lagekoordinate bzw. Masse zweier Körper sind (vgl. Fig.1.16).



Abbildung 1.16: Definition von Koordinaten und Kräften im Zweikörperproblem

In (1.14) sind wir vor das Problem gestellt, ein System von sechs Freiheitsgraden zu lösen, eine im allgemeinen nicht zu schaffende Aufgabe. An dieser Stelle kann man sich von den Vereinfachungen überzeugen, die die Anwesenheit von Symmetrien bzw. Erhaltungsgrößen mit sich bringen:

Reduktion der Freiheitsgrade I: Gesamtimpulserhaltung

Oben hatten wir gezeigt, daß für *N*-Teilchensysteme, also insbesondere für Zwei-Teilchensysteme, der Gesamtimpuls erhalten ist. Zur effizienten, die Gesamtimpulserhaltung berücksichtigenden Formulierung des Problems führen wir eine Reihe neuer Größen ein (wobei sich die meisten als N = 2 Spezialisierungen von oben allgemein definierten Größen ergeben):

Gesamtmasse:
$$M \equiv m_1 + m_2$$

reduzierte Masse: $m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
Schwerpunktskoordinate: $\mathbf{R} \equiv \frac{1}{M}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)$
Relativkoordinate:
$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

Gesamtimpuls: $\mathbf{P} \equiv M\dot{\mathbf{R}}$
Relativimpuls: $\mathbf{p} \equiv m\dot{\mathbf{r}}$.

Wie oben allgemein gezeigt, ist der Gesamtimpuls erhalten, $\dot{P} = 0$. Das beinhaltet eine Reduktion der Freiheitsgrade, und damit der Zahl der zu lösenden Gleichungen, von sechs auf drei. (Daß Erhaltungsgrößen zu einer Reduktion der Zahl der Gleichungen führen, liegt daran, daß bei Anwesenheit von z.B. n erhaltenen Größen in einem System mit f Unbekannten f - n Variablen dadurch fixiert sind, daß sich die n ausgezeichneten Variablen nicht ändern dürfen.) Die Variablenreduktion läßt sich explizit machen, indem wir die Newton Gleichungen in den neuen Variablen formulieren. Substitution von

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r},$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}$$

in die Bewegungsgleichung führt auf

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F},$$

wobei wir der Einfachheit der Notation halber $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_{12}$ definiert haben. Zusammen mit $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, sind diese Gleichungen dem obigen System äquivalent.

Anschaulich kann man sich die Konsequenzen der Gesamtimpulserhaltung so vorstellen: Die Bewegung des Schwerpunkts der zwei Körper ist gleichförmig, trivial. Der interessante Teil der Dynamik spielt sich in den inneren Freiheitsgraden ab. Die reduzierte Gleichung für \mathbf{r} besagt, daß die intrinsische Bewegung der eines *einzelnen* Teilchens der Masse m in einer vorgegenen Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ äquivalent ist. Nach der Abspaltung der Gesamtbewegung können wir das Zweikörperproblem also effektiv wie ein Einkörperproblem behandeln. Für die Kraft dieses reduzierten Problems gilt $\mathbf{F}(\mathbf{r}) || \mathbf{r}$. Man bezeichnet Kräfte mit dieser Eigenschaft als **Zentralkräfte**. Darüberhinaus gilt $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(r)$, d.h. die Kraft hängt nur vom Abstand des effektiven Körpers vom Ursprung ab.

Reduktion der Freiheitsgrade II: Drehimpulserhaltung

Daß es sich bei dem reduzierten Problem um eine abstandsabhängige Zentralkraft handelt, führt zu einer weiteren Reduktion der Variablen. Kräfte diesen Typs haben zwei wichtige Eigenschaften, die sie vor generischen Kräften auszeichnen: (i) sie sind konservativ, (ii) der Drehimpuls um den Ursprung ist erhalten. Zu (i), per definitionem, kann \mathbf{F} als,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{e}_r$$

geschrieben werden, wobei **F** eine skalare Funktion und \mathbf{e}_r der radiale Einheitsvektor bezüglich des Ursprungs $\mathbf{r} = 0$ ist. mit $U(r) \equiv -\int_0^r F(r')dr'$ gilt

$$\mathbf{F} = -\nabla U,$$

wobei wir benutzt haben, daß der in Polarkoordinaten ausgedrückte Gradient die Form

$$\nabla f = \partial_r f \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta f \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi f \mathbf{e}_\phi$$

hat.

Aufgabe: Rekapitulieren Sie die Form der wichtigsten Vektordifferentiationen $\operatorname{grad} f \equiv \nabla f$, div $\mathbf{v} \equiv \nabla \cdot \mathbf{v}$ sowie rot $\mathbf{v} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ (f: Funktion, \mathbf{v} : dreidimensionaler Vektor) in kartesischen, Zylinder- und Polarkoordinaten. Wie rechnet man diese Operatoren allgemein von einem System auf ein anderes um?

Die Erhaltung des Drehimpulses bezüglich des Urspungs läßt sich unmittelbar nachrechnen. Mit

$$l = r \times p$$

haben wir

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + F\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r = 0.$$

da das Kreuzprodukt paralleler Vektoren verschwindet. Dem obigen Argument nach steht zu erwarten, daß die Erhaltung des Drehimpulses zu einer weiteren Reduktion des Zahl zu lösender Gleichungen führt. Um dies zu erkennen, müssen wir jedoch ein wenig mehr arbeiten als zuvor. Zunächst einmal stellt man fest, daß die Bewegung bei erhaltenem Drehimpuls nicht beliebig verläuft, sondern auf eine Ebene eingeschränkt ist. Es handelt sich dabei um die Ebene E, die durch den Ursprung geht und senkrecht zum Drehimpuls I liegt (vgl. Fig. 1.17). Zu jedem beliebigen Zeitpunkt liegen sowohl die Geschwindigkeit **v** als auch der Lagevektor **r** des Teilchens in dieser Ebene (da ja beide senkrecht auf I stehen.)



Abbildung 1.17: Zur Dynamik im Zentralkraftproblem; die Bewegung findet in einer Ebene senkrecht zum erhaltenen Drehimpuls statt.

In der Bewegungsebene führen wir ebene Polarkoordinaten (r, ϕ) bezüglich des Ursprungs ein. Es ist außerdem zweckmäßig, die Ebene nicht durch kartesische Koordinatenvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, sondern durch ein (mitbewegtes!) orthonormiertes System polarer Einheitsvektoren aufzuspannen, das durch die Position des Teilchens definiert ist. Dieses System ist explizit durch

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_1 \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \phi, \qquad (1.15)$$

$$\mathbf{e}_{\phi} = -\mathbf{e}_1 \sin \phi + \mathbf{e}_2 \cos \phi \tag{1.16}$$

gegeben. Es ist wichtig, sich zu vergegenwärtigen, daß das System $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\phi}\}$ der Bewegung des Teilchens folgt. (Sowohl \mathbf{e}_r als auch \mathbf{e}_{ϕ} ändern sich mit der Zeit.) In der Tat rechnet man leicht nach, daß

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\phi} \mathbf{e}_{\phi}, \ \dot{\mathbf{e}}_{\phi} = -\dot{\phi} \mathbf{e}_r.$$

Die Position des Teilchens ist zu jedem Zeitpunkt durch

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

gegeben, der Betrag des erhaltenen Drehimpulses durch $l \equiv |\mathbf{l}| = mr^2 \dot{\phi}$. Mit den obigen Formeln für $\dot{\mathbf{e}}_{r,\phi}$ ist es eine Sache von wenigen Zeilen, die Newton Gleichungen in Polarkoordinaten auszudrücken. Das Ergebnis ist:

$$m\left[(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r+(2\dot{r}\dot{\phi}+\ddot{r}\phi)\mathbf{e}_\phi\right]=F\mathbf{e}_r,$$

oder, komponentenweise ausgeschrieben,

$$\phi : m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0 \Leftrightarrow d_t(mr^2\dot{\phi}) = 0,$$

$$r : m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = F.$$

Die Gleichung für die ϕ -Komponente besagt also nichts anderes als die uns schon bekannte Erhaltung des Drehimpulses. Unter Verwendung von $\dot{\phi} = l/(mr^2)$ können wir die zweite Gleichung in eine Form bringen, die ausschließlich die Koordinate renthält:

$$m\ddot{r} = F + \frac{l^2}{mr^3}.$$

Damit sind wir am vorläufigen Ziel. Unter Verwendung der Symmetrien des Problems, Gesamt- und Drehimpulserhaltung ist es gelungen, die Zahl der zu lösenden Gleichungen von sechs auf nur noch eine zu reduzieren. Die Lösung dieser einzelnen gewöhnlichen Differentialgleichung ist ein durchaus machbares Problem, dem wir uns nun zuwenden wollen.

Diskussion des Radialproblems

Wir haben die Newton Gleichungen des Zweikörper Problems auf eine einzelne, die Dynamik der (relativen) Radialkoordinate beschreibende Gleichung reduziert. Es ist sinnvoll, sich vor der expliziten Lösung dieser Gleichung etwas mit ihrer allgemeinen Struktur zu befassen.

Zunächst einmal können wir unter Ausnutzung von $l^2/(mr^3) = -\partial_r l^2/(2mr^2)$, die Radialgleichung zu

$$m\ddot{r} = -\partial_r \left(U + \frac{l^2}{2mr^2} \right) \tag{1.17}$$

umschreiben. Das ist die Gleichung einer eindimensionalen Bewegung in einem effektiven Potential

$$V = U + \frac{l^2}{2mr^2}$$



Abbildung 1.18: Effektives Potential, V eines Zentralkraftproblems mit Potential U und Drehimpuls l.

Man bezeichnet den Zusatzterm $\frac{l^2}{2mr^2}$ als das **Zentrifugalpotential**. In ihm ist der Einfluß der Rotationsbewegung um den Ursprung auf die Radialdynamik kodiert. Es handelt sich bei der Zentrifugalkraft $-\partial_r \frac{l^2}{2mr^2}$ übrigens um eine Scheinkraft im Sinne der oben gegebenen Definition. Sie kommt dadurch zustande, daß wir die Bewegung von einem mitbewegten und für $l \neq 0$ auch beschleunigten Bezugssystem aus betrachten.

Die Gesamtenergie des effektiven eindimensionalen Problems ist durch

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V \tag{1.18}$$

gegeben. Diese Größe ist (i) erhalten (eine Tatsache, die man unter Verwendung von (1.17) leicht nachrechnet) und (ii) identisch mit der Energie des Problems in seiner ursprünglichen, dreidimensionalen Formulierung,

$$E = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + U.$$

In der Tat ist

$$\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + U = \frac{m}{2}[d_t(r\mathbf{e}_r)]^2 + U =$$
$$= \frac{m}{2}(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_{\phi})^2 + U = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \left(U + \frac{l^2}{2mr^2}\right) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V.$$

Die Energieerhaltung gestattet es nun, die Newton Gleichung in einfacher Weise zu lösen. Mit

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}$$

ergibt sich

$$t = \int_0^t dt = \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{1}{\frac{dr}{dt}} dr = \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}}.$$
 (1.19)

Für ein gegebenes Potential V(r) läßt sich das Integral auf der rechten Seite (analytisch oder zumindest numerisch) ausführen und wir erhalten einen funktionalen Zusammenhang t = G(r(t)), wobei $G(r(t)) = \int_{r(0)}^{r(t)} \left(\frac{2}{m}(E - V(r))\right)^{-1/2}$. Auflösung dieser Gleichung nach t (eine Operatation, die rein algebraisch ist, also keine Integration/Differentiation mehr involviert) führt dann auf den gesuchten Zusammenhang $r(t) = G^{-1}(t)$, wobei G^{-1} die Umkehrfunktion zu G bezeichnet.

Zur vollständigen Charakterisierung der Bewegung brauchen wir noch den Zusammenhang zwischen Radius r(t) und Winkelkoordinate $\phi(t)$. In ähnlicher Weise wie oben, läßt sich dieses Problem auf eine Integration zurückspielen: Mit

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{dr} = \dot{\phi}\frac{1}{\frac{dr}{dt}}$$

ergibt sich

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{l}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E-V)}}.$$

$$\phi = l \int \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E-V)}}$$
(1.20)

bzw.

Gleichungen (1.19) und (1.20) stellen – bis auf noch ausstehende Integrationen – eine vollständige Lösung des Problems dar. Man sagt, das Problem sei 'bis auf Quadraturen' gelöst.

Um einen Uberblick über das Aussehen der Lösung für ein vorgegebenes Potential zu bekommen, können wir nun (i) das Integral (1.20) explizit ausführen, eine Aufgabe, die sich im allgemeinen nur numerisch lösen läßt, oder (ii) die Differentialgleichung für r und ihre Lösung erst einmal qualitativ untersuchen. Wir gehen so vor, daß wir zunächst einige qualitative Aspekte des Problems mit allgemeinem V besprechen und im Anschluß die quantitative Analyse eines wichtigen Spezialfalls beispielhaft durchführen.

Wir betrachten die in Fig. 1.18 dargestellte Situation eines effektiven Potentials mit einem lokalen Minimum bei einer gewissen Radialkoordinate r_0^{12} . Die Energie sei zunächst so gewählt, daß für zwei Punkte $r_{\min} < r_0 < r_{\max}$ das effektive Potential der Gesamtenergie des Teilchens gleicht, $E = V(r_{\min/\max})$. Man nennt den Radialwert $r_{\max} (r_{\min})$ den **Aphel (Perihel)** der Bewegung. An diesen beiden Punkten gilt $\dot{r} = 0$ (vgl. (1.18)), die Radialkomponente der Geschwindigkeit verschwindet. Anders als bei einer rein eindimensionalen Bewegung bedeutet das jedoch mitnichten, daß die Bewegung als ganzes zu einem Stillstand kommt. Aufgrund der Drehimpulserhaltung ist ja $\dot{\phi}$ stets nichtverschwindend, d.h. an Aphel und Perihel hat die Bewegung keine Radialkomponente, wohl aber eine senkrecht zum Radialvektor.

¹²Es gibt natürlich auch Potentiale ohne lokales Minimum. Z.B. sind die effektiven Potentiale repulsiv wechselwirkender Teilchen von diesem Typ. Siehe hierzu die Diskussion unten.



Abbildung 1.19: Qualitative Struktur der gebundenen Zentralkraftdynamik. Punkte größter Annäherung (Entfernung): Aphel (Perihel)

Qualtitativ kann man sich das so vorstellen, daß das Teilchen von irgendeinem Punkt $(r \in [r_{\min}, r_{\max}], \phi)$ mit sagen wir auswärts gerichteter Initialgeschwindigkeit $\dot{r}(0) > 0$ kommend nach außen läuft, dabei kinetische Energie verliert und schließlich, bei r_{\max} nicht mehr weiter kommt; es ist im Potential gefangen. Die radiale Bewegung kehrt ihre Richtung um, das Teilchen läuft nach innen bis es bei r_{\min} nicht weiter nach innen kommt, es dreht abermals um u.s.w. Zwischen je zwei Durchläufen von r_{\min} und r_{\max} ist ein Winkel

$$\phi = l \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E-V)}}$$

eingeschlossen. Falls dieser Winkel komensurabel mit 2π ist, $2\pi/\phi = n/m$, $n, m \in \mathcal{N}$ schließt die Bahn nach n Durchläufen. Man kann zeigen, daß im anderen, nichtschließenden Fall, die Bahn des Teilchens im durch r_{\min} und r_{\max} definierten Kreisring dicht liegt.

Mit anwachsender Energie des Teilchens wandert der Aphelpunkt immer weiter nach außen bis er schließlich im Unendlichen verschwindet. Physikalisch bedeutet dies, daß das Teilchen nicht länger im Potential eingefangen ist, sondern eine ungebundene Bewegung durchführt. In die Klasse solcher Bewegungen fallen auch repulsive Potentiale, also Potentiale, für die $-\partial_r U > 0$ eine nach außen weisende Kraft darstellt. Für solche U ist das effektive Potential monoton fallend und ein Punkt r_{max} existiert nicht. Nach Erreichens des Punktes größter Annäherung verschwindet jede Bahn wieder im Unendlichen.

Unsere bisherige Diskussion der Zentralkraftdynamik war eher qualitativ gehalten. Das liegt unter anderem daran, daß das Integral (1.20) im allgemeinen nicht lösbar ist. Im folgenden diskutieren wir eine sehr wichtige Ausnahme, nämlich den Fall von Potentialen der Form U(r) = -k/r. Dies ist das sogenannte

1.4.2 Keplerproblem

Für Potentiale vom Typ U(r) = -k/r, $k \in \mathbb{R}$ läuft das Zentralkraftproblem unter dem Namen 'Keplerproblem'¹³. Eine seiner Besonderheiten ist, daß die die Bewegung

 $^{^{13}\}mathrm{Zur}$ Motivation der Namensgebung, siehe unten.

1.4. BEISPIELE UND ANWENDUNGEN

beschreibenden Integrale geschlossen gelöst werden können. Daß wir dieses Problem hier in einigem Detail diskutieren, liegt nicht so sehr daran, daß seine Lösung für den weiteren Aufbau der Mechanik von besonderer Bedeutung wäre; das ist sie nicht. Der Grund ist vielmehr, daß der Fall U(r) = -k/r in Hinblick auf Anwedungen extrem wichtig ist. Zwei der wichtigsten Potentiale der Natur, das Gravitationspotential und das Coulombpotential sind von diesem Typ. Genauer gesagt, ist das **Graviationspotential** zweier im Abstand r befindlicher Körper der Massen m_1 und m_2 durch

$$U(r) = -g\frac{m_1m_2}{r}$$

gegeben, wobei g die Newton'sche Gravitationskonstante ist.

Info: Wir betrachten die Newton Gleichung eines Körpers der Masse m im Gravitationspotenital der Erde (Masse, $M \gg m$, Radius R):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U = -m\frac{Mg}{R^2}\mathbf{e}_r,$$

wobei wir angenommen haben, daß sich die Bewegung in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche abspiele und damit in der Kraft $r \approx R$ approximiert werden kann.

Der Punkt auf den wir hinauswollen ist, daß die Masse des Körpers, m, auf beiden Seiten der Gleichung auftritt. Ihre physikalische *Interpretation* auf den jeweiligen Seiten ist jedoch verschieden. Die Masse m links bezeichnet man als **träge Masse** des Körpers. Unabhängig davon, was für eine Kraft rechts steht, drückt dieser Massenparameter das 'Unwillen' des Körpers gegen Beschleunigung aus. (Je größer die träge Masse, desto geringer, bei vorgegebener Kraft, die Beschleunigung.) Den Parameter m rechts, bezeichnet man als **schwere Masse**: je schwerer ein Körper, desto größer die Kraft, die auf ihn im Gravitationspotential wirkt. Das Gravitationsgesetz oben drückt nun das Prinzip

schwere Masse = träge Masse

aus. Die Beschleunigug von Körpern im Gravitationspotential ist von der trägen Masse unabhängig, eine Entdeckung, die Galilei im Rahmen seines legendären Experiments auf dem Turm von Pisa machte. (Galilei ließ Kugeln verschiedener Masse vom Turm herabfallen und fand heraus, daß sie in gleicher Zeit (\rightsquigarrow gleiche Beschleunigung) am Boden ankamen.) Die Form des Gravitationspotentials $U = -gm_1m_2/r$ drückt diese *experimentelle* Tatsache aus. Man muß sich aber klarmachen, daß das Gesetz im Rahmen der Mechanik nicht 'bewiesen' werden kann. Tatsächlich ist diese Gleichheit von schwerer und träger Masse in keiner Weise trivial begründbar. Das Problem ihrer Identifikation bildete einen der Hauptanstoßpunkte zur Entwicklung Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie.

Das **Coulombpotential** zweier Punktladungen q_1 und q_2 ist

$$U(r) = \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Ein gutes Verständnis der Keplerproblems ist daher für die Beschreibung von Problemen wie Planetenbewegungen, der Bewegung wechselwirkender geladener Teilchen u.s.w. unabdingbar. Wir substituieren U = -k/r in (1.20) und erhalten

$$\phi = l \int \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m\left(E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = l \int \frac{dr}{r} \frac{1}{\sqrt{2m\left(Er^2 + kr - \frac{l^2}{2m}\right)}} = arccos\left(\frac{p-r}{\epsilon r}\right),$$

wobei wir die Parameter

$$p \equiv \frac{l^2}{km},$$

$$\epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

definiert haben.

Aufgabe: Untersuchen sie die $\sqrt{-Definition}$ von ϵ . Was passiert für $E < -mk^2/(2l^2)$? Sind solche Werte der Energie physikalisch zulässig?

Wir lösen nach r auf und erhalten

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi} \tag{1.21}$$

Dies ist die oben angekündigte geschlossene Lösung des Problems. Wir diskutieren ihr Verhalten für die beiden Fälle positiver und negativer Energie E getrennt.

Negative Energie: Gebundene Bewegung

Für E < 0 ist $\epsilon < 1$. In diesem Fall handelt es sich bei (1.21) um die Parameteriesierung einer Ellipse in der sogenannten Fokaldarstellung.

Info: Eine Ellipse ist durch zwei Parameter festgelegt. Eine Möglichkeit der Parameterisierung besteht in (vgl. Fig. 1.20)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wobei a und b die sogenannten Halbachsen und (x, y) kartesische Koordinaten bezüglich des Ursprungs sind. Eine Alternative besteht darin, die Ellipse über ihre **Fokalpunkte** festzulegen. Wir definieren hierzu die zwei Größen

Parameter :
$$p = \frac{b^2}{a}$$
,
Exzentrizität : $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$.



Abbildung 1.20: Zu den verschiedenen Möglichkeiten, eine Ellipse zu parameterisieren.

Bei den Fokalpunkten $F_{1,2}$ handelt es sich dann um zwei Punkte, die sich im Abstand $\pm c$,

$$c = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

vom Ursprung auf der großen Halbachse befinden. Die Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstände r_1 und r_2 eine konstante Summe $r_1 + r_2 = 2a$ haben (Erinnern sie sich an die Bindfadenkonstruktion der Ellipse?). Man rechnet leicht nach, daß die Polarkoordinatendarstellung (r, ϕ) der Ellipse bezüglich eines der Fokalpunkte durch

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

gegeben ist.

Das Gesetz (1.21) besagt also, daß die gebundene Bewegung für ein -k/r Potential sich auf ellipsoidalen Bahnen abspielt (vgl. Fig. 1.21). Dieses und noch zwei andere Resultate wurden erstmals von Kepler rein empirisch, durch Beobachtung der Bahn des Mars, im frühen 17. Jahrhudert gefunden:

- ▷ Erstes Kepler'sches Gesetz: Die Planetenbahnen sind Ellipsen.
- ▷ Zweites Kepler'sches Gesetz: Der Radiusvektor (Fahrstrahl) von der Sonne zu den Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- ▷ Drittes Kepler'sches Gesetz: Das Verhältnis der Kuben der großen Halbachsen [der planetaren Ellipsen] zu den Quadraten der Umlaufzeiten ist für alle Planeten eines gegebenen Planetensystems dasselbe.

Das erste Kepler'sche Gesetz haben wir gerade selbst gefunden. Beim zweiten handelt es sich um den Satz von der Drehimpulserhaltung in Verkleidung: Zu einer vorgegebenen Zeit befinde sich das Teilchen (Planet) bei Abstand $\mathbf{r}(t)$ relativ zum Ursprung¹⁴. Zur Zeit $t+\delta t$, δt klein, befindet es sich bei $\mathbf{r}(t+\delta) \simeq \mathbf{r}(t)+d_t \mathbf{r}(t)\delta t$. Ele-

¹⁴An dieser Stelle könnte Verwirrung entstehen. Wieso behaupten wir der Ursprung des Zweikörpersystems Planet/Sonne stimme mit der Sonnenposition überein? Per Konstruktion han-



Abbildung 1.21: Zum ersten und zweiten Kepler Gesetz.

mentare Vektoralgebra zeigt, daß die dabei eingeschlossene Fläche (vgl. die schraffierte Fläche in Fig. 1.21) durch

$$S(t,\delta t) = \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t+\delta t)| = \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)|\delta t = \frac{1}{2m}l(t)\delta t,$$

gegeben also proportional zum zeitunabhängigen Drehimpuls ist: Die pro Zeit δt eingeschlossene Fläche ist konstant. (Der rechnerischen Einfachheit halber haben wir dieses Resultat für infinitesimale Zeiten δt abgeleitet. Iteration des Arguments zeigt aber, daß es für beliebige Zeiten Gültigkeit hat.)

Der Beweis des dritten Gesetzes läuft auf einige Substitutionen bereits abgeleiteter Resultate hinaus: Aus dem zweiten Kepler Gesetz folgt, daß die Gesamtfläche der Ellipse durch

$$\pi ab = \frac{l}{2m}T$$

gegeben ist, wobei T die Umlaufzeit bezeichnet. Kombination mit $b = (pa)^{1/2}$ und der Definition von p führt auf $a^3/T^2 \propto k/m$. Nun ist für das Gravitationspotential eines Planeten der Masse m_p in bezug auf die Sonne (Masse m_s) $k = gm_pm_s$. Wegen $m_s \gg m_p$ ist die reduzierte Masse des Problems ist in guter Näherung $m \approx m_p$. Damit ergibt sich $a^3/T^2 \propto m_s$ unabhängig von den Eigenschaften (Masse, Drehimpuls u.s.w.) des jeweiligen Planeten. Beachten Sie jedoch, daß das dritte Kepler'sche Gesetz nur Gültigkeit für das Gravitationsproblem stark ungleichgewichtiger Partner hat.

Positive Energie: Ungebundene Bewegung

Für E > 0 sind wir in der oben allgemein diskutierten Situation eines effektiven Potentials ohne Aphelpunkt. In der allgemeinen Lösung (1.21) ist $\epsilon > 1$. In diesem Fall beschreibt (1.21) keine Ellipse mehr aber ein artverwandtes Objekt, nämlich eine Hyperbel.

Info: Eine Hyperbel ist wie eine Ellipse durch zwei Parameter festgelegt. In kartesischen

delt es sich beim Ursprung doch um die Schwerpunktskoordinate des Systems, der i.A. nicht mit einer der beiden Körperpositionen übereinstimmen wird. Der Grund dafür, daß das beim Planetenproblem *effektiv* doch der Fall ist, ist das die Sonne unverhältnismäßig viel schwerer ist als jeder Planet. Zur Illustration: Setzen sie für das System Erde/Sonne die Schwerpunktskoordinate mit dem Sonnenradius in Bezug!



Abbildung 1.22: Zu den verschiedenen Möglichkeiten, eine Hyperbel zu parameterisieren.

Koordinaten ist sie durch

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

parameterisiert, wobei man a bzw. b als relle bzw. imaginäre Halbachsen bezeichnet (vgl. Fig. 1.22). Ähnlich wie bei der Ellipse definieren wir

Parameter :
$$p = \frac{b^2}{a}$$
,
Exzentrizität : $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$.

Die Fokalpunkte $F_{1,2}$ der Hyperbel sind zwei Punkte, die sich im Abstand $\pm c$,

$$c = \frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

vom Ursprung auf der x-Achse befinden. Die Hyperbel läßt sich nun alternativ als die Menge aller Punkte definieren, deren Abstände $r_{1,2}$ zu den Fokalpunkten konstante *Differenz* haben. Es ergeben sich zwei Hyperbeläste, einer mit $r_1 - r_2 = +2a$, der andere mit $r_1 - r_2 = -2a$. Die Polarkoordinatendarstellung (r, ϕ) des negativen (x < 0) und positiven (x > 0) Hyperbelastes bezüglich des Fokalpunkts F_1 ist durch

$$x < 0: r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\phi)} \qquad -\epsilon^{-1} \le \phi \le 1,$$

$$x > 0: r = -\frac{p}{1 + \epsilon \cos(\phi)} \qquad -1 \le \phi \le -\epsilon^{-1},$$
 (1.22)

gegeben.

Gleichung (1.21) besagt also, daß ein Teilchen positiver Energie sich auf einer Hyperbelbahn bewegt. Das Kraftzentrum liegt in einem der Fokalpunkte der Hyperbel. O.B.d.A nehmen wir an, daß es sich um den in Fig. 1.23 mit o bezeichneten Punkt handelt.

Aber welcher der beiden Hyperbeläste entspricht einer physikalischen Bewegung, beide oder nur einer und wenn ja, welcher? Eine Idee davon, welcher der Äste für vorgegebenes Potential der Richtige ist, bekommt man durch Inspektion von Fig. 1.23: Der rechte Ast weicht in gewisser Weise vor dem Kraftzentrum zurück, der



Abbildung 1.23: Ungebundene Bewegungsbahn für den Fall attraktiver und repulsiver Potentiale.

linke schließt es ein. In der Tat ist der rechte (linke) Ast für repulsive (attraktive) Potentiale der physikalische, was man folgendermaßen sieht. Für ein repulsives (attraktives) Potential ist der Parameter p in (1.21) negativ (positiv). Andererseits muß die Radialkoordinate r grundsätzlich positiv sein. Das bedeutet daß für ein (repulsives) attraktives Potential die untere (obere) der Parameterisierungen in (1.22) die richtige ist.

Damit wollen wir die Diskussion des Keplerproblems beschließen. Es soll an dieser Stelle nocheinmal betont werden, daß wir das k/r-Potential in erster Linie aufgrund seiner Bedeutung für physikalische Anwendungen diskutiert haben. In Hinblick auf die konzeptionelle Entwicklung der Mechanik hat dieses Problem untergeordnete Bedeutung, insofern nämlich, als es sich um ein gechlossen lösbares handelt. Tatsächlich ist es neben dem trivialen Fall der freien Bewegung und dem harmonischen Oszillator das mehr oder weniger einzige Problem der Mechanik, das exakt lösbar ist¹⁵. Insofern ist die Analyse dieses Abschnitts – eine manchmal seltsam unmotiviert scheinende Kette von Substitutionen und Integraltransformationen – auch untypisch für das 'gewöhnliche' Arbeiten der Mechanik.

In Anbetracht der Tatsache, daß die überwältigende Mehrheit der in der Praxis auftauchenden Probleme auf nicht-lösbare Differentialgleichungen führt, ist es von besonderer Wichtigkeit, Methoden zu kennen, die eine *allgemeine* Charakterisierung mechanischer Bewegungen erlauben. Im nächsten Abschnitt sollen einige solcher Konzepte für den vergleichsweise einfachen Fall eindimensionaler Probleme eingeführt werden.

1.4.3 Allgemeine Charakerisierung von Bewegungen (in Einer Dimension)

Wie bereits mehrfach gesagt, können die Newton Bewegungsgleichungen nur in einer geringen Zahl von Ausnahmefällen gelöst werden. Es ist daher besonders wichtig,

¹⁵Man kann sogar soweit gehen zu sagen, daß der harmonische Oszillator das einzig wirklich lösbare System ist. Mittels einer cleveren Variablentransformation[] ist es nämlich möglich, das Kepler Problem auf das Oszillatorproblem zurückzuspielen. (Die freie Bewegung ist natürlich auch ein Oszillatorproblem, nämlich eines mit Potential 0.)

effiziente Verfahren zu kennen, die eine qualitative Charakterisierung von Bewegungstypen auch bei Abwesenheit geschlossener Lösungen erlauben. In diesem Abschnitt sollen einige solcher Konzepte vorgestellt werden, und zwar für den Fall ein-dimensionaler Bewegungen. Die Einschränkung auf eine Dimension ist dadurch motiviert, daß dieser Fall (i) besonders einfach ist und (ii) anders als in höheren Dimensionen eine Lösung der Newton Gleichungen in einer Dimension stets angegeben werden kann und damit die Aussagen der qualitativen Analyse kontrolliert werden können.

Qualitative Untersuchungen mechanischer Bewegungen führt man am zweckmäßigsten im Phasenraum durch. Daß der Phasenraum eine besonders gut geeignete Grundlage zur Beschreibung von Bewegungen darstellt, läßt sich anhand eines Beispiels illustrieren, das wir bereits diskutiert hatten, nämlich des harmonischen Oszillators. Betrachten wir zunächst die Charakterisierung der Bewegung anhand einer expliziten Lösung (1.13) der Bewegungsgleichung. Jede solche Lösung ist durch einen Satz von Anfangsbedingungen festgelegt: Man muß die Information vorgeben, wo das in Frage kommende Teilchen zu einer gewissen Zeit gestartet wurde und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit dies geschah. Für den speziellen Fall einer bei q_{max} mit Geschwindigkeit 0 gestarteten Bewegung führt das z.B. auf die Lösung (1.13), im allgemeinen jedoch auf Ausdrücke, die zwar ähnliche funktionale Gestalt aber durchaus kompliziertere Parameterabhängigkeiten haben können. Es ist klar, daß diese auf expliziten Lösungen aufbauende Art, die Dynamik des Oszillators zu charakterisieren nicht besonders kompakt, geschweige denn anschaulich ist.



Abbildung 1.24: Phasenraumprotrait der Bewegung eines harmonischen Oszillators

Vergleichen wir das mit der in Fig. 1.24 skizzierten Darstellung der Bewegung im Phasenraum. Die Energieerhaltungsrelation (vgl. Gl.(1.11))

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

besagt, daß die Bewegungsbahnen im Phasenraum die Form von Ellipsen annehmen. Jede dieser Ellipsen ist durch Angabe nur eines Parameters, nämlich der Energie E vollständig charakterisiert. Die Phasenraumdarstellung der Bewegung, man spricht auch von einem '**Phasenraumportrait**', enthält einerseits weniger, in gewisser Weise aber auch mehr Information als die oben angesprochene Charakterisierung durch Lösungen der Bewegungsgleichung. 'Weniger', weil wir die Bewegungsgleichungen ja zur Aufstellung der Ellipsen nicht haben lösen müssen und daher auch nicht wissen mit welcher Zeitabhängigkeit sie durchlaufen werden. 'Mehr', weil die Ellipsen nicht an einen spezifischen Satz von Anfangsbedingungen, und damit nicht an eine spezifische Bewegung gebunden sind. Eine Ellipse portraitiert vielmehr alle Bewegungen, deren initiale Phasenraumkoordinaten auf ihr liegen. (Erinnern Sie sich and die in Abschnitt 1.3.3 abgeleitete Tatsache, daß Bewegungen im Phasenraum durch Angabe einer Anfansgskoordinate \mathbf{x}_0 vollständig festgelegt sind. Für jedes \mathbf{x}_0 , das auf einer der Phasenraumellipsen des Oszillators liegt, wird die Bewegung auf eben dieser Ellipse bleiben.)

Die Vorgabe einer Anfangsbedingung bedeutet, daß man festlegt, daß das Teilchen sich zur Zeit t_0 bei einem gewissen Punkt im Phasenraum befindet. Damit ist festgelegt, daß es sich für alle Zeiten auf der durch diesen Punkt gehenden Phasenraumellipse befinden wird. Durch Angabe einer Ellipse sind alle Bewegungen, die mit der entsprechenden Energie ablaufen, unabhängig von den spezifischen Anfangsbedingungen, erfasst. Zugegebenermaßen ist die Darstellung im Phasenraum, zumindest auf den ersten Blick, weniger anschaulich als die direkte Ortsraumdarstellung der Bewegung. Das wird aber mehr als aufgewogen durch die Tatsache, daß die Phasenraumdarstellung der Bewegung eindeutig ist. Sobald ich die Phasenraumkoordinaten eines Teilchens x = (p, q) zu einer gewissen Zeit t_0 kenne, kann ich, im Prinzip wenigstens, seine Bewegung eindeutig konstruieren. Im oben angesprochenen Beispiel des Oszillators, z.B., wird das Teilchen auf derjenigen Ellipse bleiben, die durch (p,q) geht. Das ist mit der nicht-eindeutigen Ortsraumdartellung zu vergleichen. Die Angabe einer Orstraumkoordinate reicht nicht zur Charakterisierung einer Bewegung aus. Sie muß durch Angabe eines in der Ortsraumdarstellung 'unsichtbaren' Parameters, der Anfangsgeschwindigkeit nämlich ergänzt werden.

Die oben für den Fall des harmonischen Oszillators formulierten Eigenschaften von Phasenraumportraits haben allgemeine Gültigkeit. Der tatsächliche Wert solcher Beschreibungen, wird aber erst dann richtig deutlich, wenn wir es mit Problemen zu tun haben, deren Lösungen nicht mehr geschlossen ermittelt werden können. Ein Beispiel eines solchen Problems ist durch das in Fig. 1.25 oben skizzierte Potential gegeben. Für dieses Potential lassen sich die Lösungen der Bewegungsgleichungen sicher nicht geschlossen angeben. Trotzdem können wir die Bewegung durch das in Fig. 1.25 unten skizzierte Phasenraumportrait qualitativ charakterisieren.

Wie stellt man solche Portraits auf? Zunächsteinmal gibt es zwei allgemeine Regeln (deren Gültigkeit auch nicht an den hier diskutierten Fall einer Raumdimension gebunden ist):

- ▷ Phasenraumkurven schneiden sich nicht. (Das ist eine unmittelbare Konsequenz der in Abschnitt 1.3.3 Eindeutigkeit der Phasenraumkurven; ein Schnittpunkt wäre Anfangspunkt zweier Kurven → Widerspruch.)
- Phasenraumkurven liegen immer auf Mannigfaltigkeiten konstanter Energie. (Folgt aus Energieerhaltungssatz.)



Abbildung 1.25: Phasenraumportrait einer Bewegung mit komplexen Potential. Die Numerierung bezieht sich auf Werte fester Energie.

In allgemeinen Dimensionen kann die Aufstellung von Phasenraumportraits trotz dieser zwei Einschränkungen bliebig komplizert sein. (Bedenken Sie, daß der Phasenraum bereits eines zweidimensionalen Problems vierdimensional ist!). Wir werden auf diesen Punkt später, in Zusammenhang mit der Beschreibung chaotischer Bewegungen zurückkommen. In einer Dimension sind wir jedoch in der glücklichen Lage, daß die die Energieerhaltungsrelation

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

die Phasenraumkurven bereits festlegt. Abgeschen von Punkten für die $\partial_q E = \partial_p E = 0$, können wir die Relation nach p = F(q; E) auflösen und damit die Phasenraumkurven explizit konstruieren.

Aufgabe: Was läßt sich über Punkte mit $\partial_q E = \partial_p E = 0$ sagen? Können solche Punkte überall im Phasenraum liegen? Wie sieht die 'Bewegung' bei solchen Punkten aus?

Für einige Energien (durchnumeriert) sind solche Kurven in Fig. 1.25 unten qualitativ skizziert. Um sich solche Kurven zu veranschaulichen, ist es hilfreich, das Bild einer in der Potentiallandschaft rollenden Kugel vor Augen zu haben. Im Laufe Ihrer Bewegung (q-Koordinate) wandelt die Kugel potentielle in kinetische (p-Koordinate) um und umgekehrt. Die Summe beider Anteile bleibt konstant.

Aufgabe: Veranschaulichen Sie sich im Rahmen dieses Bildes die in Fig. 1.25 durchnumerierten Kurven!

Was einen auf den ersten Blick stutzig macht, ist das es auf der p = 0-Achse der Figur zwei Punkte gibt, die der oben formulierten Regel der Abwesenheit von Schnittpunkten scheinbar wiedersprechen. Diese singulären Punkte sind offenbar lokalen Potentialmaxima zugeordnet. Damit fallen sie in die oben angesprochene Klasse von Punkten mit $\partial_q E = \partial_p E = 0$. Vergleich mit (1.10) zeigt, daß in diesen Punkten $\dot{\mathbf{x}} = 0$ gilt, es handelt sich um (instabile) Gleichgewichtspunkte. (Die Kugel ruht auf dem Potentialberg.) Daraus erklärt sich auch, daß tatsächlich kein Widerspruch zu der Regel oben vorliegt. Die einem solchen Punkt zugeordnete 'Kurve' bleibt ein Punkt. Sie ist singulär aber dennoch eindeutig und damit nicht in Widerspruch zu der Regel. Es liegt in einem solchen Punkt auch nur scheinbar eine Kreuzung vor. Die zulaufenden Kurven erreichen den singulären Punkt auf der p = 0-Achse nicht in endlicher Zeit, sie laufen also auf den Punkt zu, erreichen ihn jedoch nie.

Aufgabe: Zeigen sie, daß die zwischen dem Durchlaufen zweier q-Koordinaten q_1 und q_2 vergangene Zeit durch

$$\Delta t = \int_{q_1}^{q_2} dq \sqrt{\frac{m}{2(E - V(q))}}$$

gegeben ist. Es sei nun q_s die Ortskoordinate eines singulären Punktes. Entwickeln sie Vum q_s und zeigen sie, daß die zum Erreichen von q_s benötigte Zeit divergiert.

Man bezeichnet eine in einem solchen singulären Punkten terminierende Kurve als Separatrix. Der Name erklärt sich daraus, das eine solche Kurve auf der Grenze zwischen mehreren qualitativen verschiedenen Bewegungstypen liegt (z.B. gebundene Bewegung rechts links vom Potentialberg, Rollen über den Potentialberg hinweg u.s.w.).

Aufgabe: Verwenden Sie die Energierelation und die Entwicklung des Potentials um einen singulären Punkt q_s um zu zeigen, daß die Tangenten an die Separatrix durch

$$p = \pm \sqrt{-mV''(q_s)q}$$

gegeben sind.

Eine Regel, die man aus dieser Diskussion mitnehmen sollte, ist daß es bei der Untersuchung eines vorgegebenen Potentials immer sinnvoll ist, sich zunächst einmal auf seine Extrema zu konzentrieren

- ▷ In der N\u00e4he der Potentialminima l\u00e4\u00dft sich, wie oben diskutiert, die Bewegung als ein Oszillatorproblem behandeln.
- ▷ Den Potentialmaxima sind singuläre Punkte und Separatrix artige Lösungen zugeordnet.

Mittels einer Klassifikation der Extremalpunkte kann man sich so einen Überblick über die verschiedenen für das vorgegebene Potential realisierten Bewegungstypen verschaffen.

Später werden wir sehen, wie sich Elemente dieser Diskussion auf den Fall höherdimensionaler Probleme verallgemeinern.

1.4.4 Kleine Schwingungen

Eine oft in der Natur realisierte Grundsituation: gegeben sei ein System von N Massenpunkten, deren Position durch Angabe von f Koordinaten x_i festgelegt sei. Die 'Wechselwirkung' zwischen diesen Massen sei durch eine Potentialfunktion $V(\{x_i\})$ beschrieben, d.h. die Bewegungsgleichung des Systems laute

$$\frac{1}{m_i}\ddot{x}_i = \partial_{x_i}V \qquad i = 1, \dots, f,$$

wobei m_i die Masse des durch die *i*te Koordinate beschriebenen Körpers sei. Wir nehmen nun an, daß (i) die Abbildung $V : \mathbb{R}^f \to \mathbb{R}$ an dem Punkt $\bar{x} \equiv (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_f)$ ein Minimum besitze, und (ii) die Gesamtenergie des Systems, E, nur geringfügig oberhalb dieses Minimums liege. (Für eine Illustration dieser Ausgangslage im Falle f = 1, siehe Fig.) Wie läßt sich die Dynamik eines derartigen Systems beschreiben? Bevor wir uns mit dieser Frage auseinandersetzen, sei anhand einiger Beispiele die ihre Anwendungsrelevanz illustriert:

- \triangleright Z.B. könnte es sich bei dem System um ein *N*-atomiges Molekül handeln. Am Temperaturnullpunkt, T = 0, befindet sich das Molekül in seinem Grundzustand, also in einem Minimum der durch die chemische Bindung der Konstituenten beschriebenen Potentialfunktion. Eine (in der physikalischen Chemie sehr relevante Frage) ist nun, wie die Dynamik des Moleküls bei kleinen Temperaturen oberhalb des Nullpunkts aussieht.
- In einer klassischen Näherung kann man sich die Atome eines kristallinen Festkörpers als ein System von N Massen vorstellen, die durch elastische Bindungen ('Federn') aneinander gebunden sind. Ähnlich wie oben fragen wir, wie sich die Dynamik des Systems bei kleinen Temperaturen beschreiben läßt. Wie ändert sich die Dynamik, wenn man von einem regulären kristallinen Festkörper zu einem strukturell ungeordneten 'Glas' übergeht. (Letztere Frage ist nach wie vor in weiten Bereichen unbeantwortet.)
- ▷ Das oben aufgeworfene Grundproblem ist auch in Bereichen außerhalb der Naturwissenschaften realisiert. Zum Beispiel könnte es sich bei unserem System um eine Gruppe von N Personen handeln, deren Kaufverhalten durch Parameter x_i charakterisiert sei. Die gegenseitige Beeinflussung des Konsumverhaltens sei durch eine Funktion $R(\{x_i\})$ beschrieben, d.h. es bestehe ein funktionaler Zusammenhang $\dot{x}_i = \partial R(\{x_i\})^{16}$. Wie ändert sich das Konsumverhalten bei kleinen Auslenkungen um Gleichgewichtskonfigurationen \bar{x} mit $d_t \bar{x} = 0$.



Abbildung 1.26: Eindimensionale Visualisierung einer komplexen Potentialstruktur mit mehreren Minima. Für Energien nur wenig oberhalb eines dieser Minimuma kann das Potential harmonisch genähert werden, d.h. es liegt ein verallgemeinertes Oszillatorproblem vor.

Aufgrund der Voraussetzung, daß die Energie des Systems nur geringfügig oberhalb des Potentialminimums liege (man sagt auch, das System sei nur schwach 'angeregt'), ist der Abstand der Lagekoordinaten des System von der Gleichgewichtslage, $|x_i - \bar{x}_i|$ in gewisser Weise klein. (Warum?) 'Klein' bedeutet hier, daß die Bewegung auf Koordinatenbereiche eingeschränkt ist, für die sich das Potential durch eine **harmonische Näherung**, d.h. eine Entwicklung in zweite Ordnung in den Abweichungen $x_i - \bar{x}_i$ approximieren läßt:

$$V(x) \approx V(\bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_{x_i,x_j}^2 \Big|_{x=\bar{x}} V(x)(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j).$$
(1.23)

Mit der Notation $A_{ij} \equiv \frac{1}{m_i} \partial_{x_i, x_j}^2 \Big|_{x=\bar{x}} V(x)$ und $u_i \equiv x_i - \bar{x}_i$ stellt sich die genäherte Bewegungsgleichung als

$$\ddot{u}_i = -\sum_j A_{ij} u_j$$

dar. Konzeptionell handelt es sich hierbei um eine *lineare* Bewegungsgleichung zweiter Ordnung für die f Variablen u_i , d.h. eine Art höherdimensionaler Verallgemeinerung des eindimensionalen harmonischen Oszialltors. Antizipierend, daß die fschwach ausgelenkten Massenpunkte eine schwingende, d.h. in der Zeit periodische Bewegung ausführen werden, gehen wir in die linearisierte Bewegungsgleichung mit dem Ansatz

$$u_i(t) = \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t} z_i\right) \tag{1.24}$$

¹⁶Der formale Bezug zur Newtongleichung, d.h. einer Differentialgleichung *zweiter* Ordnung in der Zeit erklärt sich daraus, daß man letztere (s. Abschnitt 1.3.3) um den Preis einer Verdopplung der Zahl der Freiheitsgrade ja immer auf eine Differentialgleichung erster Ordnung transformieren kann.

1.4. BEISPIELE UND ANWENDUNGEN

ein, wobei $z_i \in \mathbb{C}$ ein komplexer Parameter und ω die zunächst noch unbestimmte Frequenz der Oszillation ist. (Wie stehen Anfangskoordinate $u_i(0)$ und -geschwindigkeit $\dot{u}_i(0)$ mit diesem Parameter in Beziehung?) Substitution in die Bewegungsgleichungen führt auf den Satz algebraischer (!) Gleichungen

$$z_i\omega^2 - \sum_j A_{ij}z_j = 0,$$

bzw. in kompaktifizierter Schreibweise

$$\left(\omega^2 \mathbf{1} - \hat{A}\right) z = 0,$$

wobei **1** die *f*-dimensionale Einheitsmatrix beziechnet, $\hat{A} = \{A_{ij}\}$ und $z = (z_1, \ldots, z_f)$. Die Lösbarkeit dieser Gleichung ist äquivalent zu der Forderung

$$\det\left(\omega^2 - \hat{A}\right) = 0. \tag{1.25}$$

Letztere Determinante ist ein Polynom f-ter Ordnung in der Variablen ω^2 (warum?), d.h. wir wissen, daß f Nullstellen ω_a^2 , $a = 1, \ldots f$ mit det $(\omega_a^2 - \hat{A}) = 0$ existieren. Eine sich aus der Physik des Systems (d.h. der inneren Struktur der Matrix \hat{A} ergebende) Zusatzforderung ist das $\omega_a \in \mathbb{R}^{17}$. Denn wäre ein $\omega_a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, dann würde ja $\exp(i\omega_a t) = \exp(i \operatorname{Re}(\omega_a)t - \operatorname{Im}(\omega_a)t)$ für positive (Im $(\omega_a) < 0$) oder negative (Im $(\omega_a) < 0$) Zeiten divergieren. Physikalisch bedeutete dies, daß wir entgegen unserer Grundannahme um eine instabile Gleichgewichtslage (vgl. Kapitel 5.2) entwickelt hätten. Die f Werte ω_a werden als **Eigenfrequenzen** des Systems bezeichnet¹⁸. Da für jede der Eigenfrequenzen ω_a , det $(\omega_a^2 - \hat{A}) = 0$, lassen sich f Eigenvektoren (man spricht auch von **Eigenmoden**) z_a mit

$$\left(\omega_a^2 - \hat{A}\right) z_a = 0 \tag{1.26}$$

angeben. Sobald das System von Eigenfrequenzen/-moden gefunden ist, ist unser Problem im wesentlichen gelöst. Alles was noch zu tun bleibt, ist den die Anfangsbedingung kodierenden Vektor z nach den z_a zu entwickeln

$$z = \sum_{a} c_a z_a, \qquad c_a \in \mathbb{R}.$$
(1.27)

Aufgabe: Begründen Sie die lineare Unabhängigkeit der Vektoren z_a .

 $^{^{17} \}mathrm{Der}$ Fundamentalsatz der Algebra besagt ja zunächst nur, daß f komplexe Lösungen existieren.

¹⁸Ein Einwand wäre, daß die Säkulargleichung det $(\omega_a^2 - \hat{A})$ ja nur die Quadrate der Eigenfequenzen, ω_a^2 bestimmt; woher wissen wir also, ob ω_a oder $-\omega_a$ die 'richtige' Eigenfrequenz ist? Tatsächlich ist die Wahl des Vorzeichens unerheblich. Denn letztlich werden wir ja nur den Realteil der Konstruktion $\exp(i\omega_a t)z_i$ mit frei wählbaren z_i betrachten. Vorzeichenwechsel von ω_a bei gleichzeitiger komplexer Konjugation $z_i \to z_i^*$ hat dabei keinen Effekt, d.h. die Wahl des Vorzeichens von ω_a ist irrelevant. Konventionshalber wählt diejenige Lösung mit $\omega_a \geq 0$.

Wie sich durch direkte Substitution in die Differentialgleichung unmittelbar nachrechnen läßt, ist die Lösung des Problems dann durch

$$u(t) = \operatorname{Re} \sum_{a} c_a z_a e^{i\omega_a t}$$

bzw. in Komponenten

$$u_i(t) = \operatorname{Re} \sum_a c_a z_{a,i} e^{i\omega_a t}$$
(1.28)

gegeben, wobei $z_{a,i}$ die *i*te Komponente des Vektors z_a bezeichnet. Offenbar handelt es sich hierbei um eine Überlagerung von f-Schwingungsvorgängen der charakteristischen Frequenzen ω_a (deshalb der Name 'Eigen'frequenzen). Ein dem System immanenter 'reiner' Schwingungsvorgang liegt vor, wenn alle Koeffizienten c_a bis auf einen verschwinden. Da in diesem Fall $u(t) \propto z_a \exp(i\omega_a t)$ kolinear zu z_a , bezeichnet man die z_a als 'Eigen'moden.

Der Übersicht halber fassen wir den Algorithmus zur Lösung des Schwingungsproblems nocheinmal kurz zusammen:

- 1. Finde ein Minimum \bar{x} der das Problem beschreibenden Potentialfunktion V(x).
- 2. Entwickle das Potential um \bar{x} in zweite Ordnung in dem Variablenvektor $u = x \bar{x}$.
- 3. Löse die sich hieraus ergebende lineare Differentialgleichung durch den oszillatorischen Ansatz (1.24).
- 4. Finde die f Eigenfrequenzen ω_a des Problems als Lösungen der Gleichung (1.25).
- 5. Finde die f Eigenmoden z_a durch Lösung von (1.26).
- 6. Entwickle die Anfangsbedingung gemäß (1.27) woraus die Lösung (1.28) folgt.

Zwei Wagen auf einer Schiene

Zur Illustration des Verfahrens betrachten wir die in Fig. ?? dargestellte Anordnung zweier sich unter dem Einfluß von Federn auf einer Schiene bewegender Wagen. Für moderate Auslenkungen aus der entspannten Lage läßt sich die Potentialfunktion einer Feder quadratisch nähern, so daß die das System beschreibende Potentialfunktion zu

$$V(x_1, x_2) = c(x_2 - x_1)^2 + d(x_1 + a)^2 + d(x_2 - a)^2$$

angesetzt werden kann. Hier sind x_1, x_2 die Lagekoordinaten der beiden Wagen, aus Symmetriegründen haben wir den Ursprung des Koordinatensystems symmetrisch zwischen die begrenzenden Wände gelegt, 2a is die Gesamtausdehnung des Systmes und die Konstante c(d) bemißt die Stärke der zentralen (äußeren) Federn.

Wie sieht die Bewegung der Wagen für kleine Auslenkungen um die Ruhelage aus? Ohne jedes Rechnen läßt sich vorhersagen, daß das System zwei unabhängige Typen



Abbildung 1.27: Zwei Wagen sich auf einer Schiene befindende Wagen sind durch Federn sowohl mit begrenzenden Wänden als auch untereindander verbunden. Wie sieht die Bewegung für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage aus?

von Schwingungen ausführen kann: kollektive Schwinungen der beiden Wagen gegen die Wände (bei gleichbleibenden Abstand $x_2 - x_1$) sowie Schwingungen der Wagen gegeneinander. Es steht zu erwarten, daß diese beiden Schwingungstypen durch die Eigenmoden des System charakterisiert sind. Um diese Vermutung quantitativ zu bestätigen, wenden wir das oben beschriebene Programm auf unser Programm an: Differentiation der Potentialfunktion führt auf zwei lineare Gleichungen $\partial_{x_1} V|_{x=\bar{x}} =$ $\partial_{x_2} V|_{x=\bar{x}} = 0$, aus dehnen sich unmittelbar die Gleichgewichtslage (1.))

$$\bar{x}_2 = -\bar{x}_1 = \frac{da}{2c+d}$$

ergibt. (Veranschaulichen sie sich dieses Resultat, indem sie die Grenzfälle $c/d \rightarrow 0$, $d/c \rightarrow 0$, sowie gleichstarker Federn c = d betrachten.) Mit (2.)) $u = x - \bar{x}$ ergibt sich das System von Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{u}_1 = 2cu_2 - 2(d+c)u_1,$$

$$m\ddot{u}_2 = 2cu_1 - 2(d+c)u_2,$$

wobei *m* die Wagenmasse ist. Substitution des Ansatzes (3.)) $u(t) = \text{Re } \exp(i\omega t)z$ führt auf das Gleichungssystem

$$-m\omega^2 z_1 = 2cz_2 - 2(d+c)z_1, -m\omega^2 z_2 = 2cz_1 - 2(d+c)z_2,$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\left(-\omega^2\mathbf{1}-\hat{A}\right)z=0,$$

wobei

$$\hat{A} = \frac{2}{m} \begin{pmatrix} -(d+c) & c \\ c & -(d+c) \end{pmatrix}$$

und 1 die zweidimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Als nächstes Lösen wir die (in der Variablen ω^2) quadratische Gleichung

$$\det(-\omega^2 \mathbf{1} - \hat{A}) = \left(\omega^2 - \frac{2}{m}(d+c)\right)^2 - \left(\frac{2c}{m}\right)^2 = 0$$

zu (4.))

$$\omega_1 = \sqrt{2d/m}, \qquad \omega_1 = \sqrt{(2d+4c)/m}.$$

Beachten sie, daß die Frequenz ω_1 von der Zentralfederstärke c unabhängig ist. Dies legt die Vermutung nahe, daß die zugehörige Eigenmode die Kollektivschwingung der Wagen beschreibt. Wir bestätigen diese Vermutung, indem wir (5.)) die die linearen Gleichungen $(m\omega_{1/2} - \hat{A})z_{1/2}$ zu

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}, \qquad z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\-1 \end{pmatrix}.$$

auflösen. Damit liegt die allgemeine Lösung des Problems gemäß

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \operatorname{Re}\left[\frac{c_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(2d/m)^{1/2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i((2d+4c)/m)^{1/2}t}\right]$$

fest. Betrachten wir z.B. eine Schwingung, bei der die beiden Massen anfänglich gegeneinander ausgelenkt sind: $u_1(0) = -u_2(0) \equiv u$. In diesem Fall ist $c_1 = 0$ und $c_2 = \sqrt{2}u$, woraus sich

$$u_1(t) = -u_2(t) = u\cos(t((2d+c)/m)^{1/2})$$

ergibt: Schwingung der beiden Körper gegeneinander. Für eine anfänglich gleichgerichtete Auslenkung $u_1(0) = u_2(0) = u'$ ergibt sich

$$u_1(t) = u_2(t) = u' \cos(t(2d/m)^{1/2}),$$

d.h. die Körper schwingen miteinander. Allgemeinere Anfangsbedingungen führen zu Überlagerungen dieser beiden prototypischen Schwingungsformern.

1.5 Kräfte

Die allgemeinste auf ein Teilchen wirkende Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ hängt von seinen Koordinaten, seiner Geschwindigkeit und der Zeit ab. Bisher haben wir uns auf den vergleichsweise einfachen Fall nur koordinatenabhängiger Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{q})$, die in der Regel auch noch konservativ waren, konzentriert. Im folgenden, wollen wir eine Reihe von Krafttypen diskutieren, die bislang vernachlässigt wurden, aber in verschiedenen physikalischen Anwendungen eine relevante Rolle spielen. Diese Diskussion wird uns direkt auf die Notwendigkeit hinführen, die Newton'sche Beschreibung der Mechanik zu verallgemeinern.

1.5.1 Geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Es kommt vor, daß die auf ein Teilchen wirkende Kraft explizit von seiner Geschwindigkeit abhängt. Die wichtigsten Klassen von Kräften mit dieser Eigenschaft sind Beschleunigungskräfte, Reibungskräfte und die Lorentzkraft.

1.5. KRÄFTE

Beschleunigungskräfte

Wie der Name schon sagt, treten Beschleunigungskräfte beim Wechsel auf beschleunigte Bezugssysteme auf. Wir erwähnen diesen Krafttyp in diesem Abschnitt nur der Vollständigkeit halber, werden ihn aber weiter unten, in Zusammenhang mit der Bewegung des sogenannten 'starren Körpers' ausführlich besprechen. An dieser Stelle sei nur soviel gesagt, daß Beschleunigungskräfte per definitionem Scheinkräfte sind. (Sie lassen sich ja durch Rücktransformation auf ein nichtbeschleunigtes Bezugssystem eliminieren.) Beschleunigungskräfte können geschwindigkeitsabhängig sein (z.B. beim Wechsel auf ein rotierendes Bezugssystem) müssen es aber nicht (Wechsel auf ein gleichförmig beschleunigtes System.)

Reibungskräfte

Wir alle wissen, daß Reibungskräfte ein für das tägliche Leben außerordentlich wichtiger Krafttyp sind. Praktisch jede unserer Bewegungen ist Reibungskräften unterworfen. Die funktionale Form solcher Kräfte kann man sich leicht klarmachen: Eine Reibungskraft $\mathbf{F}_{\rm f}$ muß geschwindigkeitsabhängig sein. (Anderenfalls würde sie ja ein ruhendes Teilchen in Bewegung versetzen.) Sie muß ferner der Geschwindigkeit entgegengesetzt sein. (Überlegen Sie sich, daß jede andere Richtungsabhängigkeit zu absurder Phänomenologie führte.) Damit ist die allgemeinste Form einer Reibungskraft durch

$$\mathbf{F}_{\mathrm{f}}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{q}, \mathbf{v})\mathbf{v},$$

wobei die skalare Funktion $f \ge 0$ von Geschwindigkeit und Ort abhängen kann. Bei Anwesenheit von Reibungskräften ist die Energie eines Teilchens nicht länger erhalten, sondern nimmt als Funktion der Zeit ab. (Auch das ein aus dem Alltag gut bekanntes Phänomen.) Die Energie E = T + U fassen wir hier wie gewohnt als die Summe von kinetischer Energie und der potentiellen Energie einer *externen* Potentialkraft $\mathbf{F} = -\nabla U$ (also nicht der Reibungskraft) auf. Aus der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla U - f\dot{\mathbf{q}}$$

folgt dann

$$d_t E = \dot{\mathbf{q}} \cdot (\ddot{\mathbf{q}} + \nabla U) = -f\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \le 0.$$

Man Bezeichnet diesen Mechanismus durch Reibung abnehmenden Energie als **Dis**sipation.

Die Gleichung $d_t E \leq 0$ sollte stutzig machen. Oben hatten wir doch gezeigt, daß die Naturgesetze der Mechanik fundamental energieerhaltend sind. Sofern wir bereit sind zu akzeptieren, daß der der Reibung zugrundeliegende Mechanismus letztendlich mechanischen Gesetzen genügt, müssen wir uns also fragen, *wohin* die Energie die das der Reibung ausgesetzte Teilchen verliert, denn verschwindet. Die Antwort ist, daß im Laufe eines reibungsbehafteten Prozesses Arbeit am externen Medium geleistet wird. Eine Eisenkugel, z.B., die einen mit einem Perserteppich ausgelegte schiefe Ebene herunterrollt, wird einerseits Energie verlieren (Anschaulich: Sie wird viel langsamer rollen, als es eine auf einer glatten Ebene abrollende Kugel täte) andererseits aber auch die Fasern des Teppichs plattdrücken, sie erwärmen u.s.w. Die der Kugel durch Reibung abhanden gekommene Energie ist also in den Teppich investiert worden. An diesem einfachen Beispiel, wird eine weitere wichtige Eigenschaft von Dissipation anschaulich: Im Laufe dissipativer Prozesse wird Energie von einem System mit *wenigen* Freiheitsgraden (Kugel) auf eines mit 'unendlich vielen' (die Fasern des Teppichs) umgeleitet.

Lorentzkraft

Wir betrachten ein geladenes Teilchen, das sich in einem orts- und zeitabhängigen elektrischen und magnetischen Feld bewegt. Aus der Experimentalphyisk wissen sie, das die entsprechende Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{q}} = e\mathbf{E}(\mathbf{q},t) + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}(\mathbf{q},t)$$

lautet, wobei e die Ladung, c die Lichtgeschwindigkeit, \mathbf{E} das elektrische und \mathbf{B} das Magnetfeld ist. Der Magnetfeldabhängige Term ist die Lorentzkraft.

1.5.2 Zeitabhängige Kräfte

Ganz zu Anfang hatten wir gesagt, daß die Galilei Raum-Zeit zeitlich homogen ist; kein Zeitpunkt ist als besonders ausgezeichnet. Als Ganzes betrachtet, kann das mechanische System 'Universum' daher nur von allen möglichen Zeit*differenzen* zwischen Ereignissen, nicht aber von Absolutwerten der Zeit abhängen. Man bezeichnet ein System von Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

ohne explizite Zeitabhängigkeit als ein **autonomes System**. Das Universum, z.B. ist autonom.

Nun kommt es in der Praxis aber häufig vor, daß wir an der Bewegung eines Systems s von Körpern interessiert sind, die in irgendeiner Weise an ein größeres System S angekoppelt sind. Sobald (i) S eine wie auch immer geartete Zeitabhängigkeit hat und (ii) die Rückwirkung des kleineren Systems s auf S vernachlässigbar ist, haben wir es mit einer Situation zu tun, in der die Bewegungsgleichung von s eine explizite Zeitabhängigkeit bekommt (die von S nämlich).

Z.B. hatten wir im Abschnitt über die Lorentzkraft ein geladenes Teilchen an ein externes und möglicherweise zeitabhängiges elektromagnetisches Feld angekoppelt, wenn wir auf einem Schiff herumlaufen, das in unruhiger See befindet, sind wir effektiv einer zeitabhängigen Kraft ausgesetzt u.s.w. Unter derartigen Bedingungen wird die prinzipielle Autonomie des Gesamtuniversums irrelevant und die Bewegungsgleichung von s nimmt die nicht-autonome Gestalt

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

an, wobei die Zeitabhängigkeit über die Bewegung von S induziert ist.

1.5.3 Zwangskräfte

In den meisten bislang untersuchten Beispielen hatten wir die Bewegung freier, 'planetenartiger' Körper betrachtet, Körper also, die zwar Kräften ausgesetzt, aber ansonsten uneingeschränkt im dreidimensionalen Raum beweglich waren. Einer der Gründe für diese Schwerpunktsetzung war, daß das Studium plantetarer Bewegungen historisch eine der Haupttriebfedern für die Entwicklung der Newton Mechanik war. Fängt man aber an, über die Relevanz solcher uneingeschränkt freien Bewegungsformen in unserer 'terristrischen' Erfahrungswelt nachzudenken, so kommt man schnell zu dem Schluß, daß der Bezug nicht allzu groß ist: Die wenigsten Bewegungen, mit denen wir konfrontiert sind, sind frei. Viel häufiger kommt es vor, daß Bewegungen unter dem Einfluß sogenannter **Zwangsbedingungen** stehen. Ein einer Zwangsbedingung ausgesetzter Körper ist in seiner Bewegung auf eine Untermannigfaltigkeit des \mathcal{A}^3 eingeschränkt. Z.B. kann sich die in Fig. 1.28 dargestellte Kugel sich nur auf dem 'hügeligen' Untergrund bewegen. Ein Moment Reflexion zeigt, daß die bei weitem überwiegende Mehrzahl aller praxisrelevanten Bewegungen in irgendeiner Weise Zwangsbedingungen ausgesetzt ist.



Abbildung 1.28: Kugel auf Hügellandschaft. Die (den Boden nicht verlassen könnende) Kugel ist einer Zwangsbedingung ausgesetzt.

Wie können wir solche Zwangsbedingungen in die theoretische Entwicklung der Mechanik einbauen? Zunächst einmal ist zu überlegen, auf welche Weise Zwangsbedingungen mathematisch zu beschreiben sind. In einer Vielzahl von Fällen liegen Zwangsbedingungen vor, die eine Bewegung auf eine vorgegebene Untermenge des Raumes einschränken. Beispielsweise kann die Bewegung über einen System von Gleichungen

$$f_i(\mathbf{q}) = 0, \qquad i = 1, \dots, n - k,$$
(1.29)

eingeschränkt sein, wobei k kleiner als die Zahl f der Freiheitsgrade des Systems zu sein hat. (Für k = f unabhängige Gleichungen wäre die Bewegung vollständig 'ausgefroren'.) Systeme der Form (1.29) schränken den Koordinatenraum auf Untermannigfaltigkeiten des (Flächen, Kurven u.ä.) ein

Info: Eine Teilmenge $M \subset \mathcal{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebugng $U \subset \mathbb{R}^n$ und n - k linear unabhängige¹⁹

¹⁹Eine Menge von *l* Funktionen heißt linear abhängig, wenn es *l* Konstanten $c_i, i = 1, ..., l$ gibt, so daß $\forall \mathbf{x} : \sum_i c_i f_i(\mathbf{x}) = 0.$

Funktionen $f_i: U \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U | f_i(\mathbf{x}) = 0\}$. Z.B. definiert das System (1.29) für n = 3 und k = 1 eine zweidimensionale Untermannigfalitigkeit des \mathbb{R}^3 , also eine Fläche. Für k = 2 definiert das System eine Kurve u.s.w. Ganz allgemein bezeichnet man eine n - 1 dimensionale Untermannigfaltigkeit als eine **Hyperfläche**. Die in Fig. 1.28 skizzierte Kurve ist eine Hyperfläche im \mathbb{R}^2 . Die in Fig. 1.29 dargestellte Fläche eine Hyperfläche im \mathbb{R}^3 u.s.w. In Fällen, wo die Tatsache, daß M in einen Vektorraum \mathbb{R}^n eingebettet ist, zweitrangig ist, spricht man oft auch von einer **Mannigfaltigkeit**. (Das 'Unter' ist weggelassen²⁰.) Alternativ zu der Beschreibung



Abbildung 1.29: Zur Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten. Eine Fläche im \mathbb{R}^3 läßt sich lokal (i) als Nullstellenmenge F = 0 einer Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$ oder (ii) als Bildmenge einer Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (q_1, 1_2) \mapsto \phi(q_1, 1_2)$ beschreiben.

als Nullstellenmengen von Funktionen lassen sich Untermannigfaltigkeiten M über eine **Parameterbeschreibung** charakterisieren:

M ist eine Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine (bezüglich M) offene Umgebung U, eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^k$ und einen **Diffeomorphismus** (d.h. eine invertierbare differenzierbare Abbildung)

$$\begin{aligned} \phi &: V &\to U \\ \mathbf{q} &\equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix} &\mapsto \phi(\mathbf{q}) \equiv \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gibt. Derartige Abbildungen heißen **Karten** der Mannigfaltigkeit. Ein Satz von Karten, $\{\phi_i | i = 1, ..., r\}$, derart daß $\bigcup_{i=1}^r U_i = M$ die Mannigfaltigkeit komplett überdeckt heißt **Atlas**.

Die Kartendefinition besagt, daß sich eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit (lokal) immer über einen Satz von Koordinaten $q_1, \ldots q_k$ und eine zugeordnete Koordinatenabbildung ϕ beschreiben läßt. Man sagt auch, daß die Mannigfaltigkeit *lokal* zu einem k-dimensionalen Vektorraum isomorph ist.

Beachten Sie, daß Koordinatendarstellungen und Atlanten einer Mannigfaltigkeit niemals eindeutig sind. (Z.B. ist für einen Isomorphismus $\tau : V' \to V$ und eine Koordinatenabbildung $\phi : V \to U \ \phi \circ \tau : V' \to U$ auch eine Koordinatenabbildung.) Oft hat man es mit

 $^{^{20}}$ Tatsächlich kann der Begriff der Mannigfaltigkeit auch abstrakt, ohne Bezug auf einen einbettenden Raum definiert werden. Da in den uns interessierenden Fällen jedoch i.d.R. ein Einbettungsraum in natürlicher Weise vorgegeben ist, wollen wir auf diese Abstraktion verzichten.

Situationen zu tun, wo zwei oder mehrere (physikalisch motivierte) Koordinatenabbildungen die gleiche Teilmenge $U \subset M$ überdecken (vgl. Fig. 1.30.) Für eine (u.U. lokal) über zwei Koordinatenabbildungen $\phi_1 : V_1 \to U$ und $\phi_2 : V_2 \to U$ erzeugte Mannigfaltigkeit erzeugt die Abbildung

$$\sigma \equiv \phi_2^{-1} \circ \phi_1 : V_1 \quad \to \quad V_2$$
$$\mathbf{q}_1 \quad \mapsto \quad \sigma(\mathbf{q}_1) \equiv \mathbf{q}_2$$

einen Koordinatenwechsel. Es ist wichtig, im Auge zu behalten, daß \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_2 demselben Punkt $a = \phi_1(\mathbf{q}_1) = \phi_2(\mathbf{q}_2)$ entsprechen.



Abbildung 1.30: Zum Konzept von Koordinatenwechseln.

Eine Mannigfaltigkeit läßt sich also auf mindestens zwei Arten beschreiben, als Nullstellenmenge von Funktionen oder über die Parameterdarstellung. Je nach Anwendungsbeich ist die eine oder andere Beschreibung zweckmäßiger.

Der Einheitskreis $S_1 \subset \mathbb{R}^2$ z.B. ist eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 . Wir können S_1 definieren als (i) Nullstellenmenge der Funktion $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 1$ oder (ii) als Bildmenge der Abbildung $\phi : \mathbb{R} \supset]0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \theta \mapsto \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$. Beide Darstellungen haben ihre Vorteile.

Abschließend führen wir noch ein Konzept ein, das weiter unten eine wichtige Rolle spielen wird. Lokal sieht jede glatte Mannigfaltigkeit flach aus: Eine glatte Fläche läßt sich lokal durch eine tangential an ihr anliegende Ebene approximieren, eine Kurve durch eine tangentiale Gerade u.s.w. Präziser: Die Umgebung jedes Punktes $\mathbf{r} \in M$ läßt sich über einen Vektorraum, den sogenannten **Tangentialraum** $TM_{\mathbf{r}}$ charakterisieren. Die Notation betont, daß dieser Vektorraum explizit vom Aufpunkt \mathbf{r} abhängt.

Eine Basis dieses Tangentialraums kann wie folgt konstruiert werden: Wir gehen von einer Parameterdarstellung $\{q_i\}$ aus. Es sei $\mathbf{r} \equiv \phi(\mathbf{q}^0) \equiv \mathbf{r}(\mathbf{q}^0)$. (Notation: Anstelle von $\phi(\mathbf{q})$ schreibt man oft einfach $\mathbf{r}(\mathbf{q})$. Die Schreibweise betont, daß $\mathbf{r} \in M$ (lokal) als Funktion von \mathbf{q} dargestellt werden kann.) Im Parameterraum definieren wir nun k Kurven

$$\begin{array}{rcl} \gamma_i : \mathbb{R} & \to & V \\ & t & \mapsto & \gamma_i(t) \equiv \mathbf{q}_0 + t\mathbf{e}_i \end{array}$$

wobei $\{\mathbf{e}_i\}$ eine k-dimensionale Orthonormalbasis ist. Damit sind k Kurven

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \circ \gamma_i : \mathbb{R} &\to M \\ t &\mapsto \mathbf{r}(\gamma_i(t)) = \mathbf{r}(\mathbf{q}_0 + t\mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

erzeugt. Nach Konstruktion sind diese Kurven (i) stetig nach t differenzierbar und (ii) enden alle in **r**: $\mathbf{r}(\gamma_i(0)) = \mathbf{r}$. Wir definieren nun k Vektoren $\xi_i \equiv d_t|_{t=0}\mathbf{r}(\gamma_i(t)) = d_t|_{t=0}\mathbf{r}(\mathbf{q}_0+t\mathbf{e}_i)$ (vgl. Fig. 1.29). Das System $\{\xi_i\}$ spannt den Tangentialraum auf. Beachten Sie, daß die obige Konstruktion besagt, daß

$$\xi_i = \partial_{q_i}|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \mathbf{r}(\mathbf{q}) \tag{1.30}$$

einfach die partielle Ableitung von \mathbf{r} nach der Koordinate q_i ist. Wir haben die obige Konstruktion über Kurven, die nichts weiter als die konstruktive Definition einer partiellen Ableitung wiederholt, nur durchgeführt, um den anschaulichen Bezug zwischen der partiellen Ableitung und einem tangential an die Mannigfaltigkeit anliegenden Vektor herzustellen.

Die Vereinigung aller Tangentialräume $\cup_{\mathbf{r}\in M}TM_{\mathbf{r}} \equiv TM$ wird als das **Tangentialbündel** der Mannigfaltigkeit bezeichnet.

Aufgabe: (Für mathematisch Interessierte): Zeigen Sie, daß das Tangentialbündel TM einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit seinderseits eine 2k-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Ein Beispiel: Für den oben parameterisierten Einheitskreis ist der Tangentialraum eindimensional. Die eben angegebene Konstruktionsvorschrift liefert

$$\xi = d_t|_{t=0} \mathbf{r}(\theta + t) = -\sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y$$

als Tangentialvektor an $\mathbf{r}(\theta)$. Beachten Sie, daß ξ explizit von der Koordinate θ abhängt.

Aufgabe: Die Oberfläche S_2 einer Kugel mit Radius 1 ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathcal{R}^3 . Charakterisieren S_2 (i) als Nullstellenmenge einer Funktion und (ii) über eine Parameterdarstellung. Konstruieren Sie für $\mathbf{r} \in S_2$ den Tangentialraum.

Eine triviale, aber für das inhaltliche Verständnis nicht-kartesischer Koordinatensysteme wichitige Bemerkung ist, daß der Vekorraum \mathbb{R}^n eine *n*-dimensionale Untermannigfaltigkeit seiner selbst ist. Die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^2$, z.B. kann über die triviale Koordinatenabbildung

$$\phi_1 : V_1 \equiv \mathbb{R}^2 \quad \to \quad \mathbb{R}^2$$
$$(q_1, q_2) \quad \mapsto \quad q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2$$

erzeugt werden ('kartesische Koordinaten'). Als Alternative bieten sich ebene Polarkoordinaten

$$\phi_2: V_2 \equiv]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r, \phi) \mapsto r \cos \phi \mathbf{e}_1 + r \sin \phi \mathbf{e}_2$$

an²¹. Der Koordinatenwechsel ist durch

$$\begin{aligned} \sigma : V_1 &\to V_2 \\ (q_1, q_2) &\mapsto ((q_1^2 + q_2^2)^{1/2}, \arctan(q_2/q_1)) \end{aligned}$$

²¹Beachten Sie jedoch, daß die Karte ϕ_2 den \mathbb{R}^2 nicht komplett überdeckt: der Wertebereich des offenen Intervalls $]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ spart die positive relle Achse aus. Ein zur Überdeckung des \mathbb{R}^2 mittels Polarkoordinaten genügender Atlas muß daher mindestens zwei Karten enthalten. (Wie ließe sich eine ergänzende Karte konstruieren?).

gegeben. Ein normiertes System von Tangentialvektoren (bitte nachrechnen) für das kartesische System ist $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, für das Polarkoordinatensystem $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\phi})$, wobei die Umrechnung durch (1.15) gegeben ist.

Z.B. ließe sich die für Fig.1.28 relevante Zwangsbedingung als

$$y - h(x) = 0$$

formulieren, wobei das Koordinatenpaar (x, y) die uneingeschränkte Ebene aufspannt, h(x) die Kurve parameterisiert und wir den Radius der Kugel der Einfachheit halber vernachlässigt haben.

Man bezeichnet Zwangsbedingungen, die sich über ein Gleichugssystem wie in (1.29) fassen lassen als **holonom**. Sofern die bestimmenden Funktionen f_i nicht explizit von der Zeit abhängen, bezeichnet man die Bedingungen außerdem als **skleronom**. Manchmal jedoch erfordert es eine Anwendung, solche expliziten Zeitabhängigkeiten zuzulassen. Das gilt z.B. für die Bewegung eines Passagiers, der sich auf dem Deck eines in bewegter See fahrenden Schiffes befindet; die Bewegung des Decks definiert eine explizit zeitabhängige Zwangsbedinung. Zwangsbedingungen mit zeitabhängigen f_i heißen **rheonom**. Darüberhinaus gibt es Zwangsbedinungen, die sich überhaupt nicht über einen Satz von Gleichungssystemen fassen lassen. Z.B. ist die Bewegung eines Systems von N Gasmolekülen, die sich in einem kugelförmigen Hohlraum mit Radius R befinden, durch die Ungleichungen

$$|\mathbf{r}_i| \le R, \qquad i = 1, \dots, N$$

eingeschränkt. Es gibt auch Zwangsbedingungen, die sich überhaupt nicht als ein Satz algebraischer Funktionen der Lagekoordinaten formulieren lassen. Allgemein heißen Zwangsbedingungen, die sich nicht auf die Form (1.29) transformieren lassen, **nichtholonom**. In diesem Kurs werden wir uns auf die Untersuchung holonomer Zwangsbedingungen beschränken.

Nehmen wir also an, wir seien mit einem durch holonome Zwangsbedingungen auf eine Untermannigfaltigkeit eingeschränkten Problem konfrontiert. Genauer gesagt, bestehe das Problem darin die Bewegung eines einer Körpers der Masse m zu beschreiben, der (i) einer externen Kraft \mathbf{F} und (ii) einer durch (1.29) mit n < 3definierten Zwangsbedingung ausgesetzt sei. (Man kann z.B. wieder an die Situation aus Fig.1.28 denken, wobei die Kugel der Gewichtskraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_y$ ausgesetzt sei.)

Klar ist, daß die Bewegung des Körper *nicht* dem naiv angesetzten Newton Gesetz $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ genügen wird, denn dieses 'weiß' ja von der Zwangsbedingung noch nicht. Vielmehr müssen auf der die Beschleunigung beschreibenden rechten Seite Zusatzterme auftauchen, die der Einschränkung Rechnung tragen:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{z}.\tag{1.31}$$

Man bezeichnet den Korrektivterm \mathbf{F}_{z} als eine **Zwangskraft**. Aus Gründen, die weiter unten noch klar werden werden, bezeichnet man die um eine Zwangskraft ergänzten Newton Gleichungen auch als **Lagrange Gleichungen erster Art**.

Ohne jede Rechnung kann man feststellen, daß die Zwangskraft senkrecht auf der durch die Zwangsbedingungen definierten Untermannigfaltigkeit stehen muß (vgl. Fig.1.28). Denn täte sie das nicht würde ihre nichtverschwindende Tagentialkomponente bereits bei Abwesenheit äußerer Kräfte \mathbf{F} einen auf der Untermannigfaltigkeit ruhenden Körper in Bewegung versetzen \rightsquigarrow Widerspruch. Dies ist alles, was sich in Allgemeinheit über die Zwangskräft sagen läßt. Beachten Sie, daß wir eine Aussage über die Richtungsabhängigkeit von \mathbf{F}_z , aber noch nichts über ihre Stärke gesagt haben. Tatsächlich reicht diese Information aber schon aus, Probleme mit Zwangsbedingungen – zumindest im Prinzip – eindeutig zu lösen. Wir illustrieren das Verfahren einer senkrecht zu der Untermannigfaltigkeit angesetzten Zwangskraft anhand eines einfachen Beispiels

Bsp.: Kugel auf schiefer Ebene



Abbildung 1.31: Kugel auf schiefer Ebene

Wir betrachten eine auf einer schiefen Ebene unter dem Einfluß der Gewichtskraft $-mg\mathbf{e}_z$ abrollende Kugel mit Masse m. Die Anfangsbedinungen der Bewegung seien $\mathbf{r}(0) = \mathbf{v}(0) = 0$ und es sei ein Koordinatensystem so gewählt, daß die Ebene durch

$$F(x, y, z) \equiv z - \tan \alpha x = 0$$

festgelegt ist (vgl. Fig.1.31). Die auf der Ebene senkrecht stehende Zwangskraft kann nun als

$$\mathbf{F}_{z} = \lambda \nabla F = \lambda (\mathbf{e}_{z} - \tan \alpha \mathbf{e}_{x})$$

angesetzt werden, wobe
i λ ein noch unbekannter reller Parameter ist
²². Die für die Komponenten von **r** ausgeschriebenen Lagrange Gleichungen erster Art lauten nun

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\lambda \tan \alpha, \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda, \\ m\ddot{y} &= 0. \end{aligned}$$

²²Machen Sie sich klar, daß für eine als Nullstellenmenge einer Funktion f festgelegte Hyperfläche der auf der Fläche ausgewertete Gradient $\nabla f \big|_{f=0}$ senkrecht auf der Fläche steht.

1.5. KRÄFTE

Auf den ersten Blick sieht es so aus, als hätten wir hier ein Problem. Verglichen mit 'konventionellen' Newton Gleichungen ohne Zwangsbedinungen taucht ein zusätzlicher unbekannter Freiheitsgrad auf, λ nämlich. Daß die Gleichungen trotzdem eindeutig gelöst werden können, liegt daran, daß wir ja mit f = 0 auch eine zusätzliche die Lösung einschränkende Gleichung hinzubekommen haben:

Wir substituieren $x = (\tan \alpha)^{-1} z$ in die erste Gleichung und lösen nach

$$\lambda = -m \tan^{-2} \alpha \ddot{z}$$

auf. Damit eliminieren wir λ aus der zweiten Gleichung und erhalten

$$\ddot{z} = -g\sin^2\alpha,$$

was sich zu

$$z(t) = -\frac{g\sin^2\alpha}{2}t^2$$

löst. Zusammen mit der trivialen Lösung y(t) = 0 für die kräftefreie z-Komponente und $x(t) = z(t)/\tan \alpha = -\frac{g}{2} \sin \alpha \cos \alpha t^2$ ist das Problem damit gelöst.

Am Beispiel oben sollte das allgemeine Lösungsprinzip Lagrange'scher Gleichungen erster Art klar geworden sein: Für eine k-dimensionale über Zwangsbedingungen $R_i = 0, i = 1, ..., n - k$ festgelegte Untermannigfaltigkeit

- 1. setzt man die Zwangskraft zu $\mathbf{F}_{z} = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_{i} \mathbf{F}_{z}^{(i)}$ an, wobei die Vektoren $\mathbf{F}_{z}^{(i)}(\mathbf{r})$ an jedem Punkt \mathbf{r} der Mannigfaltigkeit (i) senkrecht auf dem Tangentialraum, (ii) linear unabhängig aber ansonsten beliebig sind. Die λ_{i} sind freie Parameter (sogenannte Lagrange Parameter.) Im Anschluß
- 2. löst man das System

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \mathbf{F}_{\mathbf{z}}^{(i)},$$

$$R_i = 0, \qquad i = 1, \dots, n-k$$

wobei die neu hinzugekommenen Unbekannten λ_i mittels der zusätzlichen Gleichungen $R_i = 0$ eliminiert werden.

Als Corrolar halten wir fest, daß dieses Lösungsverfahren nicht nur die Bewegung sondern auch die explizite Form der Zwangskraft liefert. Aus dem Prinzip 'actio gleich reactio' folgt das letztere gleich der Kraft ist, mit der der Körper auf die die Bewegung einschränkende Mannigfaltikeit rückwirkt. Diese Kraft kann von Interesse sein (so zum Beispiel beim Bau von Achterbahnen.)

Zu eingeschränkten Bewegungen und ihrer Lösung mittels des oben umrissenen Verfahren liëße sich noch eine Menge sagen. Wir wollen an dieser Stelle jedoch auf eine weitere Diskussion der Lagrange Gleichungen erster Art verzichten, und zwar aus folgendem Grund: Geht man das Lösungsverfahren noch einmal kritisch durch, so fällt auf, daß es seltsam umständlich wirkt. Wir wissen ja schon von vornherein, daß sich die Bewegung auf einem nur k-dimensionalen Gebilde abspielen wird. Dennoch wird das Problem zunächst wie gehabt auf dem gesamten Raum formuliert. Der hierfür zu zahlende Preis ist, daß ein System zunächst noch unbekannter Kräfte einzuführen ist, deren einzige Aufgabe darin besteht, die Bewegung auf die Zielmannigfaltigkeit festzunageln. Ein wesentlicher Teil der Arbeit besteht darin, diese Kräfte zu ermitteln und gleichzeitig Freiheitsgrade der Bewegung zu eliminieren.

Viel ökonomischer wäre doch ein Zugang, bei dem von Anfang an k Koordinaten so gewählt wären, daß ausschließlich die Zielmannigfaltigkeit und nicht der redundante Rest des Raumes parameterisiert wären. Auf diese Art ließe sich die umständliche Eliminationsprozedur von n auf k Variablen vermeiden. Das Problem ist nur, daß in keiner Weise offensichtlich ist, wie sich ein solches Verfahren im Rahmen der Newton Mechanik implementieren läßt. (Es lohnt sich, über dieses Problem nachzudenken.) Tatsächlich handelt es sich hier um ein fundamentales Problem der Newton Mechanik. Sie beinhaltet essentiell eine Formulierung im uneingeschränkten Raum \mathcal{A}^3 . Im nächsten Kapitel werden wir einen völligen Neuzugang zur Mechanik entwickeln, die 'Lagrange Mechanik'. Mit der Lagrange Mechanik wird nicht nur das hier aufgeworfene Problem gelöst sondern auch der Blick auf Zusammenhänge frei, die den Rahmen der klassischen Mechanik bei weitem übersteigen und direkt an moderne Aspekte der theoretischen Physik heranführen.

1.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir die Grundlagen der klassischen Mechanik eingeführt – ihre Galilei Struktur und ihre axiomatischen Formulierung über die Newton Gleichungen. Wir haben untersucht, welche Information zur eindeutigen Lösung der Newton Gleichungen erforderlich ist und wie Symmetrien und Erhaltungssätze die Lösung mechanischer Probleme vereinfachen können.

Das Keplerproblem wurde als einer der historisch wichtigsten Anwendungen der Mechanik ausführlich besprochen. In Kombination mit dem gleichfalls untersuchten harmonischen Oszillator und dem trivialen Fall der gleichförmig beschleunigten Bewegung sind damit tatsächlich schon alle geschlossen lösbaren Probleme der Mechanik erfaßt. In Vorbereitung auf die weiter unten noch ausführlich zu besprechende Analyse fundamental nicht-lösbarer mechanischer Systeme haben wir Phasenraumportraits als nützliches Konzept zur qualitativen Charakterisierung mechanischer Prozesse eingeführt.

Schließlich wurden die wichtigsten in der Mechanik auftretenden Krafttypen – neben Potentialkräften, Schein-, Reibungs-, Lorentzartige und Zwangskräfte – eingeführt. Die Analyse durch Zwangskräften eingeschränkter Bewegungen führte schließlich auf den Verdacht, daß es eine flexiblere als die Newton'sche Formulierung der Mechanik geben sollte.

Kapitel 2 Lagrange Mechanik

In diesem Kapitel werden wir eine von Lagrange im 18. Jhdt. entwickelte Neuformulierung der Mechanik kennenlernen. Inhaltlich steht die Lagrange Formulierung in keiner Weise in Widerspruch zu der Newton Mechanik. Tatsächlich kann man sich von der Lagrange Mechanik jederzeit auf die Ebene der Newton Mechanik zurückziehen. (Der umgekehrte Weg ist weniger offensichtlich.) Methodisch jedoch, hat die Lagrange Formulierung den Vorteil einer ungleich größeren Flexibilität und 'Anwenderfreundlichkeit'. Vorwegnehmend und zur Motivation seien hier schon einige der wichtigsten Vorteile des Lagrange Formalismus aufgelistet:

- ▷ Im Rahmen der Lagrange Mechanik löst sich die gegen Ende des letzten Kapitels aufgetauchte Problematik der Beschreibung von Bewegungen mit Zwangsbedingungen auf. Damit zusammenhängend:
- ▷ Anders als der Newton Formalismus ist die Lagrange Formulierung auf eine problemangepasste Wahl von Koordinaten gleichsam zugeschnitten.
- ▷ Im Rahmen der Lagrange Mechanik wird der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssäetzen, auf den wir in Abschnitt 1.3.2 bereits hingewiesen hatten, transparent.
- ▷ Über die Lagrange Beschreibung läßt sich in natürlicher Weise der Kontakt zwischen der Mechanik und anderen Gebieten der Physik, wie z.B. der Elektrodynamik und Quantenmechanik herstellen.

Wir werden die Lagrange Beschreibung zweimal, über verschiedene Zugänge entwickeln. Die erste Route wird bei der im letzten Kapitel besprochenen Bewegung unter dem Einfluß von Zwangsbedingungen ansetzen. Der zweite Zugang führt das Konzept von Variationsprinzipien in der Mechanik ein.

2.1 Ableitung I: d'Alembert'sches Prinzip

Wir setzen bei der gegen Ende von Abschnitt 1.5.3 diskutierten Problematik einer effizienten Beschreibung von Bewegungen mit Zwangsbedingungen an. Der Vollständigkeit halber formulieren wir das Problem hier nocheinmal neu und zwar gleich verallgemeinert auf ein System von N-Teilchen:

Gegeben sei ein System von N-Teilchen. Seine Bewegung im 3N-dimensionalen Raum sei über holonome Zwangsbedingungen auf eine f-dimensionale Untermannigfaltigkeit M eingeschränkt. (f: Gesamtzahl der Freiheitsgrade.) Die Zwangsbedingungen seien über das System

$$f_i(\mathbf{r},t) = 0, \qquad i = 1, \dots, 3N - f,$$

implementiert, wobei der 3N-komponentige Vektor $\mathbf{r} \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ die N Koordinatenvektoren \mathbf{r}_i zusammenfaßt. (Beachten Sie, daß explizit zeitabhängige Zwangsbedingungen zugelassen sind.)

Die durch die f_i bestimmte Mannigfaltigkeit läßt sich über ein System von f Koordinaten q_i parameterisieren. M.a.W. die Koordinatenvektoren der eingeschränkten Bewegung lassen sich als $\mathbf{r}(\{q_i\})$ eindeutig darstellen. In der Mechanik bezeichnet man den Satz $\{q_i\}, i = 1, \ldots, f$ als einen Satz verallgemeinerter Koordinaten des Problems. Die Wahl dieser Koordinaten ist natürlich nicht eindeutig vorgeschrieben. Allerdings gibt es in der Praxis mehr oder weniger geschickte Arten, die Koordinaten festzulegen. Notation: Der Kürze halber werden wir oft $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ schreiben, wobei $\mathbf{q} \equiv (q_1, \ldots, q_f)$ die generalisierten Koordinaten zusammenfaßt.

Bsp.: Teilchen auf Sphäre

Betrachten Sie z.B. einen einzigen Körper (N = 1), dessen Bewegung über $|\mathbf{r}| = R$ eingeschränkt ist. Die dadurch definierte 3 - 1 = 2 dimensionale Untermannigfaltigkeit ist eine Kugeloberfläche (2-Sphäre) mit Radius R. Als generalisierte Koordinaten des Problems bieten sich sphärische Polarkoordinaten (θ, ϕ) mit

$$r_1 = R \sin \theta \cos \phi,$$

$$r_2 = R \sin \theta \sin \phi,$$

$$r_3 = R \cos \theta$$

an.

Bsp.: Doppelpendel

Etwas weniger offensichtlich gestaltet sich die Situation bei dem in Figur 2.1 dargestellten Doppelpendel.

Die Bewegung der zwei Massen m_1 und m_2 sei auf eine Ebene eingeschränkt. (Reduktion von sechs auf vier Freiheitsgrade.) Die Fixierung der Längen l_1 und l_2 beinhaltet eine weitere Reduktion von vier auf nur noch zwei Freiheitsgrade. Die Bewegung läßt sich also über zwei generalisierte Koordinaten beschreiben. Ein Moment Überlegung zeigt, daß die in der Figur mit ϕ_1 und ϕ_2 bezeichneten Winkel eine zweckmäßige Wahl darstellen.

Aufgabe: Parameterisieren Sie die Koordinatenvektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 der Körper aus Figur 2.1 explizit über die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 , d.h. finden Sie eine Darstellung $\mathbf{r}_i(\phi_1, \phi_2), i = 1, 2$.



Abbildung 2.1: Doppelpendel

2.1.1 Formulierung des d'Alembert'schen Prinzips

Unser Ziel ist es Bewegungsgleichungen der im obigen Sinne eingeschränkten Bewegung so aufzustellen, daß nur die f generalisierten Koordinaten involviert sind. (Im Gegensatz zum Newton'schen Zugang, wo aus einer Bewegungsgleichung für 3N Freiheitsgrade zunächst 3N - f Koordinaten explizit zu eliminieren sind.)



Abbildung 2.2: Zur Analyse der Bewegungsgleichungen mittels virtueller Verrückungen.

Als Ausgangspunkt betrachten wir eine sogenannte virtuelle Verrückung. Hierunter versteht man traditionell eine 'infinitesimale Verschiebung des Koordinatenvektors, die mit allen Zwangsbedingungen verträglich ist', eine kleine Verschiebung also, die auf der Konfigurationsmannigfaltigkeit M bleibt. In der Literatur werden virtuelle Verrückungen meist mit $\delta \mathbf{r}$ bezeichnet, wobei das δ andeuten soll, daß man es mit etwas 'Kleinem' zu tun hat. Nun läßt sich der Begriff einer 'kleinen Verrückung' mathematisch nicht besonders gut fassen (was sich darin widerspiegelt, daß in Lehrbüchern meist in recht viel Worten erklärt wird, was mit diesem Begriff gemeint ist.)

Mathematisch unzweideutig läßt sich der Begriff einer virtuellen Verrückung von **r** über den Tangentialraum $TM_{\mathbf{r}}$ definieren (vgl. Fig.2.2). Eine virtuelle Verrückung im Sinne der obigen 'Definition' ist $\delta \mathbf{r} \equiv \underline{x}i\delta t$, wobei δt ein beliebig klein zu wählender Parameter und $\boldsymbol{\xi}$ ein Vektor des Tangentialraums ist. Die Größe $\delta \mathbf{r}$ liegt tangential an M und ist daher mit den Zwangsbedingungen verträglich (solange δt klein und damit die Krümmung der Mannigfaltigkeit nicht spürbar ist.) Für das Folgende ist es praktischer, nicht mit den Verrückungen selbst, sondern direkt mit den Vektoren des Tangentialraums zu arbeiten.

Wir können das Problem nun komplett über einen Satz von zwei Gleichungssystemen beschreiben:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{\mathrm{z},i}$$

 $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{\mathrm{z}i} \cdot \boldsymbol{\xi}_i = 0.$

Die erste Gleichung ist die um Zwangskräfte erweiterte Newton Gleichung eines Systems von N Teilchen. \mathbf{F}_i ist hier die gesamte äußere Kraft, die auf Teilchen ieinwirkt, $\mathbf{F}_{z,i}$ die Zwangskraft. (Im allgemeinen wird $\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{\text{ext},i}$ Summe einer Wechselwirkungskraft und einer externen angelegten Kraft $\mathbf{F}_{\text{ext},i}$ sein.) In der zweiten Gleichung haben wir den Tangentialvektor $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{3N}$ gemäß

$$oldsymbol{\xi} = egin{pmatrix} oldsymbol{\xi}_1 \ dots \ oldsymbol{\xi}_N \end{pmatrix},$$

organisiert, wobe
i $\boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}$ der dem 3-dimensionalen Unterraum von Teilchen
izugeordnete Teilvektor ist. Diese Gleichung besagt, daß die Vektor
en des Tangentialraums senkrecht auf den Zwangskräften
 \mathbf{F}_z des Problems stehen (da diese ja ihrerseits senkrecht auf der Tagentialebene stehen (vgl. Fig.2.2).)

Wir multiplizieren nun die Newton Gleichung skalar mit $\boldsymbol{\xi}$ und erhalten

$$\sum_{i}^{N} (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \boldsymbol{\xi}_i = 0.$$
(2.1)

Das ist die mathematische Formulierung des **d'Alembert'schen Prinzips**. Seine Bedeutung kann man sich am einfachsten für den Fall einer Gleichgewichtslage, $\ddot{\mathbf{r}}_i = 0, i = 1, ..., N$ veranschaulichen. Die Gleichung sagt dann aus, daß die externen Kräfte senkrecht auf der Konfigurationsmannigfaltigkeit zu stehen haben. (Täten sie das nicht, würden die Teilchen ja anfangen, sich beschleunigt zu bewegen.) Gleichung (2.1) verallgemeinert dieses Prinzip auf den beschleunigten Fall. Interpretiert man $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ als eine 'Beschleunigungskräfte' vektoriell zu einer Größe senkrecht auf der Konfigurationsmannigfaltigkeit kompensieren. Beachten Sie aber, daß
diese Gleichug *nicht* für jeden einzelnen Summanden gilt, d.h. im allgemeinen ist $(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \xi_i \neq 0$. Das liegt daran, daß das System $\{\xi_i\}$ zwar den k-dimensionalen Tangentialraum aufspannt, aber keine vollständige Basis des \mathbb{R}^{3N} ist. Aus dem Verschwinden der Summe kann daher nicht auf das individuelle Verschwinden der 3N Summanden geschlossen werden.

2.1.2 Herleitung der Lagrange Gleichung

Wir wollen nun Gleichung 2.1 verwenden, um ein System von ausschließlich die generalisierten Koordinaten involvierenden Bewegungsgleichungen aufzustellen. Ausgehend von der Parameterdarstellung $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)^1$ stellen wir zunächst einige Hilfsformeln auf:

$$\dot{\mathbf{r}}_{i} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_{i}}{\partial q_{k}} \dot{q}_{k} + \partial_{t} \mathbf{r}_{i}$$
(2.2)

$$\partial_{\dot{q}_k} \dot{\mathbf{r}}_i = \partial_{q_k} \mathbf{r}_i \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{i} = \sum_{k=1}^{J} \frac{\partial \mathbf{r}_{i}}{\partial q_{k}} c_{k}.$$
(2.4)

Die erste Gleichung ist einfach die Kettenregel. Der Term $\partial_t \mathbf{r}_i$ taucht auf, weil wir zugelassen haben, daß die Zwangsbedingungen explizit zeitabhängig sind. (Machen Sie sich diesen Zusammenhang klar!) Die zweite Gleichung entsteht durch Differentiation der ersten nach \dot{q}_k . In der dritten Gleichung sind die $c_k, k = 1, \ldots, f$ frei wählbare Koeffizienten. Die Gleichung ist (vgl. Seite 61f, speziell Gleichung (1.30) einfach die allgemeine Form eines Tangentialvektors in der Basis der $\{\xi_k = \partial_{q_k} \mathbf{r}\}$. Wir verwenden nun diese Gleichungen, um die einzelnen Terme in (2.1) auf eine Darstellung in verallgemeinerten Koordinaten zu transformieren. Die gleich folgende Rechnung sieht komplizierter aus als sie ist; im wesentlichen handelt es sich um

wiederholte partielle Differentiationen und Anwendungen der Kettenregel. (Erinnnern sie sich an die Vertauschungsregel $\partial_x(\partial_y f) = \partial_y(\partial_x f)$, die ganz allgemein für die partielle Ableitung von Funktionen gilt. Im folgenden werden wir von dieser Regel ständig gebrauch machen.)

Der Term $\sum_{i} \mathbf{F}_{i} \cdot \boldsymbol{\xi}_{i}$: Substitution von (2.4) ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{i} \cdot \boldsymbol{\xi}_{i} = \sum_{k=1}^{f} Q_{k} c_{k}, \qquad (2.5)$$

wobei die f Größen Q_k durch

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \partial_{q_k} \mathbf{r}_i$$

¹Die Notation $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ betont, daß für rheonome Zwangsbedingungen die Koordinatendarstellung eine explizite Zeitabhängigkeit bekommt.

definiert sind² Der Term $\sum_{i} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_i$: Zunächst ist

$$\sum_{i=i}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_i = \sum_{i=i}^{N} m_i \sum_{k=1}^{f} \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \partial_{q_k} \mathbf{r}_i c_k.$$

Die hier auftretenden Skalarprodukte $\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \partial_{q_k} \mathbf{r}_i$ schreiben wir nun gemäß

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \partial_{q_k} \mathbf{r}_i = d_t \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \partial_{q_k} \mathbf{r}_i \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \partial_{q_k} \dot{\mathbf{r}}_i$$

um, woraus sich

$$\sum_{i=i}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \partial_{q_k} \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[d_t \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \partial_{q_k} \mathbf{r}_i \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \partial_{q_k} \dot{\mathbf{r}}_i \right] \stackrel{(2.3)}{=} \\ \stackrel{(2.3)}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[d_t \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \partial_{\dot{q}_k} \dot{\mathbf{r}}_i \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \partial_{q_k} \dot{\mathbf{r}}_i \right] = \\ = \left(d_t \partial_{\dot{q}_k} - \partial_{q_k} \right) \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \\ = \left(d_t \partial_{\dot{q}_k} - \partial_{q_k} \right) T$$

ergibt. Kombination von (2.5) und (2.6) führt auf die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{f} \left[Q_k - (d_t \partial_{\dot{q}_k} - \partial_{q_k}) T \right] c_k = 0.$$

Der entscheidende Punkt ist nun, daß die c_k unabhängig wählbare Parameter sind. Damit muß die Gleichung für jeden ihrer k Summanden einzeln gelten.

$$(d_t \partial_{\dot{q}_k} - \partial_{q_k})T = Q_k. \tag{2.6}$$

damit sind wir am Ziel. Die Bewegungsgleichung hat die Form einer Differentialgleichung in den generalisierten Koordinaten angenommen. Zwangskräfte treten nicht mehr explizit auf.

Aufgabe: Zeigen Sie, daß (2.6) für den Fall einer uneingeschränkten Bewegung, $M = \mathbb{R}^{3N}$ auf die Newton Gleichungen zurückführt.

Bevor wir die neue Darstellung ausführlicher besprechen, wollen wir uns noch etwas spezialisieren und annehmen, daß die ursprünglichen Kräfte konservativ waren,

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}).$$

²In der Literatur (siehe z.B. [6]) werden die Q_k manchmal als Koeffizienten einer 'generalisierten Kraft' bezeichnet. Diese Bezeichnung kann Verwirrung stiften, da der Begriff 'generalisierte Kraft' in der Mehrheit der Lehrbücher für eine andere Größe (siehe unten) reserviert ist.

In diesem Fall sind auch die Größen Q_k konservativ, in dem Sinne, daß sie sich als Ableitung der *generalisierten* Koordinaten nach einem Potential darstellen lassen:

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \partial_{q_k} \mathbf{r}_i = -\sum_{i=1}^n \nabla_{\mathbf{r}_i} U \cdot \partial_{q_k} \mathbf{r}_i = -\partial_{q_k} U(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t))$$

Damit können wir die Bewegungsgleichung in ihre entgültige Form bringen:

$$(d_t \partial_{\dot{q}_k} - \partial_{q_k}) L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \qquad (2.7)$$

wobei

$$L = T - U \tag{2.8}$$

die Lagrange Funktion ist.

Wir betonen nochmals, daß die Lagrangefunktion als Funktion der generalisierten Koordinaten $\{q_i\}$ aufzufassen ist. Die allgemeine Konstruktionsvorschrift ist also folgende: Verwende die Darstellung $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ um die kinetische Energie, $T(\dot{\mathbf{r}}) \rightarrow$ $T(\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{q}, t)) \equiv T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, und die potentielle Energie, $U(\mathbf{r}) \rightarrow U(\mathbf{r}(\mathbf{q})) \equiv U(\mathbf{q}, t)$, in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten auszudrücken. Die Differenz dieser Größen ist die Lagrange Funktion.

Wir illustrieren die Anwendung des Lagrange Formalismus an zwei Beispielen:

Bsp.: Atwood'sche Fallmaschine

Betrachten Sie die in Figur Fig.2.3 dargestellte sogenannte Atwood'sche Fallmaschine. Ein Faden fester Länge gleite reibungsfrei über eine Kreisscheibe. An den Enden des Fadens seien zwei Massen m_1 und m_2 befestigt. Wir nehmen an, daß die Massen sich zur Zeit t = 0 in Ruhe auf Höhe $x_1(0)$ bzw. $x_2(0)$ unter dem Referenzpunkt 0 befinden.



Abbildung 2.3: Atwood'sche Fallmaschine.

Wir lösen das Problem über den Lagrange Formalismus. Es gilt $x_1 + x_2 = l = \text{const.}$. Damit ist die Konfigurationsmannigfaltigkeit M über $x_1 + x_2 - l = 0$ festgelegt; das Problem hat einen Freiheitsgrad. Wir nennen die generalisierte Koordinate x und 'parameterisieren': $x_1 = x$, $x_2 = l - x$. Es ist nun

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}_2^2,$$

$$U = -m_1gx_1 - m_2gx_2 = (m_2 - m_1)gx - m_2gl$$

Die Bewegungsgleichung (2.7) liefert

$$\ddot{x} = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g,$$

Was sich zu $x = x_1 = (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)t^2/2 + x_1(0)$ integriert. Damit ist das Problem gelöst.

Aufgabe: Lösen Sie das Problem mit Hilfe Lagrange Gleichungen erster Art. Welche Methode scheint ihnen effizienter zu sein?

Bsp.: Rotierende Schleife

Wir betrachten nun ein etwas fortgeschritteneres Beispiel mit einer explizit zeitabhängigen Zwangsbedingung. Gegeben sei eine kreisförmige Drahtschleife mit Radius R. Die Schleife rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse eines Koordinatensystems, dessen Ursprung am Schleifenmittelpunkt liegt (vgl. Fig.2.4.) Auf die Schleife sei eine Perle der Masse m reibungsfrei aufgezogen. Die Perle sei der Gewichtskraft $-mg\mathbf{e}_z$ ausgesetzt. Zur Zeit t = befinde sich die Perle am Ort $(R, \theta(0), \phi(0) = 0)$, wobei sphärische Polarkoordinaten bezüglich des Schleifenmittelpunkts vorausgesetzt sind. Ziel ist es, die Bewegungsgleichung aufzustellen und festzustellen, welche Anfangskoordinate $\theta(0)$ einer 'Ruhelage' mit konstantem $\theta(t) = \theta(0)$ entspricht.

In diesem Problem legen wir die Konfigurationsmannigfaltigkeit direkt über eine Parameterdarstellung fest. In sphärischen Polarkoordinaten ist die Position der Perle durch $(r = R, \phi = \omega t, \theta)$ gegeben. Der Winkel θ ist die einzige freie Koordinate. Die beiden anderen sind über die Zwangsbedingungen festgelegt. Ausgehend von den Standardformeln für die Umrechnung kartesische \leftrightarrow Polarkoordinaten

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

überzeugt man sich leicht davon, daß

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\omega^2),$$

$$U = mgR\cos\theta,$$



Abbildung 2.4: Rotierende Schleife mit Perle.

wobei $\dot{R} = 0$ und $\dot{\phi} = \omega$ verwendet wurde. Damit nimmt die allgemeine Lagrangegleichung $(d_t \partial_{\dot{\theta}} - \partial_{\theta})L$ die Form

$$R\hat{\theta} - R\omega^2 \sin\theta \cos\theta - g\sin\theta = 0$$

an. Die Gleichgewichtslagen des Problems sind durch $\ddot{\theta} = 0$ gekennzeichnet. Aus der Bewegungsgleichung folgt, daß die Gleichgewichtslagen des Problems durch die Gleichungen

$$\theta_0 = 0, \pi, \qquad \cos \theta_0 = -\frac{g}{R\omega^2}$$

bestimmt sind.

Aufgabe: Diskutieren sie die Gleichgewichtslagen. Welche der Lagen sind stabil (werden bei einer kleinen Störug $\theta \to \theta_0 + \delta\theta$ nicht verlassen) welche instabil? Was passiert für $g(R\omega^2)^{-2} > 1$ und für $g(R\omega^2)^{-2} \to 0$?

Aufgabe: Zeigen Sie, daß sich das Problem für $\theta \ll 1$ auf einen harmonischen Oszillator reduziert.

An diesen Beispielen sollte klarwerden, daß sich der Lagrange Formalismus überaus effizient zur Lösung mechanischer Probleme einsetzten läßt. Ein nicht unberechtigter Einwand gegen die oben gegebene *Herleitung* der Lagrange Gleichung wäre jedoch, daß sie aus einer seltsam unmotiviert erscheinenden Iteration von Anwendungen der Kettenregel besteht. Außerdem ist, anders als das bei den Newton Gleichungen der Fall war, die physikalische Bedeutung der funktionalen Form von (2.7) und des dort auftretenden Differentialoperators $(d_t \partial_{\dot{q}_k} - \partial_{q_k})$ nicht direkt offensichtlich.

Um dem entgegenzuwirken, wollen wir im nächsten Abschnitt eine alternative, methodisch und inhaltlich vom Zugang oben völlig verschiedene Herleitung der Lagrange Gleichung besprechen.

2.2 Ableitung II: Variationsprinzipien

Die in diesem Abschnitt formulierte Herleitung der Lagrange Gleichung wird, im Gegensatz zu der aus Abschnitt 2.1.1 knapp und elegant sein. Der 'Preis', der hierfür zu zahlen ist, ist daß es zur Formulierung der Alternativableitung einer recht umfangreichen mathematischen Vorbereitung bedarf:

2.2.1 Exkurs über Variationsprinzipien

Vergessen wir für einen Moment die Mechanik. Wir betrachten die Menge $M \equiv \{\gamma : I = [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$. M besteht also aus allen Kurven γ , die das reelle Intervall I in den \mathbb{R}^n abbilden.



Abbildung 2.5: Zur Definition eines Funktionals. Das Funktional Φ bildet Kurven γ in die rellen Zahlen ab.

Wir betrachten nun Abbildungen

$$\begin{split} \Phi &: M & \to & \mathbb{R}, \\ \gamma & \mapsto & \Phi[\gamma] \end{split}$$

die jeder Kurve aus M eine relle Zahl zuweisen. Man nennt Abbildungen diesen Typs **Funktionale**. (Einer weit verbreiteten Konvention folgend, schreiben wir $\Phi[\gamma]$ (anstelle von $\Phi(\gamma)$), um anzudeuten, daß es sich beim Argument um eine Funktion handelt.) Funktionale bilden Kurven³ in die rellen Zahlen ab, ähnlich wie eine gewöhnliche Funktion eine Zahl oder einen Vektor in die rellen Zahlen abbildet.

Bsp.: Kurvenlänge

 $^{^{3}}$ In der allgemeinsten Definition bilden Funktionale beliebige Typen von Funktionen (also nicht unbedingt Kurven, die ja ein Spezialfall eines Funktionentyps sind) in die rellen Zahlen ab.

Ein Beispiel eines Funktionals ist die Kurvenlänge. Betrachte die Abbildung,

$$\Phi[\gamma] \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt (d_t \boldsymbol{\gamma}(t) \cdot d_t \boldsymbol{\gamma}(t))^{1/2}$$

Das Integral auf der rechten Seite gibt die Länge der Kurve an. Jeder Kurve wird durch Φ eine Zahl, die Kurvenlänge nämlich, zugewiesen.

Der Umgang mit Funktionalen erfordert etwas Gewöhnung. Sobald man mit diesen Objekten etwas vertraut ist, merkt man, daß sich mit ihnen im wesentlichen wie mit gewöhnlichen Funktionen rechnen läßt.

Wir betrachten nun zwei Kurven, $\gamma, \gamma' : I \to \mathbb{R}^n$ und fragen nach dem Inkrement $\Phi[\gamma'] - \Phi[\gamma]$ (vgl. Fig.2.5.) Es sei vorausgesetzt, daß $h \equiv \gamma' - \gamma$ klein sei (in einer Weise die gleich präzisiert werden wird.)

Ein Funktional Φ heißt **differenzierbar**, wenn

$$\Phi[\gamma+h] - \Phi[\gamma] = F|_{\gamma}[h] + O(h^2),$$

wobei $F|_{\gamma}$ ein *lineares* Funktional ist (also eines für das gilt $F|_{\gamma}[c_1h_1 + c_2h_2] = c_1F|_{\gamma}[h_1] + c_2F|_{\gamma}[h_2])$ und $O(h^2)$ symbolisch für Restterme von der Ordnung h^2 steht. Präzis: Für $|h(t)| < \epsilon$ und $|\dot{h}(t)| < \epsilon$ ist $O(h^2) < \text{const.} \cdot \epsilon^2$. Man bezeichnet das lineare Funktional $F|_{\gamma}$ als das **Differential** von Φ . Die Schreibweise deutet an, daß das Differential (im allgemeinen in nicht-linearer Weise) von γ abhängt.

Diese Definition verallgemeinert den Begriff der Differenzierbarkeit von Funktionen auf Funktionale; Ersetzt man Φ durch eine gewöhnliche Funktion f und die Argumente γ und γ' durch Zahlen, so gelangt man zurück zur Definition der Differenzierbarkeit gewöhnlicher Funktionen. Das Differential $F|_{\gamma}$ verallgemeinert die Ableitung f'(x).

Eine Kurve γ heißt **Extremalkurve** eines Funktionals Φ , falls $F|_{\gamma} = 0$ das Nullfunktional ist. Dieser Begriff verallgemeinert in offensichtlicher Weise den des Extremums einer gewöhnlichen Funktion.

Anstelle den Begriff der Differenzierbarkeit von Funktionalen in Allgemeinheit zu untersuchen, schränken wir uns von jetzt ab auf eine Klasse von Funktionalen ein, die in den Anwendungen unten eine ausgezeichnete Rolle spielen wird: Es sei L: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion (kein Funktional) von zwei vektorwertigen und einem skalaren Argument. Wir definieren nun das Funktional

$$S: M \to \mathbb{R}$$

$$\gamma \mapsto S[\gamma] \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt L(\boldsymbol{\gamma}(t), d_t \boldsymbol{\gamma}(t), t).$$

Das Funktional S ist differenzierbar und sein Differential ist durch

$$F|_{\gamma}[h] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\partial_{\gamma} L - d_t \partial_{\dot{\gamma}} L \right] \cdot \mathbf{h} dt - \partial_{\dot{\gamma}} L \cdot \mathbf{h} \Big|_{t_0}^{t_1}$$
(2.9)

gegeben⁴. Beweis:

$$\begin{split} S[\gamma+h] - S[\gamma] &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[L(\gamma+\mathbf{h}, \dot{\gamma}+\dot{\mathbf{h}}, t) - L(\gamma, \dot{\gamma}, t) \right] = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \gamma_i} h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_i} \dot{h}_i \right] + O(h^2) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \gamma_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_i} \right] h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_i} h_i \Big|_{t_0}^{t_1} + O(h^2) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\partial_{\gamma} L - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{\gamma}} L \right] \cdot \mathbf{h} + \partial_{\dot{\gamma}} L \cdot \mathbf{h} \Big|_{t_0}^{t_1} + O(h^2) = \end{split}$$

wobei wir im vorletzten Schritt partiell integriert haben.

Was sind die Extremalkurven des oben definierten Funktionals? Wir wollen diese Frage nicht in völliger Allgemeinheit beantworten, sondern eine weitere (physikalisch motivierte) Einschränkung vornehmen. Anstelle die Menge aller Kurven $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Einschränkung auf diejenigen Kurven, die $\gamma(t_0) = \gamma_0$ und $\gamma(t_1) = \gamma_1$ mit konstant vorgegebenen $\gamma_{0,1}$ erfüllen (vgl. Fig. 2.6.) O.B.d.A bezeichnen wir die Menge dieser Kurven wieder mit M.



Abbildung 2.6: Einige Elemente der durch Vorgabe von Anfangs und Endwert eingeschränkten Kurvenmenge M.

Wir behaupten nun: Das auf die Menge M eingeschränkte Funktional S ist dann und nur dann auf der Kurve $\gamma \in M$ extremal, wenn γ den Differentialgleichungen

$$\left(\partial_{\gamma_i} - d_t \partial_{\dot{\gamma}_i}\right) L(\boldsymbol{\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}, t) = 0, \qquad i = 1, \dots n$$
(2.10)

genügt. Der Beweis der einen Richtung dieser Aussage folgt direkt aus (2.9): Die der Definition von M zugrundeliegende Einschränkung beinhaltet $h(t_{0,1}) = 0$. (Bei t_0 und t_1 nehmen ja alle Kurven gleiche Werte an.) Gilt zusätzlich (2.10), so ist $F|_{\gamma}$ identisch 0. Zum Beweis der Gegenrichtung, brauchen wir folgendes

$$\partial_{\gamma} L \cdot \mathbf{h} \equiv \partial_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r}, \dot{\gamma}, t) \Big|_{\mathbf{r}=\gamma} \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{r_i} L(\mathbf{r}, \dot{\gamma}, t) \Big|_{\mathbf{r}=\gamma} h_i.$$

Auf den ersten Blick mutet die Schreibweise $\partial_{\gamma} L \cdot \mathbf{h}$ vielleicht abstrakt an. Dem muß man aber gegenüberstellen, was für eine fürchterliche Form die Formeln unten annähmen, wenn wir die 'expandierte' Notation auf der rechten Seite verwendeten!

 $^{^4\}mathrm{Die}$ in diesen Formeln verwendete Notation ist eine Kurzform für

Lemma: Gegeben sei eine stetige vektorwertige Funktion $\mathbf{f} : I = [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ mit folgender Eigenschaft: $\forall h : I \to \mathbb{R}^n$ mit $h(t_1) = h(t_2) = 0$ gilt

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \, \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{h}(t) = 0.$$

Dann ist auf ganz I, $\mathbf{f}(t) = 0$.



Abbildung 2.7: Zum Verschwinden von Funktionen, die sich gegen alle Testfunktionen zu 0 integrieren.

Dieses Lemma wird in praktisch jedem Lehrbuch der Analysis mit großer Sorgfalt bewiesen. Wir beschränken uns hier darauf, die Beweisidee für den Fall skalarer Funktionen (n = 1) zu skizzieren (vgl. Fig. 2.7). Angenommen, es gäbe ein $t \in I$ mit $f(t) \neq 0$. Dann ist aufgrund der Stetigkeit f in einer ganzen Umgebung von t nichtverschwindend. Wir definieren uns nun eine 'Testfunktion' h, die in einer Umgebung von t gepeakt, im Großteil des Intervalls aber verschwindend klein ist. Das mit dieser Funktion konstruierte Integral $\int fh$ wäre nichtverschwindend \rightsquigarrow Widerspruch.

Aufgabe: Generalisieren Sie das obige Argument auf den Fall vektorwertiger Funktionen f.

Damit ist der Beweis der Gegenrichtung der Aussage oben weitgehend komplett: Nehmen wir an, es sei für ein gewisses γ , $F|_{\gamma} = 0$. Dann ist

$$\forall h: \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left[\partial_{\gamma} L - d_t \partial_{\dot{\gamma}} L \right] \cdot \mathbf{h} dt = 0.$$

Da sowohl alle unsere Kurven als auch L stetig differenzierbar sind, sind die Voraussetzungen des Lemmas oben erfüllt. Da ferner h nach Konstruktion beliebig gewählt werden kann, folgt daß (2.10) für die einzelnen Komponenten des Vektors $\partial_{\gamma}L - d_t \partial_{\dot{\gamma}}L$ gelten muß.

Der Übersichtlichkeit halber wiederholen wir noch einmal die Kernaussage dieses Abschnitts:

Bei vorgegebener Funktion L ist das auf der Menge aller Kurven γ mit $\gamma(t_{0,1}) = \gamma_{0,1}$ ($\gamma_{0,1}$ für alle Kurven gleich) definierte Funktional

$$S[\gamma] \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt L(\boldsymbol{\gamma}(t), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t), t)$$

auf genau denjenigen Kurven extremal, die den Differentialgleichungen

,

$$(\partial_{\gamma_i} - d_t \partial_{\dot{\gamma}_i}) L(\boldsymbol{\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}, t), \qquad i = 1, \dots, n$$

genügen. Man bezeichnet diese Gleichungen als die **Euler-Lagrange Gleichungen** für das Funktional S.

Der Differential operator $\partial_{\gamma_i} - d_t \partial_{\dot{\gamma}_i}$ wird im folgenden gehäuft auftreten. Zur Vereinfachung der Notation definieren wir das Symbol

$$\frac{\delta S[\gamma]}{\delta \gamma_i(t)} \equiv (\partial_{\gamma_i} - d_t \partial_{\dot{\gamma}_i}) L(\boldsymbol{\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}, t).$$

Man bezeichnet $\delta S/\delta \gamma$ als die **Funktionalableitung**⁵ von S nach γ . Eine Kurve ist Extremalkurve, wenn die Funktionalableitung identisch verschwindet,

$$\gamma$$
 Extremal kurve $\Leftrightarrow \forall t : \frac{\delta S[\gamma]}{\delta \gamma_i(t)} = 0.$

Beachten Sie, daß die Struktur der Euler Lagrange Gleichungen mit der der Lagrange Gleichungen (2.7) übereinstimmt. Das ist natürlich kein Zufall. Wir werden die Beziehung zwischen Extremalkalkül und Lagrange Formulierung der Mechanik im nächsten Abschnitt besprechen, vorher jedoch den Umgang mit Funktionalableitungen an einem Beispiel illustrieren.

Bsp.: Extremalwert der Kurvenlänge

Wir probieren die allgemeine Aussage oben für ein zwei-dimensionales Beispiel (n = 2) aus. Es sei $\gamma(t) \equiv \mathbf{x}(t) \equiv (x_1(t), x_2(t))$ eine in zweidimensionalen kartesischen Koordinaten dargestellte Kurve. Wir betrachten die Funktion

$$L(\dot{\mathbf{x}}) = |\dot{\mathbf{x}}| = (\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})^{1/2} = (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{1/2},$$

(also den Spezialfall einer Funktion L, die keine Abhängigkeit von der Koordinate **x** selbst und von der Zeit hat.) Vergleich mit dem Beispiel auf Seite 78 zeigt, daß

⁵Ähnlich wie man eine Funktion f(x) nach der Zahl x abgeleitet werden kann, kann ein Funktional $S[\gamma]$ nach dem kurvenwertigen Argument γ abgeleitet werden. Das Resultat ist die Funktionalableitung. Dieser Begriff wird in der Funktionalanalysis systematisch definiert. Uns kommt es aber nur darauf an, $\delta S/\delta \gamma$ als die Notation vereinfachendes Symbol zu verwenden.

2.2. ABLEITUNG II: VARIATIONSPRINZIPIEN

das Funktional⁶

$$S[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\mathbf{x}}) dt$$

die zwei-dimensionale Variante des allgemeinen Funktionals für die Kurvenlänge ist. Wir fragen für welche zwischen $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ verlaufenden Kurven dieses Funktional extrem wird, welche Kurven in zwei Dimensionen also extremale Länge haben. Die Euler-Lagrange Gleichung lautet

$$\left(\partial_{x_i} - d_t \partial_{\dot{x}_i}\right) \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)^{1/2} = \frac{\ddot{\mathbf{x}}_i}{|\dot{\mathbf{x}}|} - \frac{\dot{\mathbf{x}}_i (\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})}{|\dot{\mathbf{x}}|^3}.$$
(2.11)

Diese Gleichung wird von allen \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_1 geradlinig verbindenden Kurven gelöst. Eine gerade Verbindungskurve $\mathbf{x}(t)$ läßt sich ja gemäß $\mathbf{x}(t) = [(t - t_1)\mathbf{x}_0 - (t - t_0)\mathbf{x}_1]/(t_0 - t_1)$ parameterisieren. In dieser Parametrisierung gilt $\ddot{\mathbf{x}} = 0$ und (2.11) ist offensichtlich gelöst.

Aufgabe: Man könnte auf die Idee kommen, eine gerade Verbindungslinie zwischen \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_1 anders als oben zu parameterisieren. Anschaulich gesprochen: Während in der Parametrisierung oben die Strecke zwischen \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_0 mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird, sind auch Durchläufe mit variabler Geschwindigkeit denkbar. Finden Sie eine solche Alternativparametrisierung. Machen Sie sich anschaulich klar (besser: zeigen Sie), daß für Prameteriesierungen, die von der oben abweichen, $\ddot{\mathbf{x}}$ nicht überall in $[t_0, t_1]$ verschwinden kann. Überprüfen Sie, daß (2.11) dennoch Gültigkeit hat.

Wir haben also die anschaulich offensichtliche Tatsache verifiziert, daß gerade Kurven die Länge extremieren. Etwas weniger leicht zu beweisen ist die (gleichfalls anschaulich evidente) Tatsache, daß es keine anderen Lösungen gibt. (Keine krumme Kurve kann Extremalkurve des Längenfunktionals sein.)

Aufgabe: Zeigen Sie, daß (2.11) ausschließlich von geraden Kurven gelöst wird: Tip: Machen Sie sich klar, daß der zweite Term auf der rechten Seite von (2.11) die Projektion des Beschleunigungsvektors auf den der Geschwindigkeit proportionalen Einheitsvektor $\dot{\mathbf{x}}/|\dot{\mathbf{x}}|$ ist. Daraus folgt, daß (2.11) nur von Kurven gelöst wird, deren Beschleunigungsvektor parallel zum Geschwindigkeitsvektor liegt. Zeigen Sie, daß das nur für gerade Kurven der Fall ist.

Zum Abschluß dieses Abschnitts noch eine wichtige Bemerkung: Wie bereits früher betont (siehe S. 12) handelt es sich bei einer Kurve um ein geometrisches Objekt,

⁶Es ist vielleicht eine gute Idee, sich hier noch einmal die Bedeutung der Notation klarzumachen: In $S[\mathbf{x}]$ bedeutet $[\mathbf{x}]$ Abhängigkeit von der Kurve als komplettes geometrisches Objekt. In $L(\dot{\mathbf{x}})$ bedeutet $(\dot{\mathbf{x}})$ Abhängigkeit von der *lokal* bei einer gewissen Zeit t genommenen Zeitableitung der Kurve. Man muß sich klarmachen, daß in ' $[\mathbf{x}]$ ' die komplette Information über die Kurve, inklusive aller ihrer zeitlichen Ableitungen steckt. Daher ist es kein Widerspruch, daß auf der rechten Seite der Funktionaldefinition die Zeitableitung explizit auftaucht, auf der linken aber nicht.

das unabhängig von seiner Koordinatendarstellung existiert. Dementsprechend ist die Aussage, daß eine gewisse Kurve ein vorgegebenes Funktional extremiere gleichfalls von Koordinaten unabhängig. Auf der anderen Seite sind die zur Untersuchung von Extremwerteigenschaften verwendeten Euler-Lagrange Gleichungen in Koordinaten formuliert. Die *Struktur* der Gleichungen (2.10) ist immer die gleiche, was eine unmittelbare Konsequenz ihrer Herleitung ist. (Wir haben zwar Koordinaten verwendet, aber niemals von speziellen Eigenschaften eines besonderen Koordinatentyps Gebrauch gemacht.) Die konkrete Form der Gleichungen hängt aber im allgemeinen von der Koordinatenwahl ab.

Wir werden diesen Sachverhalt weiter unten noch ausführlicher untersuchen. An dieser Stelle sei nur anhand des obigen Beispiels illustriert, welch drastischen Einfluß die Koordinatenwahl auf Form und Schwierigkeit der Lösung eines Problems haben kann.

Bsp.: Gerade Linien in Polarkoordinaten

Im Beispiel oben hatten wir verifiziert, daß gerade Linien das Funktional für die Kurvenlänge extremieren. Dabei handelt es sich um eine koordinaten *unabhängige* Aussage. Die Rechnung dagegen hatten wir in kartesischen Koordinaten durchgeführt.



Abbildung 2.8: Gerade Linie in Polarkoordinaten.

Man könnte nun auf die zugegebenermaßen abwegige Idee kommen, eine gerade Kurve mit kartesischer Darstellung $x_1(t) = t, x_2(t) = at + b$ in Polarkoordinaten (r, ϕ) darzustellen (vgl. Fig. 2.8). Die Polardarstellung von Kurve und Funktion L lautet

$$r(t) = \sqrt{(at+b)^2 + t^2},$$

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{at+b}{t}\right)$$

und

$$L(\dot{\mathbf{x}}) = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}$$

Aufgabe: Verifizieren sie diese Formeln.

Die Euler-Lagrange Gleichungen in Polarkoordinaten behalten ihre standard Form (vgl. (2.10) und die Bemerkungen oben)

$$(d_t \partial_{\dot{r}} - \partial_r) L = 0, (d_t \partial_{\dot{\phi}} - \partial_{\phi}) L = 0.$$

Aufgabe: Stellen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen *explizit* auf, d.h. führen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_{r,\dot{r},\phi,\dot{\phi}}$ an der oben angegebenen Funktion L aus. Es resultieren zwei gewöhnliche Differentialgleichungen in den Variablen (r,ϕ) . Verifizieren Sie, daß diese Gleichungen durch die oben in Polarkoordinaten parameterisierten geraden Linien gelost werden.

An diesem Beispiel sieht man sehr plastisch, wie wichtig eine effiziente Koordinatenwahl bei der Lösung mechanischer Probleme ist.

2.2.2 Hamilton'sches Extremalprinzip und Weitere Begriffsbildung

In Abschnitt 2.1.2 hatten wir gesehen, daß die in generalisierten Koordinaten ausgedrückte Lösungskurve eines mechanischen Problems die Lagrange Gleichungen (2.7) löst. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gefunden, daß Gleichungen dieses Typs die Extremalkurven von Funktionalen festlegen. Die beiden Resultate lassen sich zu einer Aussage über die Lösungskurven mechanischer Probleme kombinieren, dem sogenannten **Hamiltonschen Extremalprinzip**:

Gegeben sei ein in generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_f)$ formuliertes mechanisches System mit f Freiheitsgraden und Lagrangefunktion $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = (T - U)(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Es sei $\mathbf{q}(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung

$$(d_t \partial_{\dot{q}_k} - \partial_{q_k}) L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \qquad k = 1, \dots, f$$

mit Anfangs- bzw. Endwert $\mathbf{q}(t_0) \equiv \mathbf{q}_0$ und $\mathbf{q}(t_1) \equiv \mathbf{q}_1$. Eine solche Kurve ist Extremalkurve des sogenannten Wirkungsfunktionals

$$S[q] \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t).$$

Den Beweis dieses Sachverhalts läuft auf eine Kombination zweier in den Abschnitten 2.1 und 2.2 erarbeiteter Aussagen heraus: Die physikalischen Bewegungsgleichungen (2.7) sind ein Spezialfall von Euler-Lagrange Gleichungen (der für das über die Funktion L definierte Funktional $\int dt L$ nämlich). Wie oben diskutiert, stehen Lösungen

der Euler-Lagrange Gleichungen in eindeutiger Beziehung mit Extremalkurven des entsprechenden Funktionals.

Wir haben über das Hamiltonsche Prinzip also einen Bezug zwischen der Lagrange Formulierung der Mechanik und dem Extremalkalkül hergestellt. Was wir noch nicht wissen, ist wozu diese Brückenbildung nützlich ist. Vor Einstieg in die Diskussion dieser Frage ist es sinnvoll, die Begriffsbildung der Lagrange Formulierung der Mechanik zu einem Abschluß zu bringen und noch zwei weitere relevante Konzepte einzuführen.

Für eine generalisierte Koordinate q_i bezeichnet man die Größe

$$p_i \equiv \partial_{\dot{q}_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

als den ihr zugeordneten **generalisierten Impuls**. Die Motivation für die Bezeichnung ist, daß sich der generalisierte Impuls für eine 'gewöhliche' Lagrange Funktion mit kinetischer Energie $T = (m/2)\dot{\mathbf{q}}^2$ und geschwindigkeitsunabhängigem Potential $U(\mathbf{q})$ auf den in Kapitel 1 definierten Impuls

$$p_i = mv_i$$

reduziert. Weiter definiert man

$$F_i \equiv \partial_{a_i} L$$

als i-te Komponente einer generalisierten Kraft. Als unmittelbare Konsequenz der Definitionen ergibt sich

$$d_t p_i = F_i. (2.12)$$

Diese Gleichungen stellen eine Art Verallgemeinerung der Newton Gleichungen dar. In kartesischen Koordinaten reduzieren sie sich auf die Newton Gleichungen. Anders als diese gelten (2.12) jedoch in beliebigen Koordinatensystemen und stellen damit eine wesentlich allgemeinere Beschreibungsform mechanischer Systeme dar.

Eine generalisierte Koordinate q_i , die in der Lagrange Funktion nicht auftaucht $(\partial_{q_i} L = 0)$, wird als **zyklische Koordinate** bezeichnet.

Der einer zyklischen Koordinate zugeordnete generalisierte Impuls ist erhalten.

Der Beweis ist einfach: Aus der Lagrange Gleichung folgt

$$d_t p_i = d_t \partial_{\dot{q}_i} L \stackrel{(2.7)}{=} \partial_{q_i} L = 0.$$

Bsp.: Zentralpotential in Lagrange Formulierung

Zur Illustration der Begriffe 'generalisierte Koordinate, Kraft, Impuls' kehren wir noch einmal zum Zentralkraft Problem zurück. Wir vereinfachen uns das Leben, indem wir von Anfang an investieren, daß sich die Bewegung in der durch Anfangsort und -geschwindigkeit festgelegten Ebene abspielt (siehe S. 38.) In dieser Ebene führen wir Polarkoordinaten (r, ϕ) bezüglich des Ursprungs als generalisierte Koordinaten ein. Die in Polarkoordinaten ausgedrückte Lagrange Funktion lautet

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r)$$

Die Koordinate ϕ ist zyklisch. Den ihr zugeordneten generalisierten Impuls

$$p_{\phi} = mr^2 \dot{\phi}$$

erkennen wir als den (erhaltenen) Drehimpuls wieder (vgl. Seite 38.) Die ϕ zugeordnete generalisierte Kraft $F_{\phi} = \partial_{\phi}L = 0$ verschwindet.

Wir generalisieren das Problem ein wenig und nehmen an, daß zusätzlich zur Zentralkraft eine beliebige in der Ebene liegende Kraft $\mathbf{F} = -\nabla \tilde{U}$ an das Teilchen angreife. Die nun im allgemeinen nicht mehr verschwindende generalisierte Kraft $-\partial_{\phi}\tilde{U}$ ist das am Teilchen angreifende Drehmoment $\mathbf{n} \equiv n\mathbf{e}_3^7$ in Verkleidung. Man erkennt dies, indem man auf kartesische Koordinaten rücktransformiert:

$$Q_{\phi} = -\partial_{\phi}\tilde{U} = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_{i}} \partial_{\phi} x_{i} = \sum_{i,j=1}^{2} \epsilon^{ij} F_{i} x_{j} = n,$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen auf den standard Umrechnungsformeln

$$x_1 = r\cos\phi, \qquad x_2 = r\sin\phi$$

beruht und

$$\epsilon^{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) = (1,2) \\ -1 & (i,j) = (2,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der sogenannte voll antisymmetrische Tensor ist. (Es ist $n = (\mathbf{x} \times \mathbf{F})_3 = \sum_{i,j} \epsilon^{ij} x_i F_j$.) Dieses Beispiel illustriert den allgemeinen Sachverhalt, daß die aus einer problemangepassten Koordinatenwahl resultierenden generalisierten Größen in der Regel physikalische Bedeutung tragen (hier Drehimpuls, Drehmoment u.s.w.)

Der Übersichtlichkeit halber stellen wir noch einmal das für das Arbeiten im Lagrange Formalismus benötigte Vokabular zusammen:

2.3 Über die Bedeutung des Hamiltonschen Extremalprinzips

Im vorangegangenen Abschnitt hatten wir den Kontakt zwischen der Lagrange Formulierung der Mechanik und Variationsprinzipien hergestellt. Was wir noch nicht

 $^{^7\}mathrm{Das}$ Drehmoment einer parallel in der Bewegungsebene liegenden Kraft steht senkrecht auf der Ebene.

Größe	Bezeichnung bzw. Definition
Verallgemeinerte Koordinate	q_k
Verallgemeinerter Impuls	$p_k = \partial_{\dot{q}_k} L$
Verallgemeinerte Kraft	$F_k = \partial_{q_k} L$
Lagrange Funktion	$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\dot{t})$
Wirkung(sfunktional)	$S[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$
Funktionalableitung	$\frac{\delta S[\mathbf{q}]}{\delta q_i(t)} = (\partial_{q_i} - d_t \partial_{\dot{q}_i}) L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$

Tabelle 2.1: Für die Lagrange Formulierung der Mechanik relevante Größen.

gesehen haben, ist wozu dieser Zusammenhang nützlich ist. Über den Anwendungsnutzen des Lagrange Formalismus an sich brauchen nicht mehr viele Worte verloren zu werden; die Verwendung von Lagrange Gleichungen ist der Newton Beschreibung bei der Analyse mechanischer Systeme mit Zwangsbedingungen haushoch überlegen. Damit wird der Lagrange Formalismus zu einem für die Praxis zentral wichtigen Werkzeug.

Die Vorteile, die sich aus dem Bezug zu Variationsprinzipien ergeben sind mehr grundsätzlicher Natur⁸. Durch Analyse des der Lagrange Funktion zugeordneten Wirkungsfunktionals lassen sich tiefe Grundstrukturen der Mechanik verstehen und für die Praxis nutzbar machen. Zwei wichtige Beispiele solcher Zusammenhänge, die Koordinateninvarianz der Formulierung mechanischer Probleme und der sich bereits in Kapitel 1 abzeichnende Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen, sollen in diesem Abschnitt diskutiert werden.

2.3.1 Koordinateninvarianz der Lagrange Gleichungen

Bereits an den bislang in diesem Kurs abgehandelten Beispielen wird klar, daß in der Praxis mechanischen Rechnens immer wieder zwischen verschiedenen Koordinatensystemen gewechselt werden muß. Es ist daher gut zu wissen, daß der Lagrange Formalismus einem flexiblen Hin- und Herwechseln zwischen verschiedenen Koordinatensystemen ideal angepasst ist. In diesem Abschnitt wollen wir zunächst den Begriff des Koordinatenwechsels präzisieren, dann den allgemeinen Beweis der Koordinateninvarianz der Lagrange Gleichungen führen und schließlich eine anschauliche Begründung für die Koordinatenunabhängigkeit geben.

Um die Koordinateninvarianz der Lagrange Formulierung inhaltlich (im Gegensatz zu rein rechnerisch) verstehen zu können, müssen wir den Begriff des Koordinatenwechsels etwas präziser definieren als das bislang geschehen ist. Wir erinnern zunächst daran, daß die Physik von Bewegungen an sich keinen Bezug zu Koordinaten hat. Die Bewegung eines N-Teilchensystems, z.B. wird sich im allgemeinen in einer (möglicherweise durch Zwangsbedingungen eingeschränkten) ($f \leq 3N$)-

 $^{^{8}\}mathrm{Am}$ Rande bemerken wir, daß sowohl die Lagrange Funktion als auch das Wirkungsfunktional eine *quanten*mechanische Entsprechung haben. In der Quantenmechanik hat das Wirkungsfunktional nicht nur grundsätzliche Bedeutung, sondern wird auch bei der Lösung konkreter Probleme zu einem mächtigen Werkzeug.

dimensionalen Untermannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^{3N} ab⁹. Diese Mannigfaltigkeit ist ohne Bezug auf Koordinaten definiert. Lediglich für praktische Zwecke führen wir im allgemeinen Koordinaten auf M ein. Wir erinnern daran (siehe S. 1.5.3), daß ein Satz von Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_f)$ über eine Koordinatenabbildung

$$\begin{split} \phi : \mathbb{R}^f \supset V &\to M \\ \mathbf{q} &\mapsto \phi(\mathbf{q}) \end{split}$$

erzeugt ist. Nehmen wir nun an, daß M Bild zweier verschiedener Koordinatenabbildungen ϕ_1 und ϕ_2 sei¹⁰. Jedem Punkt $\mathbf{a} \in M$ sind damit zwei Koordinatenvektoren $\mathbf{q}_i \in V_i, i = 1, 2$ zugeordnet (vgl. Fig. 2.9). Die Umrechnung von einem Satz Koordinaten auf den anderen erfolgt vermöge der differenzierbaren Abbildung

$$\rho \equiv \phi_2^{-1} \circ \phi_1 : V_1 \quad \to \quad V_2, \tag{2.13}$$

$$\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\rho}(\mathbf{q}_1) \equiv \mathbf{q}_2. \tag{2.14}$$

Manchmal schreibt man der Kürze halber $\mathbf{q}_2(\mathbf{q}_1)$ um die Abhängigkeit von \mathbf{q}_2 von \mathbf{q}_1 auszudrücken. Sollte mit dieser Notation einmal Verwirrung entstehen, ist es gut, die korrekte Definition der vermittelnden Abbildung ρ noch einmal zu rekapitulieren. Die Abbildung ρ bildet die formale Definition von Koordinatenwechseln, wie wir sie schon von Anfang an verwendet haben. Für den Fall $M = \mathbb{A}^2$ hätten wir z.B. mit

$$\begin{split} \phi_1 : V_1 &\equiv \mathbb{R}^2 &\to M, \\ \mathbf{q}_1 &\equiv (x_1, x_2) &\mapsto \mathbf{o} + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2, \end{split}$$

kartesische und mit

$$\phi_2 : V_2 \equiv \mathcal{R} \times [0, 2\pi[\rightarrow M, \mathbf{q}_2 \equiv (r, \phi) \mapsto \mathbf{o} + r\mathbf{e}_i$$

Polarkoordinaten gewählt. (Beachten Sie, daß die ϕ -Abhängigkeit von $\phi_2(\mathbf{q})$ in der Winkelabhängigkeit von \mathbf{e}_r implizit ist.) Der Koordinatenwechsel ist durch die Abbildung

$$\rho: V_1 \to V_2$$

 $(x_1, x_2) \mapsto ((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \arctan(x_2/x_1))$

vermittelt.

⁹Genauer gesagt, handelt es sich bei M um eine Untermannigfaltigkeit des 3N-dimensionalen affinen Raumes \mathbb{A}^{3N} . Da sich letzterer jedoch nach Identifikation eines Ursprungs mit dem \mathbb{R}^{3N} identifizieren läßt, fassen wir M als Untermannigfaltikeit des 3N-dimensionalen Vektorraums auf.

¹⁰Im allgemeinen wird sich eine Mannigfaltigkeit nicht global von einer einzigen Koordinatenabbildung überdecken lassen, d.h. im allgemeinen ist $\phi(V) \subset M$ eine echte Teilmenge von M. Für $\phi(V) \subset M$ sind mehrere Koordinatenabbildungen zur Überdeckung von M erforderlich. Alles was weiter unten über Koordinatenwechsel gesagt werden wird ist ohne Schwierigkeiten auf diesen Fall verallgemeinerbar. Um die Darstellung transparent zu halten, wollen wir auf den Fall nicht global abbildbarer Mannigfaltigkeiten jedoch nicht explizit eingehen.



Abbildung 2.9: Zur mathematischen Definition von Koordinatenwechseln, Erklärung der Symbole, siehe Text.

Nehmen wir nun an, wir hätten ein mechanisches Problem in zwei Sätzen von Koordinaten \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_2 formuliert, die Lagrangefunktionen $L_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, t)$ und $L_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2, t)$ in beiden Bildern aufgestellt und die Bewegungsgleichungen vorliegen. Die Koordinateninvarianz der Lagrange Mechanik läßt sich nun folgendermaßen ausdrücken:

Für eine differenzierbare Abbildung ρ (die durch einen Koordinatenwechsel erzeugt, aber auch anderer Herkunft sein kann) ist die Kurve $\mathbf{q}_2(t) \equiv \boldsymbol{\rho}(\mathbf{q}_1(t))$ genau dann Lösung der Bewegungsgleichungen

$$(\partial_{\mathbf{q}_2} - d_t \partial_{\dot{\mathbf{q}}_2}) L_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2, t) = 0,$$

wenn $\mathbf{q}_1(t)$ die Gleichung

$$(\partial_{\mathbf{q}_1} - d_t \partial_{\dot{\mathbf{q}}_1}) L(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, t) = 0$$

löst, wobei

$$L_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, t) = L_2(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{q}_1), d_t \boldsymbol{\rho}(\mathbf{q}_1), t) = L_2(\mathbf{q}_2(\mathbf{q}_1), d_t \mathbf{q}_2(\mathbf{q}_1), t).$$

Die Bedeutung dieses Sachverhalts kann nicht hoch genug angesetzt werden: Bei der Lösung mechanischer Probleme im Rahmen des Lagrange Formalismus' besteht völlige Freiheit in der Wahl der generalisierten Koordinaten. Sobald die Lagrange Funktion in einem vorgegebenen Satz von Koordinaten aufgestellt ist, ist die Glei-

2.3. ÜBER DIE BEDEUTUNG DES HAMILTONSCHEN EXTREMALPRINZIPS91

chung $(\partial_{\mathbf{q}} - d_t \partial_{\dot{\mathbf{q}}})L = 0$ zu lösen. Die Form dieser Gleichungen ändert sich beim Wechsel zwischen Koordinaten nicht. (Dies ist zu vergleichen mit der Newtonschen Formulierung, in der die Bewegungsgleichungen sensitiv von der Wahl der Koordinaten abhängen und nur für Intertialsysteme in kartesischen Koordinaten ihre kanonische Form $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ annehmen.)

Bevor wir die Koordinateninvarianz der Lagrange Mechanik anschaulich erklären, formulieren wir ihren (wenig inspirierenden) Beweis. Es sei, $\delta S_2[\mathbf{q}_2]/\delta \mathbf{q}_2(t) = 0$, d.h. $\mathbf{q}_2(t)$ sei eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen. Zu verifizieren ist, daß daraus $\delta S_1[\mathbf{q}_1]/\delta \mathbf{q}_1(t) = 0$ folgt. Unter Verwendung von

$$\dot{q}_{2,i}(\mathbf{q}_1) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \rho_i(\mathbf{q})}{\partial q_{1,j}} \dot{q}_{1,j}$$

ergibt sich

$$d_t \partial_{\dot{q}_{1,i}} L_1 = d_t \sum_{j=1}^f \frac{\delta L_2}{\delta \dot{q}_{2,j}} \frac{\partial \dot{q}_{2,j}}{\partial \dot{q}_{1,i}} = d_t \sum_{j=1}^f \frac{\delta L_2}{\delta \dot{q}_{2,j}} \frac{\partial q_{2,j}}{\partial q_{1,i}} =$$
$$= \sum_{j=1}^f \left(d_t \left(\frac{\delta L_2}{\delta \dot{q}_{2,j}} \right) \frac{\partial q_{2,j}}{\partial q_{1,i}} + \frac{\delta L_2}{\delta \dot{q}_{2,j}} \frac{\partial \dot{q}_{2,j}}{\partial q_{1,i}} \right)$$

und

$$\partial_{q_{1,i}}L_1 = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\delta L_2}{\delta \dot{q}_{2,j}} \frac{\partial \dot{q}_{2,j}}{\partial q_{1,i}} + \frac{\delta L_2}{\delta q_{2,j}} \frac{\partial q_{2,j}}{\partial q_{1,i}}\right).$$

Substraktion dieser beiden Gleichungen führt auf

$$\frac{\delta S_1[\mathbf{q}_1]}{\delta q_{1,i}} = (\partial_{q_{1,i}} - d_t \partial_{\dot{q}_{1,i}}) L_1[\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, t] = \sum_{j=1}^f \underbrace{\left(\frac{\delta L_2}{\delta q_{2,j}} - d_t \left(\frac{\delta L_2}{\delta \dot{q}_{2,j}}\right)\right)}_{= 0} \frac{\partial q_{2,j}}{\partial q_{1,i}} = 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Die eben für den Fall 'statischer Abbildungen' ρ bewiesene Koordinaten
invarianz der Lagrange Gleichunge gilt auch für den Fall explizit zeit
abhängiger Koordinatentransformationen,

$$\rho(t): V_1 \rightarrow V_2$$

$$\mathbf{q}_1 \mapsto \mathbf{q}_2 \equiv \boldsymbol{\rho}(\mathbf{q}_1, t).$$

Aufgabe: Erweitern sie den gerade durchgeführten Beweis auf diesen Fall.

Die Rechnung oben beweist die Koordinateninvarianz der Lagrange Mechanik, ist aber inhaltlich nicht besonders erhellend. Der direkteste Weg zu einem anschaulichen Verständnis führt über die Deutung der Lagrange Gleichungen als Ausdruck eines Variationsprinzips. Auf der Konfigurationsmannigfaltigkeit M ist ein Wirkungsfunktional $S[\gamma]$ definiert. Eine Lösung der Bewegungsgleichungen existiert genau dann, wenn es eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$ gibt, die $S[\gamma]$ extremiert. Diese Aussagen sind koordinatenunabhängig.

Zum tatsächlichen Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichungen verwenden wir Koordinaten. Für jede Koordinatenabbildung ϕ_1 induziert γ eine Kurve $\gamma_1 = \phi^{-1} \circ \gamma$: $I \to V_1$ (siehe Fig.2.9). Das Funktional $S[\gamma]$ induziert das in Koordinaten ausgedrückte Funktional $(S \circ \phi)[\gamma_1]$, das jede Kurve γ_1 in V_1 auf $(S \circ \phi)[\gamma_1] \equiv S[\phi \circ \gamma_1] = S[\gamma]$ abbildet. Das für $S_1[\gamma_1]$ in Koordinaten dargestellte Extremalprinzip nimmt die Form der Euler-Lagrange Gleichungen bezüglich der Variablen \mathbf{q}_1 an. Gleiches gilt für die durch die Koordinatenabbildung ϕ_2 erzeugte Kurve γ_2 , Funktional $S_2[\gamma_2]$, u.s.w.

Man muß sich nun klarmachen, daß wir es bis auf das Einschieben von Koordinatenabbildungen immer noch mit dem ursprünglichen Funktional $S[\gamma]$ zu tun haben:

$$S[\gamma] = S_1[\gamma_1] = S_2[\gamma_2] = \dots$$

M.a.W. wenn γ das Funktional $S[\gamma]$ extremiert, extremiert die induzierte Kurve γ_1 das in Koordinaten formulierte Funktional $S_1[\gamma_1]$, und analoges gilt für das Koordinatensystem 2. Dies ist das allgemeine Prinzip, das hinter der Koordinateninvarianz der Lagrange Mechanik steckt.

2.4 Noether Theorem

Bereits in Abschnitt 1.3.1 hatten wir auf einen sich abzeichnenden Zusammenhang zwischen den Symmetrien der Newton Mechanik und ihren Erhaltungsgrößen hingewiesen. Diese Beziehung läßt sich erst im Rahmen der Lagrange Formulierung vernünftig fassen und in Allgemeinheit in die Theorie einbauen. In diesem Abschnitt wollen wir zunächst den Begriff der Symmetrie eines mechanischen Systems unter einer vorgegebenen Transformation definieren und dann beweisen, daß eine solche Symmetrie grundsätzlich eine erhaltene Größe nach sich zieht. Die hier vorgestellte Argumentationskette ist sehr allgmein, in dem Sinne, daß sie nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik, Quantenmechanik und in anderen Teilgebieten der Physik unverändert Gültigkeit hat.



Abbildung 2.10: Zur Definition von Symmetrietransformationen

Wir betrachten eine einparametrige Schar von Abbildungen

$$\begin{aligned} h_s : V &\to V \\ \mathbf{q} &\mapsto & h_s(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

der Koordinatenmannigfaltigkeit eines mechanischen Systems in sich, wobei s ein kontinuierlicher Parameter ist und $h_{s=0}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$ die Identität ist (vgl. Fig. 2.10). Man bezeichnet die Transformation h_s als eine **Symmetrie**(transformation) des Systems, wenn das Wirkungsfunktional

$$S[q] = S[h_s \circ q]$$

bei Anwendung von h_s invariant bleibt. Es gilt folgender

Satz (E. Noether): Die Wirkung S[q] eines mechanischen Systems sei unter der Transformation $\mathbf{q} \mapsto h_s(\mathbf{q})$ invariant. Es sei $\mathbf{q}(t)$ eine Lösungskurve des Systems. Dann ist die Größe

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d_s h_{s,i}(\mathbf{q})$$
$$d_t I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0.$$
(2.15)

erhalten:

Beachten Sie, daß eine für die Invarianz der Wirkung hinreichende Bedingung das Verschwinden der totalen Ableitung

$$d_s L(h_s(\mathbf{q}), d_t h_s(\mathbf{q}), t) = 0$$

ist. In der Praxis ist es oft leichter, mit der Lagrangefunktion anstelle mit der Wirkung selbst zu arbeiten.

Beweis: Nach Voraussetzung ist die Wirkung des Systems invariant. Wir bilden die (verschwindende) Variation explizit,

$$0 = d_s S[h_s(\mathbf{q})] = \int_0^t dt \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} d_s h_{s,i}(\mathbf{q}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d_s \dot{h}_{s,i}(\mathbf{q}) \right) =$$
$$= \int_0^t dt \sum_{i=1}^f \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - d_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Big|_{h_s(q)} d_s h_{s,i}(\mathbf{q}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d_s h_{s,i}(\mathbf{q}) \Big|_0^t \right] \stackrel{(2.7)}{=} \sum_{i=1}^f \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right|_{h_s(q)} d_s h_{s,i}(\mathbf{q}) \Big|_0^t.$$

Da das Zeitargument t beliebig gewählt werden kann, folgt aus der letzten Zeile

$$d_t \sum_{i=1}^{f} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right|_{h_s(q)} d_s h_{s,i}(\mathbf{q}) = 0,$$

womit (2.15) bewiesen ist. Im Beweis oben bedeutet das Symbol $|_{h_s(q)}$, daß die Ableitungen der Lagrangefunktion an der Stelle $h_s(q)$ zu nehmen sind.

Aufgabe: Begruden Sie, daß aus der Invarianz der Wirkung folgt, daß mit q auch $h_s \circ q$ Extremalkurve ist, und damit die Euler Lagrange Gleichungen löst.

Wir analysieren den Zusammenhang zwischen Symmetrien und erhaltenen Größen für einige Erhaltungsgrößen, die uns bereits früher begegnet sind.

Bsp.: Translationsinvarianz \leftrightarrow Impulserhaltung

Wir betrachten die Dynamik eines Teilchens in einer Umgebung mit Translationsinvarianz in einer Koordinatenrichtung. Wir wählen kartesischen Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, wobei die 1-Richtung als Invarianzrichtung festgelegt sei. Eine Raumtranslation ist mathematisch über die Abbildung

$$h_s(\mathbf{q}) = \mathbf{q} + s\mathbf{e}_1$$

erzeugt. Translationsinvarianz bedeutet, daß die Lagrangefunktion (und damit die Wirkung) ungeändert bleiben:

$$d_s L(h_s(\mathbf{q}), d_t h_s(\mathbf{q}), t) = 0 \Rightarrow d_s S[h_s(\mathbf{q})] = 0.$$

Der erhaltene Strom ist

$$I = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d_s h_{s,i}(\mathbf{q}) = \partial \dot{q}_1 L = p_1.$$

Translationsinvarianz impliziert Erhaltung des Impulses.

Aufgabe: Generalisieren sie die Argumentation auf ein System von *N*-Teilchen, das keinerlei *externen* Kräften ausgesetzt ist. Zeigen Sie, (i) daß das System invariant unter der Abbildung $\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}_i + s\mathbf{e}$ (\mathbf{q}_i : kartesischer Koordinatenvektor des *i*-ten Teilchens, \mathbf{e} : beliebiger fester Vektor) ist und (ii) daß diese Invarianz die Erhaltung des Gesamtimpulses \mathbf{P} nach sich zieht (Notation wie in Abschnitt 1.3.2.)

Bsp.: Rotationsinvarianz \leftrightarrow Drehimpulserhaltung

Wir betrachten ein System, das unter Drehungen um die 3-Achse invariant sei. In kartesischen Koordinaten ist eine Drehungen erzeugende Schar von Abbildungen durch

$$\mathbf{q} \to h_{\phi}(\mathbf{q}) \equiv R_{\phi}^{(3)}\mathbf{q}$$

gegeben, wobei die Drehmatrix

$$R_{\phi}^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4. NOETHER THEOREM

gegeben ist. Die entsprechende erhaltene Größe ist

$$I = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i}} d_{\phi} h_{\phi,i}(\mathbf{q}) \Big|_{\phi=0} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i}} d_{\phi} R_{\phi}^{(3)ij} \Big|_{\phi=0} q_{j} = \sum_{i,j=1}^{2} p_{i} \epsilon^{ij} q_{j} = l_{3},$$

also die 3-Komponente des Drehimpulses. Rotationsinvarianz impliziert Drehimpulserhaltung.

Aufgabe: Generalisieren Sie das Argument auf ein *N*-Teilchensystem in Abwesenheit externer Kräfte: Finden Sie die explizite Form der Drehmatrizen $R^{(k)}$, k = 1, 2 für die 1 und 2 Achse und folgern Sie, daß aus der Invarianz unter Drehungen um alle drei Achsen $\mathbf{q}_i \to R_{\phi}^{(k)} \mathbf{q}_i$ die vektorielle Erhaltung des Drehimpulses $d_t \mathbf{L} = 0$ folgt.

In Abschnitt 1.4.1 hatten wir gesehen, daß man rotationsinvariante Probleme am zweckmäßigsten in Polarkoordinaten angeht. Die Koordinateninvarianz der Lagrange Mechanik beinhaltet, daß wir die Konsequenzen der Rotationsinvarianz ohne jeden Aufwand auch in Polarkoordinaten $\mathbf{q} = (r, \theta, \phi)$ formulieren können. In Polarkoordinaten wird eine Drehung um die 3-Achse durch die Abbildung

$$h_{\kappa}(\mathbf{q}) = (r, \theta, \phi + \kappa)$$

beschrieben (vgl. Fig. 1.5). Die Lagrangefunktion eines rotationsinvarianten (und konservativen) Systems hat die Form

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - U(r).$$

Aufgabe: Beweisen Sie diese Identität. Verwenden Sie dazu die zwischen kartesischen und

Polarkoordinaten vermittelnden Identitäten

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \phi \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \phi \\ x_3 &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

bilden Sie $\dot{\mathbf{r}} = d_t \sum x_i \mathbf{e}_i$ und achten Sie auf sich aus $\cos^2 \kappa + \sin^2 \kappa = 1, \kappa = \phi, \theta$ ergebende Vereinfachungen.

Damit ergibt sich

$$I = m\sin^2\theta r^2\phi$$

als Erhaltungsgröße. Legen wir den Ursprung des Koordinatensystems so, daß die Äquatorialebene des Systems, $\theta = \pi/2$ mit der Bewegungsebene¹¹ übereinstimmt, so erhalten wir mit $I = mr^2 \dot{\phi}$ die bereits früher ermittelte Form des erhaltenen Drehimpulses zurück.

 $^{^{11}{\}rm Erinnern}$ Sie sich daran, daß sich die Bewegung für rotations
invariante Systeme in einer Ebene abspielt.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir, daß man auch die Erhaltung der Energie über das Noether Theorem, als eine Konsequenz der Invarianz unter Zeittranslationen nämlich, fassen kann. Die Beweisführung (vgl. z.B. [6]) erfordert jedoch etwas Aufwand weshalb wir sie hier nicht explizit durchführen wollen.

2.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Lagrange Formulierung der Mechanik eingeführt. Der zentrale Vorteil dieses Zugangs liegt darin, daß er eine vollständig flexible Koordinatenwahl gestattet. In Abschnitt 2.1 haben wir gesehen, wie sich hierdurch die Lösung der im Rahmen der Newton Mechanik nur schlecht zu behandelnden Probleme mit Zwangsbedingungen vereinfacht. In Abschnitt 2.2 wurde die Lagrange Formulierung als Ausdruck eines Variationsprinzips identifiziert. Über die Beziehung zu Variationsprinzipien ließen sich zwei wichtige Grundprinzipien der Mechanik, ihre Koordinateninvarianz und der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen auf natürliche Art erklären.

Im folgenden Kapitel werden wir eines der wichtigsten Anwendungsgebiete der Mechanik, die Beschreibung der Bewegung des sogenannten 'starren Körpers', im Rahmen der Lagrange Formulierung angehen. In diesem Kapitel werden die Vorteile einer problemangepassten Koordinatenwahl voll sichtbar werden.

Kapitel 3 Der Starre Körper

Die Beschreibung der Bewegung ausgedehnter Körper ist eines der Hauptanwendungsgebiete der Mechanik. In der Regel wird sich die Bewegung eines ausgedehnten Systems als eine komplizierte Superposition der Bewegung seines Schwerpunkts und der – ungleich komplizierteren – Bewegung seiner internen Freiheitsgrade darstellen. (Denken sie z.B. an einen mit Wasser gefüllten Luftballon, der durch die Luft geworfen wird.) Die Beschreibung der Dynamik der inneren Freiheitsgrade ausgedehnter Systeme ist Gegenstand der Kontinuumsmechanik, auf die wir an dieser Stelle nicht eingehen wollen.

Eine ungleich einfachere, aber im Hinblick auf Anwendungen immer noch sehr wichtige Situation stellt sich ein, wenn die inneren Freiheitsgrade des in Frage kommenden Körpers 'ausgefroren' sind. (Backstein, der durch die Luft geworfen wird.) Man bezeichnet solche Körper als 'starr'. Die Analyse der Dynamik starrer Körper ist Gegenstand dieses Kapitels.

3.1 Definition des Starren Körpers



Abbildung 3.1: Zur Definition des starren Körpers

Zunächst einmal müssen wir uns klarmachen, wie der Begriff des starren Körpers zu definieren und mit den Untersuchungen der vorangegangenen Kapitel in Verbindung zu bringen ist. Nehmen wir also an, wir hätten einen Körper vorgegeben. Eine Möglichkeit die Beschreibung des Körpers anzugehen wäre, ihn zunächst einmal zu diskretisieren (vgl. Fig. 3.1). Man könnte den Körper mit einem System von N Kuben (oder auch anders geformter Überdeckungsvolumina) vorgegebener Kantenlänge überdecken und würde jedem Kubus eine Lagekoordinate \mathbf{r}_i und diejenige Masse m_i zuordnen, die in seinem Überdeckungsgebiet enthalten ist. 'Starre' des Körpers bedeutet, daß sich die Abstände zwischen den Diskretisierungseinheiten im Laufe der Bewegung nicht ändern können. Wir drehen den Spieß nun um und verwenden diese Eigenschaft des approximativen Systems als Definition des starren Körpers.

Ein starrer Körper ist ein System von N Punktmassen mit Masse m_i und Lagekoordinate \mathbf{r}_i eingeschränkt durch das System holonomer Zwangsbedingungen

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \equiv r_{ij} = \text{const.}, \qquad i, j = 1, \dots N.$$
(3.1)

Die Qualität der approximativen Beschreibung des Körpers läßt sich durch Verfeinerung der Diskretisierung verbessern. Man könnte z.B. jedes Diskretisierungsvolumen seinerseits in eine gewisse Zahl von Untervolumina aufgliedern, diesen Prozess iterieren und damit zu einer immer besseren Approximation an die tatsächliche Form des Körpers gelangen. Im Limes $N \to \infty$ wird aus den Partialmassen m_i bei \mathbf{r}_i eine **Massendichte**,

$$(m_i, \mathbf{r}_i) \to \rho(\mathbf{r}) dV,$$

wobei dV ein infinitesimales Volumenelement und $\rho(\mathbf{r})dV$ die infinitesimale in ihm enthaltene Masse ist. Damit gelangen wir zu einer zweiten Möglichkeit, den Begriff des starren Körpers zu definieren.

Def.: Ein starrer Körper ist durch eine fest vorgegebene, kontinuierliche Massenverteilung $\rho(\mathbf{r})dV$ definiert, deren Gestalt sich nicht ändert.

Die etwas schwammige Formulierung 'Gestalt sich nicht ändert' ist durch den für das Kriterium (3.1) genommenen Grenzwert $N \to \infty$ definiert. Beachten Sie, daß die Definition des starren Körpers die in den vorangegangen Kapiteln diskutierten N-Teilchensysteme beinhaltet, sofern für diese daß die Einschränkung (3.1) vorausgesetzt ist.

Aufgabe: Wie sieht die einem N-Teilchen System entsprechende Massenverteilung $\rho(\mathbf{r})dV$ aus?

Der enge Bezug zwischen starren Körpern und *N*-Teilchen Systemen beinhaltet, daß sich eine Reihe von in Abschnitt 1.3.2 eingeführten Begriffen auf den Fall eines durch eine kontinuierliche Massenverteilung beschriebenen Körpers verallgemeinern. Die relevanten Definitionen sind in Tabelle 3.1 zusammengefaßt:

Aufgabe: Machen Sie sich im Rahmen des oben diskutierten Diskretisierungsschemas klar, wieso die Definitionen der dritten Spalte die natürliche Verallgemeinerung der der zweiten Spalte sind.

3.1. DEFINITION DES STARREN KÖRPERS

Größe	N-Teilchen System	Starrer Körper
Gesamtmasse	$M = \sum_{i} m_i$	$M = \int dV \rho(\mathbf{r})$
$\mathbf{Schwerpunkt}$	$\mathbf{R} = M^{-1} \sum_{i} m_i \mathbf{r}_i$	$\mathbf{R} = M^{-1} \int dV \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}$
Gesamtimpuls	$\mathbf{P} = d_t \sum_i m_i \mathbf{r}_i$	$\mathbf{P} = d_t \int dV \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}$

Tabelle 3.1: Masse, Schwerpunkt und Impuls des starren Körpers

Wir betrachten einen allgemeinen starren Körper im dreidimensionalen Ortsraum (vgl. Fig. 3.2). Zur Beschreibung der Dynamik des Körpers wird es zweckmäßig sein, zwei Koordinatensysteme K und K' zu verwenden. Beim System K handelt es sich um ein beliebiges raumfestes Inertialsystem. Das Koordinatensystem K' ist fest in den Körper hineingelegt. In der Regel wird man den Schwerpunkt **R** als Ursprungspunkt von K' festlegen. Die wichtigsten Eigenschaften und Vorteile der beiden Bezugssysteme lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- K: Das System K ist dasjenige, aus dem heraus wir die Bewegung des Körpers beobachten. In der Regel wird es sich dabei (näherungsweise) um ein Inertialsystem handeln, um ein System also, das frei von Scheinkräften ist \rightsquigarrow einfache Naturbeschreibung.
- K': Im System K' ist die charakterisierende Massenverteilung statisch; in diesem System ruht jeder Punkt des Körpers. Allerdings wird es sich bei K' im allgemeinen *nicht* um ein Inertialsystem handeln. Jede nichttriviale Bewegung des Körpers wird mit dem Auftreten von Scheinkräften verbunden sein. Die Charakterisierung dieser Kräfte ist eine der wesentlichen Aufgaben, die wir zu lösen haben.



Abbildung 3.2: Zur Beschreibung des starren Körpers mittels eines raumfesten (K) und eines körperfesten (K') Bezugssystems.

Anhand der Charakterisierung über zwei Bezugssysteme läßt sich die Zahl der Freiheitsgrade des starren Körpers ermitteln: Da das Bezugssystem K' fest in den Körper eingebaut ist, ist die Position des Körpers über die des Bezugssystems K' vollständig festgelegt. Zur Charakterisierung der Lage von K' wiederum sind sechs Parameter erforderlich: Drei Parameter geben die Position seines Ursprungs an, und drei weitere legen die Achsenrichtungen fest¹. Damit folgt:

Ein starrer Körper hat sechs Freiheitsgrade.

Die Analyse der Bewegung eines Körpers wird also im wesentlichen darauf hinauslaufen, die allgemeinst mögliche Relativbewegung zweier Bezugssysteme zu beschreiben. Damit ist ein Problem gestellt, dessen Anwendungsrelevanz über das Problem des starren Körpers hinausgeht. Zum Beispiel wird jedes in einem terrestrischen Labor durchgeführte astronomische Experiment aus einem Bezugssystem heraus geführt, das gegen den inertialen Hintergrund des Universums in komplizierter Weise bewegt ist. Ein gutes Verständnis der Relativbewegungen von Bezugsystemen und insbesondere der Scheinkräfte, die beim Übergang zwischen gegeneinander beschleunigten Systemen auftreten, ist daher in einer Vielzahl physikalischer Anwendungen von zentraler Bedeutung.

3.2 Bewegte Bezugssysteme

Ziel dieses Abschnitts ist die Beschreibung der relativen Bewegung zweier Bezugssysteme K und K' und der resultierenden Scheinkräfte. Der Abschnitt ist allgemein gehalten in dem Sinne, daß es sich um zwei beliebige Systeme handeln kann und kein spezieller Bezug zum Eigensystem eines starren Körpers vorausgesetzt ist. Für alles weitere wird es zweckmäßig sein, die von den Systemen aufgespannten Vektorräume als zwei voneinander getrennte Räume aufzufassen; als zwei Räume nämlich, die im Sinne der Diskussion von Seite 61 die Mannigfaltigkeit 'euklidischer Ortsraum $\mathbb{A}^{3'}$ aufspannen. (Die Darstellung dieses Abschnitts orientiert sich eng an Arnold [1].)

3.2.1 Koordinatentransformationen

Unser erstes Ziel wird es sein, den Bezug zwischen den Systemen K und K' quantitativ in Form von Transformationsformeln zu fassen. Wir beginnen mit einigen Definitionen:

Def.: Eine **Bewegung** von K' relativ zu K wird durch eine Familie von Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} D_t: K' & \to & K \\ \mathbf{q}' & \mapsto & \mathbf{q} \equiv D_t \mathbf{q}' \end{array}$$

beschrieben, die Metrik (und Orientierung) invariant lassen (vgl. Fig. 3.3.)

¹Bei festgehaltenem Ursprung kann jedes kartesische Koordinatensystem aus einem festgelegten Referenzsystem durch Anwendung einer Drehung erzeugt werden; Eine Drehung ist durch Angabe dreier Parameter bestimmt.



Abbildung 3.3: Zur mathematischen Definition der Relativbewegung zweier Koordinatensysteme: K': bewegtes System, K: raumfestes System, R_t : Rotation, C_t : Translation, D_t : Gesamtbewegung.

Def.: Eine Bewegung $D_t \equiv R_t$ heißt **Rotation**, wenn sie den Ursprung **0'** von K' auf den von K' abbildet (und damit jedes $R_t : K' \to K$ ein linearer Operator ist.)

Aufgabe: Zeigen Sie, daß eine Bewegung mit $D_t(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$ eine lineare Abbildung ist. Tip: Verwenden Sie, daß für eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_a\}, a = x, y, z$, von K die Vektoren $D_t(\mathbf{e}_a)$ eine Orthonormalbasis von K' darstellen.

Jede Bewegung D_t kann eindeutig als Produkt $D_t = C_t R_t$ einer Rotation R_t und einer anschließenden Translation

$$\begin{aligned} C_t : K &\to K \\ \mathbf{q} &\mapsto C_t \mathbf{q} \equiv \mathbf{q} + \mathbf{R}(t), \end{aligned}$$

mit $\mathbf{R}(t) \in K$ geschrieben werden. (Setze $\mathbf{R}(t) \equiv D_t \mathbf{0}'$ und $R_t = C_t^{-1} D_t$. Dann gilt $R_t \mathbf{0}' = \mathbf{0}$.)

Def.: Eine Bewegung heißt **translatorisch**, wenn $R_t \equiv R_0$ nicht von t abhängt. Wir betrachten nun einen bewegten² Vektor $\mathbf{q}'(t) \in K'$ und sein Abbild

$$\mathbf{q}(t) = D_t \mathbf{q}'(t) = R_t \mathbf{q}'(t) + \mathbf{R}(t),$$

in K. Ziel ist es, die Bewegung von $\mathbf{q}(t)$ (seine Geschwindigkeit, Beschleunigung usw.) über die von $\mathbf{q}'(t)$ auszudrücken. Differentiation der Transformationsgleichung führt auf

$$\dot{\mathbf{q}} = R\mathbf{q}' + R\dot{\mathbf{q}}' + \mathbf{R}. \tag{3.2}$$

Um die Bedeutung der drei Terme auf der rechten Seite zu verstehen, empfiehlt es sich, vor dem allgemeinst möglichen Fall zunächst einige Spezialfälle von Bewegungen zu betrachten.

²Vorsicht: Wenn wir hier von einem bewegten Vektor sprechen, haben wir eine Bewegung (später \rightarrow physikalische Bewegung eines Massenpunktes) *innerhalb* von K' im Sinn. Diese ist sorgfältig zu unterscheiden von dem eben eingeführten Begriff der (Relativ)bewegung der zwei Systeme K und K'. Entsprechend der zu Beginn des Kaptitels gewählten Konvention, wird K' später die Rolle des körperfesten, K die des raumfesten Systems übernehmen.

Translatorische Bewegung

Im Falle einer translatorischen Bewegung $(\dot{R}_t = 0)$ ist

$$\dot{\mathbf{q}} = R\dot{\mathbf{q}}' + \dot{\mathbf{R}}.\tag{3.3}$$

Die Bedeutung der einzelnen Terme ist

 $\dot{\mathbf{q}}$: Absolutgeschwindigkeit (der physikalischen Bewegung) in K.

 $R\dot{\mathbf{q}}'$: Relativgeschwindigkeit bezogen auf den Punkt **R**.

- **R**: Geschwindigkeit des bewegten Systems K'.
- \mathbf{q}' : Geschwindigkeit in K'.

Rotation

Etwas interessanter gestaltet sich die Situation im Falle einer reinen Rotation, $\mathbf{R}(t) = 0$. Wir betrachten zunächst den Fall eines in K' ruhenden Punktes, $\dot{\mathbf{q}}' = 0$. Es gilt folgender Sachverhalt:

Für $\mathbf{R}(t) = 0$ und $\dot{\mathbf{q}}' = 0$ gibt es einen (im allgemeinen zeitabhängigen) Vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$, so daß

$$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}. \tag{3.4}$$

Bevor wir diesen Sachverhalt deuten, beweisen wir ihn. (i) Mit $\dot{\mathbf{q}} = R\mathbf{q}'$ und $\mathbf{q}' = R^{-1}\mathbf{q}$ gilt:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{R}R^{-1}\mathbf{q}.$$

(ii) die lineare Abbildung $A \equiv \dot{R}R^{-1} : K \to K$ ist antisymmetrisch, $A^T = -A$. Beweis: R ist eine Rotationsmatrix $\rightsquigarrow R^T = R^{-1}$. Weiter gilt für beliebige Matrizen $\dot{C}^{-1} = -C^{-1}\dot{C}C^{-1}$ (folgt aus $d_t(CC^{-1}) = 0$ und der Produktregel). Damit ist

$$A^{T} = [\dot{R}R^{-1}]^{T} = R\dot{R}^{-1} = -\dot{R}R^{-1} = -A.$$

(iii) Die allgemeinst mögliche Form einer dreidimensionalen antisymmetrischen Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$
 (3.5)

wobei $\omega_{1,2,3}$ reelle Parameter sind. (iv) Mit

$$oldsymbol{\omega} = egin{pmatrix} \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \end{pmatrix}$$

rechnet man direkt nach, daß

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{q} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}.$$



Abbildung 3.4: Rotation um einen Vektor $\boldsymbol{\omega}$.

Anschaulich bedeutet (3.4), daß der Vektor **q** mit einer Winkelgeschwindigkeit $|\boldsymbol{\omega}|$ um den Einheitsvektor $\boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$ rotiert (vgl. Fig. 3.4). Man sieht dies, indem man für infinitesimales δt approximiert,

$$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \Rightarrow \delta \mathbf{q} \equiv \mathbf{q}(t + \delta t) - \mathbf{q}(t) \approx \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \delta t.$$

Der Vektor $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{q} , hat schon einmal die einer Rotation entsprechende Richtung. Die Normierung folgt aus der Forderung daß für Winkelgeschwindigkeit $|\boldsymbol{\omega}|$, nach einer Zeit $t = 2\pi/|\boldsymbol{\omega}|$ eine vollständige Rotation erfolgt sein muß (bitte überlegen).

Vorsicht: Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ ist kein 'normaler' Vektor. Es ist

$$[\boldsymbol{\omega}] = T^{-1},$$

d.h. es macht keinen Sinn, die 'Länge' von $\boldsymbol{\omega}$ mit der gewöhnlicher Vektoren mit $[\mathbf{v}] = L$ zu vergleichen.

Wir geben nun die Forderung $\dot{\mathbf{q}}' = 0$ auf und lassen zu, daß sich der Punkt \mathbf{q}' in K' bewegt. Gleichung (3.2) nimmt damit die Form an

$$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}',\tag{3.6}$$

wobei die Bedeutung der einzelnen Größen wie folgt ist:

 $\dot{\mathbf{q}}$: Geschwindigkeit in K,

 $R\dot{\mathbf{q}}'$: Relativgeschwindigkeit bezogen auf K'. (Es ist aber $R\dot{\mathbf{q}}' \in K!$)

 $\boldsymbol{\omega}\times \mathbf{q}:$ Aus Rotation rührende Geschwindigkeitskomponente.

Allgemeiner Fall

Die Transformationsformel für eine allgemeine Bewegung D = CR läßt sich am ökonomischsten erhalten, indem man sie gemäß

$$K' \stackrel{CR}{\longrightarrow} K = K' \stackrel{R}{\longrightarrow} K'' \stackrel{C}{\longrightarrow} K$$

in zwei Schritten ausführt. Mit (3.3) und (3.6) ergibt sich

$$\mathbf{q}'' = R\mathbf{q}, \qquad \mathbf{q} = \mathbf{q}'' + \mathbf{R},$$
$$\dot{\mathbf{q}}'' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}'' + R\dot{\mathbf{q}}', \qquad \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}'' + \dot{\mathbf{R}},$$

und durch Kombination

$$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{R}) + R\dot{\mathbf{q}}' + \dot{\mathbf{R}}.$$
(3.7)

Dies ist die allgemeine Transformationsformel für bewegte Systeme. Oft ist es nützlich, das auf der rechten Seite auftretende Kreuzprodukt $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{R})$ durch Größen aus dem System K' auszudrücken. Wir verwenden dazu die für beliebige Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ und orthogonale Abbildungen R gültige Hilfsformel

$$R\mathbf{v} \times R\mathbf{w} = R(\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

In Worten: Eine Rotationsmatrix ist mit dem Kreuzprodukt verträglich.³ Damit läßt sich (3.7) zu

$$\dot{\mathbf{q}} = R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{q}' + \dot{\mathbf{q}}') + \dot{\mathbf{R}}$$
(3.8)

umschreiben, wobei mit $\omega' \equiv R^{-1}\omega$ die Komponenten des Drehvektors ω bezüglich der Basisvektoren von K' bezeichnet werden.

Im folgenden diskutieren wir, wie sich aus den Transformationsformeln (3.7) und (3.8) die schon in Kapitel 1 andiskutierten durch Übergang zwischen beschleunigten Systemen induzierten Scheinkräfte berechnen lassen.

3.2.2 Beschleunigungs-, Zentrifugal- und Corioliskräfte

Wie lassen sich aus den Tranformationsformeln (3.3) und (3.6) die beim Übergang zwischen Systemen induzierten Scheinkräfte berechnen? Ähnlich wie im vorangegangenen Abschnitt betrachten wir den Fall translatorisch bewegter und rotierender Bezugssysteme getrennt.

Translatorische Bewegung

Für $\dot{R} = 0$ hat (3.3) Gültigkeit. Differentiation nach der Zeit ergibt

$$\ddot{\mathbf{q}} = R\ddot{\mathbf{q}}' + \ddot{\mathbf{R}} \Rightarrow m\ddot{\mathbf{q}}' = R^{-1}\mathbf{F} - mR^{-1}\ddot{\mathbf{R}},$$

 $^{^{3}}$ Dies folgt (i) aus der Tatsache, daß orthogonale Abbildungen die Metrik von Vektorräumen invariant lassen oder (ii) durch direktes Nachrechnen.

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, daß im Intertialsystem K das Newtonsche Gesetz $m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}$ Gültigkeit hat. In Worten:

In einem System K', daß translatorisch gegen ein Inertialsystem bewegt ist, gelten Bewegungsgleichungen wie in einem Inertialsystem. Allerdings tritt zusätzlich zur eingeprägten Kraft eine Scheinkraft \mathbf{F}_{s} der Stärke $|\mathbf{F}_{s}| = -m|\ddot{\mathbf{R}}|$ auf.

Ein Beispiel eines solchen Übergangs hatten wir bereits in Abschnitt (1.3.1) diskutiert.

Rotation

Wir gehen von (3.8) mit $\mathbf{R} = 0$ aus und differenzieren nochmals nach der Zeit. Es ergibt sich

$$\ddot{\mathbf{q}} = d_t [R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{q}' + \dot{\mathbf{q}}')] = \dot{R}(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{q}' + \dot{\mathbf{q}}') + R(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{q}' + \boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{q}}' + \ddot{\mathbf{q}}') = R(\ddot{\mathbf{q}}' + 2\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{q}}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{q}') + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{q}'),$$

wobei wir in der letzten Zeile die Identität

$$\dot{R}\mathbf{v}' = \dot{R}R^{-1}R\mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{v}' = R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}')$$

verwendet haben. Durchmultiplikation mit R^{-1} führt auf die gesuchte Umrechnungsformel

 $\ddot{\mathbf{q}}' = R^{-1}\ddot{\mathbf{q}} - 2\boldsymbol{\omega}'\times\dot{\mathbf{q}}' - \boldsymbol{\omega}'\times(\boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{q}') - \dot{\boldsymbol{\omega}}'\times\mathbf{q}'$

zwischen den Beschleunigungsvektoren der Systeme:

In einem System K', das bezüglich eines Inertialsystems rotiert, treten drei Typen von Scheinkräften auf:

- ▷ die durch (Winkel)geschwindigkeitsänderung induzierte Beschleunigungskraft $-m\dot{\omega}' \times \mathbf{q}',$
- \triangleright die sogenannte **Corioliskraft** $-2m\omega' \times \dot{\mathbf{q}}'$ sowie
- $\triangleright \text{ die } \mathbf{Zentrifugalkraft} m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{q}').$

Die Richtungsabhängigkeit der drei Krafttypen ist in Figur 3.5 angedeutet. Zur Zentrifugalkraft ist nicht viel zu sagen. Sie beschreibt den aus dem täglichen Leben gut bekannten Effekt, daß Rotationsbewegungen von einer nach 'außen' wirkenden Kraft, der Zentrifugalkraft eben, begleitet sind.

Die Wirkung der Corioliskraft macht sich subtiler bemerkbar. In vielen Lehrbüchern (siehe z.B. Goldstein ?? für eine interessante Diskussion) wird diese Kraft in Zusammenhang mit der Erdbewegung diskutiert. Ohne in irgendeiner Weise ins Detail zu gehen bemerken wir nur, daß die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation



Abbildung 3.5: Richtungsabhängigkeit der in einem rotierenden Bezugssystem wirkenden Corioliskraft ($F_{cor.}$) und der Zentrifugalkraft ($F_{zentr.}$).

 $|\omega'| = 2\pi/(24 \cdot 3600s) \approx 7 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ ist.⁴ Daraus ergeben sich (im Vergleich zur Gravitationskraft) kleine, aber für präzise durchgeführte Experimente allemal relevante Kraftkorrekturen. Für die Erde läuft die Rotationsachse ω' durch Nordund Südpol. An jedem Erdpunkt kann der Vektor ω' in eine Tangential- und in eine Normalkomponente zerlegt werden. Das Kreuzprodukt der Normalkomponente mit dem Geschwindigkeitsvektor einer *tangentialen* (erdgebundenen) Bewegung führt auf der nördlichen (südlichen) Hemisphäre zum Erscheinen einer Kraft, die b ezüglich der Bewegungsrichtung stets nach rechts (links) gerichtet ist (vgl. Fig.3.6.) Sie ist z.B. dafür verantwortlich, daß die Ufer von Flüssen der Nordhemisphäre dazu tendieren, rechts stärker ausgewaschen zu sein.



Abbildung 3.6: Zur Beeinflussung irdischer Bewegungen durch die Corioliskraft.

Aufgabe: Wie beeinflußt die Corioliskraft Bewegungen, die sich normal zur Erdoberfläche abspielen?

⁴Die Drehung des erdfesten Bezugssystems gegen ein vorgegebenes äußeres Inertialsystem ist parallel zu ω , womit $\omega = \omega'$ ist.

Aufgabe: Stellen sie sich vor, ein Geschoß werde am Nordpol in horinzontaler Richtung abgeschossen. Wie wirkt die Corioliskraft? Interpretieren Sie die Kraft anschaulich. (Denken Sie daran, daß sich die Erde 'unter der Geschoßbahn wegdreht'.

3.3 Lagrangefunktion des Starren Körpers

Wir kehren zurück zum Hauptanliegen dieses Kapitels, der Untersuchung der Bewegung des starren Körpers. Wir beginnen mit der Untersuchung des komplizierteren Beitrags zur Lagrangefunktion, der kinetischen Energie. In einem raumfesten System K ist die kinetische Energie eines durch ein starres System von N Massenpunkten m_i bei Koordinaten $\mathbf{q}_{o,i}$ implementierten Körpers⁵ durch

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i} m_i \dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{o},i} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{o},i}$$

gegeben⁶. Unter Verwendung von (3.7) ergibt sich

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q}_{\mathrm{o},i} - \mathbf{R}) + \mathbf{V}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q}_{\mathrm{o},i} - \mathbf{R}) + \mathbf{V}),$$

wobei $\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}}$ und die entscheidend wichtige Tatsache $\dot{\mathbf{q}}'_i = 0$ verwendet wurde: Die Elemente des Körpers bewegen sich im körperfesten System nicht, sonst wäre er ja nicht starr. Die Definition der (allesamt im raumfesten System ausgedrückten Vektoren) ist noch einmal in Fig. 3.7) angedeutet.

Wir legen nun fest, daß, sofern nicht explizit anders vereinbart, der Translationsvektor \mathbf{R} in den Schwerpunkt des Körpers gelegt sei. Mit dieser Wahl und der Definition $\mathbf{q}_i \equiv \mathbf{q}_{\mathrm{o},i} - \mathbf{R}$ ergeben sich erhebliche Vereinfachungen in der Formel für T:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_{i} + \mathbf{V}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_{i} + \mathbf{V}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_{i}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_{i}) + 2\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_{i}) + \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) =$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I \boldsymbol{\omega} + \frac{M}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}, \qquad (3.9)$$

wobei die als **Trägheitstensor** bezeichnete 3×3 Matrix $I = \{I_{ab}\}$ durch

$$I_{ab} \equiv \sum_{i} m_i (q_{i,c} q_{i,c} \delta_{ab} - q_{i,a} q_{i,b})$$
(3.10)

$$\sum_{i} m_{i} F(\mathbf{q}_{\mathrm{o},i}, \dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{o},i}, \ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{o},i}) \to \int dV \rho(\mathbf{q}) F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$$

auf den Fall eines durch eine kontinuierliche Verteilung definierten Körpers verallgemeinern.

⁵Wir bezeichnen die bezüglich des Ursprungs des raumfesten Systems ausgedrückten Koordinaten mit $\mathbf{q}_{o,i}$, da die einfachere Bezeichnung \mathbf{q}_i für die bezüglich des Ursprungs \mathbf{R} des körperfesten Systems K' gemessenen Koordinaten $\mathbf{q}_i \equiv \mathbf{q}_{o,i} - \mathbf{R}$ reserviert bleiben soll.

⁶Alle Formeln dieses Abschnitts lassen sich durch



Abbildung 3.7: Zur bei der Formulierung der in raumfesten Koordinaten formulierten Theorie verwendeten Konventionen.

definiert ist, $q_{i,a}$, a = x, y, z die Raumkomponenten des Vektors \mathbf{q}_i bezeichnet und die sogenannte Einsteinsche Summenkonvention $v_a w_a \equiv \sum_a v_a w_a$ verwendet wurde: Sofern nichts anderes gesagt, wird über paarweise auftauchende Indizes summiert. Dem Übergang von der zweiten zur dritten Zeile in (3.9) liegt (i) die für allgemeine Vektoren \mathbf{v}, \mathbf{w} gültige Identität

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = v_a v_a w_b w_b - (v_a w_a)^2$$

sowie (ii) die Beobachtung zugrunde, daß wegen $\sum_i m_i \mathbf{q}_i = 0$ der mittlere Term der zweiten Zeile verschwindet. Die explizite Form des Trägheitstensors ist durch

$$I = \sum m \begin{pmatrix} q_2^2 + q_3^2 & -q_1q_2 & -q_1q_3 \\ -q_1q_2 & q_1^2 + q_3^2 & -q_1q_3 \\ -q_1q_3 & -q_2q_3 & q_1^2 + q_2^2 \end{pmatrix},$$
(3.11)

wobei wir zur weiteren Vereinfachung der Notation den Teilchenindex i = 1, ..., N zeitweise unterdrückt haben:

$$\sum_{i} m_{i} F(\mathbf{r}_{i}, \ldots) \to \sum m F(\mathbf{r}, \ldots)$$

Die Anwesenheit des Symbols $\sum m$ sorgt dafür, daß hieraus keine Zweideutigkeiten entstehen können.

Info: Behalten Sie im Auge, daß die einfache Darstellung (3.9) nur Gültigkeit hat, sofern der Schwerpunkt des körperfesten System im Körperschwerpunkt liegt!

Worin liegt die Bedeutung von (3.9)? Zunächst einmal macht diese Formel die oben bereits getroffene Aussage, daß der starre Körper sechs Freiheitsgrade habe, explizit. Drei Freiheitsgrade stecken in der Definition des Vektors $\boldsymbol{\omega}$, drei in der durch \mathbf{V} beschriebenen Schwerpunktsbewegung. Zweitens sind in (3.9) der Rotations- und Translationsanteil der Bewegung klar getrennt. Der Term $\frac{1}{2}M\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}$ beschreibt die bereits in Abschnitt (1.3.2) diskutierte Schwerpunktsbewegung. Für einen kräftefreien Körper ist diese Komponente der Bewegung weitgehend trivial. Der Rotationsanteil
der Bewegung wird durch den Term $\omega_a I_{ab}\omega_b$ beschrieben. Wie wir weiter unten sehen werden, ist die durch diese Bilinearform beschriebene Physik selbst bei Abwesenheit externer Kräfte sehr reichhaltig.

Die Anwesenheit einer externen konservativen Kraft läßt sich durch eine Potentialfunktion $U(\mathbf{R}, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ beschreiben, wobei die Notation andeutet, daß das Potential sowohl von der Lage des Schwerpunkts als auch von der Orientierung des Körpers (letztere zu beschreiben durch Angabe dreier winkelartiger Variable (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3)) abhängen wird. In Kombination mit der kinetischen Energie erhalten wir

$$L = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I\boldsymbol{\omega} + \frac{M}{2}\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} - U$$
(3.12)

als die allgemeine Lagrangefunktion des starren Körpers.

3.4 Trägheitstensor und Eulergleichungen

Anstatt die Untersuchung der Lagrangefunktion sofort in Gänze anzugehen – in der Regel der Fälle ohnehin ein unlösbar schwieriges Problem – betrachten wir zunächst den Rotationsanteil der Bewegung. Später werden wir den translatorischen Anteil, also die Dynamik des Schwerpunkts \mathbf{R} , mit hinzunehmen. Die Struktur der Lagrangefunktion (3.12) beinhaltet, daß beide Anteile weitgehend getrennt voneinander analysiert werden können.

Zur Diskussion der Rotationsbewegung begeben wir uns in ein System K, dessen Ursprung zu jeder Zeit mit dem Schwerpunkt des Körpers zusammenfällt. In K ist (i) ein Punkt des Körpers, sein Schwerpunkt nämlich, fix und (ii) die Bewegung ist reine Rotation. Ganz allgemein bezeichnet man einen Körper, für den ein Punkt fixiert ist, als einen **Kreisel**.

Im System K ist die Bewegung des Körpers durch Angabe des die Rotation charakterisierenden Vektors $\boldsymbol{\omega}$ vollständig spezifiziert. Man könnte nun versuchen, die Bewegung von $\boldsymbol{\omega}$ direkt zu betrachten. Besser ist es jedoch, zunächst eine Beziehung zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und einer der erhaltenen Größen des Problems – dem Drehimpuls L nämlich (vgl. Abschnitt 1.3.2) – herzustellen.

Unter Verwendung von (3.6) ergibt sich:

$$\mathbf{L} = \sum m\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} = \sum m\mathbf{q} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) =$$
$$= \sum m(\boldsymbol{\omega}\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q}),$$

wobei wir die allgemein gültige Formel

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

verwendet haben. Komponentenweiser Vergleich mit (3.10) ergibt $L_a = I_{ab}\omega_b$. In Matrixschreibweise:

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}.$$
 (3.13)

Der Drehimpuls des starren Körpers ist durch Matrixmultiplikation des Trägheitstensors mit dem Vektor der Winkelrotation gegeben. Gleichung (3.13) ist im raumfesten System K formuliert.

Transformation nach K' führt auf $R^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{L}' = R^{-1}IRR^{-1}\boldsymbol{\omega}$, d.h.

$$\mathbf{L}' = I'\boldsymbol{\omega}',\tag{3.14}$$

wobei $I' = R^{-1}IR$ der Trägheitstensor in K' ist. Man rechnet leicht nach, daß seine explizite Form durch (3.11) gegeben ist, wobei die Koordinaten $q_a \rightarrow q'_a$ durch ihre Darstellung in K' zu ersetzen sind. Beachten Sie, daß aus (3.13) und (3.14)

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{L}'$$

als Darstellung der kinetischen Energie folgt.

Beide Darstellungen des Drehimpulses (3.13) und (3.14) haben ihre Vorteile: In K genügt der Drehimpuls **L** der vergleichsweise einfachen Bewegungsgleichung $d_t \mathbf{L} = \mathbf{N}$ (vgl. Gl. (1.5)). Das bedeutet im allgemeinen aber nicht, daß auch der uns interessierende Drehvektor $\boldsymbol{\omega}$ eine einfache Form annimmt; der **L** und $\boldsymbol{\omega}$ verknüpfende Trägheitstensor kann ja zeitlich variieren. Dagegen ist in K' der Trägheitstensor konstant. Allerdings werden im allgemeinen **L** und $\boldsymbol{\omega}$ zeitlich variieren. Unsere Strategie zur Formulierung der Bewegungsgleichungen wird daher die folgende sein: Zunächst werden wir in K' den konstanten Trägheitstensor auf eine möglichst einfache Form bringen. Im Anschluß daran werden wir uns die Eigenschaften von (3.13) und (3.14) zunutze machen und einen Satz von Bewegungsgleichungen für $\boldsymbol{\omega}'$ aufstellen.

3.4.1 Analyse des Trägheitstensors

Beim Trägheitstensor I' handelt es sich um eine symmetrische 3×3 Matrix. Wie bei jeder symmetrischen Matrix existiert eine orthonormale Basis $\mathbf{e}'_a, a = 1, 2, 3$ von Eigenvektoren, die I diagonalisiert. Die zugeordneten Eigenwerte seien mit I_i bezeichnet. Man bezeichnet die durch die Vektoren \mathbf{e}'_a definierten Achsen als die **Hauptträgheitsachsen** des Körpers und die Eigenwerte I_a als seine **Hauptträgheitsmomente**. In der Hauptachsendarstellung nimmt I' die einfache Form

$$I' = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$$

an, wobe
i $I_1 = \sum m(q_2'^2 + q_3'^2)$, u.s.w. und mit q_a' die Koordinaten bezüglich der Hauptachsenbasis bezeichnet seien.

Wie hat man sich die Hauptachsen anschaulich vorzustellen und was sind die Vorteile der Hauptachsendarstellung? Im allgemeinen kann man über das Hauptachsensystem nicht viel mehr sagen, als daß es sich um ein orthonormales System handelt, dessen Lage durch die Form des Körpers bestimmende Geometrie der Massenverteilung bestimmt ist. Einfacher gestaltet sich die Lage im Falle von Körpern, deren Geometrie Symmetrien aufweist. Für einen Körper mit Spiegelsymmetrie bezüglich einer Ebene (vgl. Fig.3.8, rechts) etwa müssen zwei der Hauptachsen in dieser Ebene liegen, die dritte steht senkrecht darauf. Für einen Körper mit Rotationssymmetrie



Abbildung 3.8: Zur Lage der Hauptachsen von Körpern mit Symmetrien.

(vgl. Fig.3.8, links) fällt eine der Hauptachsen mit der Rotationsachse zusammen. Das System der beiden anderen Achsen ist entartet, in dem Sinne, daß seine Ausrichtung in der senkrecht zur Rotationsachse liegenden Ebene frei gewählt werden kann.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussagen. Hinweis: Gehen Sie von einem symmetrieangepaßten Ansatz für das Hauptachsensystem aus und überlegen Sie sich, wie sich die oben formulierten Symmetrieeigenschaften in Eigenschaften der Massenverteilung des Körpers übersetzen.

Durch Angabe der Hauptachsen und der Hauptträgheitsmomente sind die für die Bewegung eines Körpers relevanten Aspekte seiner Geometrie vollständig bestimmt: Zwei Körper noch so exotischer Geometrie werden sich in äquivalenter Weise durch den Raum bewegen, sofern ihre Hauptachsensysteme und -trägheitsmomente übereinstimmen. Damit ist die Beschreibung der für die Mechanik relevanten Eigenschaften eines starren Körpers von der Angabe einer u.U. hochkomplizierten Massenverteilung auf drei Winkel (Orientierung des Hauptachsensystems) und drei Zahlen (Trägheitsmomente) reduziert. In dieser Informationsreduktion liegt der große Vorteil des Konzepts des Hauptachsensystems.

Die Untersuchung der Geometrie des Hauptachsensystems läßt sich sehr weit entwickeln und bis hin zu einer Theorie der 'qualitativen Beschreibung von Kreiselbewegungen' ausbauen. Ohne in irgendeiner Weise ins Detail zu gehen (Sommerfeld), wollen wir hier nur einige Grundideen dieser Theorie skizzieren.

Im Hauptachsensystem nehmen die kinetische Energie (3.9) und die Darstellung des Drehimpulses (3.14) des Kreisels die einfache Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{3} I_a \omega_a^2$$

$$L_a = I_a \omega_a \qquad (3.15)$$

an. (Beachten Sie, daß wir die kinetische Energie vermöge

$$\boldsymbol{\omega}^T I \boldsymbol{\omega} = (R^{-1} \boldsymbol{\omega})^T R^{-1} I R(R^{-1} \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}'^T I' \boldsymbol{\omega}'$$

im körperfesten System ausgedrückt haben.) Diese Darstellung bildet eine geeignete Ausgangsbasis zur Formulierung der Bewegungsgleichungen des Kreisels. Info: Der Ausdruck für T erinnnert an die Standarddarstellung eines Ellipsoids. Tatsächlich ist es praktisch, über die Forderung

$$1 \stackrel{!}{=} \sum_{a=1}^{3} \omega_a^2 I_a$$

ein mit dem Körper fest verbundenes Ellipsoid, das sogenannte **Trägheitsellipsoid** einzuführen. Eine Vorstellung von der Lage dieses Ellipsoids bekommt man, indem man sich klarmacht, daß seine Koordinaten ω_a in denjenigen Richtungen große Werte annehmen, für die I_a klein ist. Inspektion der Form der Hauptträgheitsmomente zeigt, daß es sich dabei um Achsen handelt, bezüglich derer der Körper 'langgestreckt' ist (vgl. Fig. 3.9): Grob gesprochen passt sich das Trägheitsellipsoid der Form des Körpers an. Aufbauend auf dem Konzept des Trägheitsellipsoids ist es gelungen, sehr weitreichende Methoden zur *qualitativen* Beschreibung von Kreiselbewegungen zu entwickeln. Eine Grundidee ist z.B., daß die Bewegung im kräftefreien Fall zwei Erhaltungsgrößen hat: Die kinetische Energie T und den Betrag des Drehimpulses $|\mathbf{L}| = |\mathbf{L}'|$:

$$|\mathbf{L}| = \sum_{a} L_{a}^{2} = \text{const.}$$
$$T = \sum_{a} \frac{L_{a}^{2}}{I_{a}} = \text{const.}$$

Im Raum der Drehimpulse definiert |L| = const. eine Sphäre und T = const. ein Ellipsoid (das sich bis auf Umskalierung mit dem Trägheitsellipsoid identifizieren läßt.) Die Bewegung von **L** spielt sich dementsprechend auf den Schnittlinien eines Ellipsoids und einer Sphäre ab. Man kann diese Gedanken weiterentwickeln – das relevante Stichwort ist **Poinsotkonstruktion** – und zu einem qualitativen Bild der Bewegung des freien Kreisels ausbauen. Da der Schwerpunkt in diesem Kurs jedoch auf der konzeptionellen Entwicklung der Mechanik (und nicht so sehr auf deren Anwendung auf Einzelprobleme) liegt, wollen wir nicht weiter auf die qualitative Kreiseltheorie eingehen.



Abbildung 3.9: Zweidimensional-qualitative Darstellung des Trägheitsellipsoids.

3.4.2 Ableitung der Bewegungsgleichungen

Die Gleichungen (3.15) stellen eine geeignete Ausgangsbasis zur Ableitung der Bewegungsgleichungen des Kreisels dar. Zunächst gilt darstellungsunabhängig

$$\mathbf{N} = d_t \mathbf{L} \stackrel{(3.6)}{=} R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}' + d_t \mathbf{L}') \stackrel{(3.14)}{=} R(\boldsymbol{\omega}' \times I' \boldsymbol{\omega} + I' d_t \boldsymbol{\omega}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{N}' = \boldsymbol{\omega}' \times I' \boldsymbol{\omega}' + I' d_t \boldsymbol{\omega}.$$

Wir verwenden nun die Hauptachsendarstellung (3.15) und erhalten

$$I_{1}d_{t}\omega'_{1} = (I_{2} - I_{3})\omega'_{2}\omega'_{3} + N'_{1}$$

$$I_{2}d_{t}\omega'_{2} = (I_{3} - I_{1})\omega'_{3}\omega'_{1} + N'_{2}$$

$$I_{3}d_{t}\omega'_{3} = (I_{1} - I_{2})\omega'_{1}\omega'_{2} + N'_{3}.$$
(3.16)

Dies sind die sogenannten **Eulergleichungen** des starren Körpers. Es handelt sich um ein System dreier gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen, das im allgemeinen nicht gelöst werden kann.

Bsp.: Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Eine drastisch vereinfachte Situation mit immer noch wesentlicher Anwendungsrelevanz stellt sich ein, wenn zwei der Hauptträgheitsmomente gleich sind. Man bezeichnet einen solchen Körper als einen **symmetrischen**⁷ **Kreisel**. Für einen kräftefreien ($\mathbf{N} = 0$) symmetrischen Kreisel lassen sich die Euler Gleichungen geschlossen lösen und einige wichtige Bewegungstypen starrer Körper quantitativ analysieren.

Ohne Einschränkung setzen wir $I_1 = I_2$. Aus (3.16) folgt, daß ω'_3 zyklisch ist, $\omega'_3 \equiv \omega_{\parallel} = \text{const.}$ Wir definieren

$$\Omega \equiv \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_{\parallel}$$

und erhalten

$$d_t \omega_1' = +\Omega \omega_2' d_t \omega_2' = -\Omega \omega_1'.$$

Dieser Satz von Gleichungen ist denen des harmonischen Oszillators (1.12) äquivalent. Die allgemeine Lösung ist

$$\omega_1 = \omega_{\perp} \sin(\Omega t + \phi)$$
$$\omega_2 = \omega_{\perp} \cos(\Omega t + \phi)$$

Zusammenfassend finden wir, daß *im körperfesten System* die auf die **Figurenachse** \mathbf{e}_3 projizierte Komponente ω_{\parallel} des Rotationsvektors konstant ist, während die senkrecht auf der Figurenachse \mathbf{e}_3 stehende Komponente mit einer charakteristischen Frequenz Ω rotiert. Man bezeichnet die Rotation von $\boldsymbol{\omega}$ um die Figurenachse als

⁷Beachten Sie, daß ein symmetrischer Kreisel nicht symmetrisch aussehen muß: Für eine Massenverteilung inhomogener Massendichte können die Hauptträgheitsmomente auch bei assymmetrischer Form übereinstimmen.



Abbildung 3.10: Zur Dynamik des freien Kreisels

Präzession. Der durch $\boldsymbol{\omega}$ ausgefräste Kegel heißt **Polkegel** (vgl. Fig. 3.10). Wir bemerken noch, daß der Drehimpuls **L**' mit der Achse \mathbf{e}'_3 und $\boldsymbol{\omega}'$ in einer Ebene liegt, eine Tatsache, die man unter Verwendung von $\mathbf{L}' = I'\boldsymbol{\omega}'$ und $I_1 = I_2$ elementargeometrisch nachprüft.

Um eine Vorstellung von der 'von außen betrachteten' Bewegung zu bekommen, muß der Vektor $\boldsymbol{\omega}'$ ins raumfeste System zurücktransformiert werden. Diese Aufgabe erledigt sich am elegantesten unter Verwendung von Erhaltungssätzen. Da (i) das Tripel von Koordinatentupeln ($\mathbf{e}'_3, \mathbf{L}', \boldsymbol{\omega}'$) in einer Ebene liegt, muß dies auch für das ins raumfeste System zurückrotierte Tripel ($\mathbf{e}_3, \mathbf{L}, \boldsymbol{\omega}$) gelten (bitte gut überlegen). (ii) ist im raumfesten System $\mathbf{L} = \text{const.}$ (Kräftefreiheit!). (iii) ist wegen $|\boldsymbol{\omega}| =$ $|\boldsymbol{\omega}'| = \text{const.}, |\mathbf{L}| = \text{const.}$ und

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2}|\mathbf{L}||\boldsymbol{\omega}'|\cos\theta = \text{const.}$$

der von **L** und $\boldsymbol{\omega}$ eingeschlossene Winkel $\boldsymbol{\theta}$ konstant. Gleiches gilt (iv) für den zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{e}_3 eingeschlossen Winkel $\boldsymbol{\phi}$: Es ist const. = $\boldsymbol{\omega}'_3 = \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{e}'_3 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3 = |\boldsymbol{\omega}| \cos \boldsymbol{\phi}$.

Damit ergibt sich, daß im raumfesten System die Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{e}_3 synchron um den konstanten Drehimpuls rotieren. In der Kreiseltheorie werden die durch $\boldsymbol{\omega}$ und die Figurenachse definierten Kegel als **Spurkegel** bzw. **Nutationskegel** bezeichnet.

Die Eulergleichungen beschreiben die Rotationskomponte der Bewegung des starren Körpers. Um zu einer vollständigen Beschreibung der Bewegung zu gelangen, müssen sie durch einen Satz von Gleichungen ergänzt werden, die die Translationskomponente beschreiben. Alle dazu nötige Arbeit ist bereits in den vorangegangenen Abschnitten geleistet worden: Bei Anwesenheit einer externen Kraft $F_{\rm e}$ gilt für die Schwerpunktskoordinate

$$M\mathbf{R} = \mathbf{F}_{e}$$

In Kombination mit den Eulergleichungen (\leftrightarrow drei Gleichungen für die Orientierungsfreiheitsgrade) stellen diese Gleichungen (\leftrightarrow drei Gleichungen für die Translationsfreiheitsgrade) eine vollständige Beschreibung der Dynamik der sechs Freiheitsgrade des starren Körpers dar.

3.5 Schwerer Kreisel

Wir illustrieren die Analyse der Bewegungsgleichungen an einem zweiten, bereits recht fortgeschrittenen Beispiel. Gegeben sei ein **schwerer symmetrischer Kreisel**, d.h. ein Körper, der (i) rotationssymmetrisch bezüglich der Figurenachse sei $(I_1 = I_2)$, (ii) an einem auf der Symmetrieachse liegenden Punkt (nicht notwendigerweise der Schwerpunkt) fixiert sei und (iii) der Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_3$ ausgesetzt sei.



Abbildung 3.11: Zur Darstellung des schweren Kreisels über Eulerwinkel. Zur Vereinfachung der Notation sind die ins raumfeste System transformierten Vektoren Re'_i des körperfesten Systems gleichfalls mit e'_i bezeichnet.

Das Studium dieses Systems ist in zweierlei Hinsicht instruktiv: Erstens zeigt es, wie bereits vergleichsweise einfache Bewegungsgleichungen auf komplexe Bewegungsformen führen und zweitens – für uns noch wichtiger – illustriert es nochmals die Flexibilität des Lagrangeformalismus bei der Lösung mechanischer Probleme. Wie üblich empfiehlt es sich, sich vor Beginn der quantitativen Analyse des Problems einen Überblick über seine Freiheitsgrade und vor allem über die Anwesenheit eventuell erhaltener Größen zu verschaffen. Wir betrachten dazu zunächst die auf den Körper wirkende Gewichtskraft. In der Terminologie des starren Körpers spielt die Gewichtskraft die Rolle einer externen Kraft \mathbf{F}_{e} . Ihre explizite Form ist durch

$$\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = -\sum mg\mathbf{e}_3 = -Mg\mathbf{e}_3$$

gegeben. Das durch diese Kraft verursachte Drehmoment ist

$$\mathbf{N} = -\sum \mathbf{r} \times mg \mathbf{e}_3.$$

Offensichtlich ist $N_3 = 0$ und damit $d_t L_3 = 0$: Im raumfesten System ist die 3-Komponente des Drehimpulses erhalten. Außerdem ist, wie bei jedem konservativen mechanischen System, die Gesamtenergie erhalten. Damit haben wir zwei Erhaltungsgrößen ausgemacht. Dem sind die drei Freiheitsgrade eines an einem Raumpunkt fixierten Körpers gegenüberzustellen. Insgesamt steht zu erwarten, daß sich das Problem bei geschickter Koordinatenwahl auf eines mit 3-2 = 1 Freiheitsgraden reduzieren lassen wird.

Eine Idee davon, wie eine solche Koordinatenwahl aussehen könnte bekommt man, wenn man sich in Erinnerung ruft, daß eine Koordinate zyklisch ist, wenn sie in der Lagrangefunktion nicht auftaucht. Gelingt es, zwei zyklische Koordinaten auszumachen, ist das Problem auf eines mit einer 'nichtrivialen' Koordinate reduziert und eine problemangepaßte Wahl getroffen. Im momentan betrachteten Problem sind Koordinaten Rotationen um gewisse Achsen zugeordnet. (Die die Dynamik eines Kreisels charakterisierenden Variable sind winkelartige Größen.) Offensichtlich ist das Gesamtproblem rotationsymmetrisch um (i) die raumfeste Achse \mathbf{e}_3 und (ii) um die körperfeste Symmetrieachse \mathbf{e}'_3 . Es steht zu erwarten, daß die mit diesen Rotationen verbundenen Winkelfreiheitsgrade zyklisch sind.

Ein Koordinatensatz, der diese beiden Drehungen – und damit zwei zyklische Koordinaten – explizit enthält, existiert; die dieses System aufspannenden drei Winkel (ϕ, θ, ψ) heißen die **Eulerschen Winkel**. Die Eulerwinkel lassen sich am einfachsten über ein direktes geometrisches Konstruktionsschema einführen. Die Strategie ist, explizit drei durch je einen Winkel parametrisierte Drehungen um gewisse Achsen anzugeben. Diese Drehungen müssen so beschaffen sein, daß sie das raumfeste System K in jedes mögliche körperfeste System K' überführen können. Gelingt es, drei Drehungen mit dieser Eigenschaft zu finden, ist das Problem gelöst. Eine Kette von Drehungen dieser Eigenschaft sieht wie folgt aus (Fig. 3.11):

▷ Ausgehend von einer Situation, in der K und K' zusammenfallen drehen wir um einen Winkel ϕ (zyklische Koordinate) um die Achse \mathbf{e}_3 . Unter dieser Drehung bleibt \mathbf{e}_3 fest und \mathbf{e}_1 dreht auf eine Achse $\mathbf{n} = R_{\mathbf{e}_3}(\phi)\mathbf{e}_3$, die sogenannte **Knotenlinie**. Anwendung der Hilfsformel (3.17) zeigt, daß die diese Drehung vermittelnde Drehmatrix durch

$$R_{\mathbf{e}_3}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

 \triangleright Wir drehen nun um einen Winkel θ um die Knotenlinie. Hierbei wird \mathbf{e}_3 auf seine endgültige Position \mathbf{e}'_3 gedreht. Die entsprechende Matrix ist

$$R_{\mathbf{n}}(\theta) = R_{\mathbf{e}_3}(\phi)R_{\mathbf{e}_1}(\theta)R_{\mathbf{e}_3}^{-1}(\phi), \quad R_{\mathbf{e}_1}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

wie mit der Hilfsformel (3.17) einsichtig ist.

▷ Schließlich drehen wir um einen Winkel ψ um die Achse \mathbf{e}'_3 (\rightsquigarrow zyklische Koordinate). Die entsprechende Drehmatrix ist

$$R_{\mathbf{e}'_{3}}(\psi) = R_{\mathbf{e}_{3}}(\phi)R_{\mathbf{n}}(\theta)R_{\mathbf{e}_{3}}(\psi)R_{\mathbf{n}}^{-1}(\theta)R_{\mathbf{e}_{3}}^{-1}(\phi).$$

Aufgabe: Zeigen Sie, daß eine Drehung um die Achse $R'\mathbf{e}_a$, a = 1, 2, 3 um einen Winkel α durch durch die Drehmatrix

$$R'R_{\mathbf{e}_{a}}(\phi)R'^{-1} \tag{3.17}$$

beschrieben wird. Hierbei ist R' eine beliebige feste Drehmatrix.

Es ist nicht schwer, sich davon zu vergewissern – entweder durch geometrische Überlegungen oder durch formales Nachrechnen (siehe z.B.[?]) –, daß jedes gegenüber K gedrehte System K' durch sukzessive Anwendung dieser Drehungen⁸,

$$R \equiv R_{\mathbf{e}_{\mathbf{a}}'}(\psi)R_{\mathbf{n}}(\theta)R_{\mathbf{e}_{\mathbf{a}}}(\phi) = R_{\mathbf{e}_{\mathbf{a}}}(\phi)R_{\mathbf{e}_{\mathbf{a}}}(\theta)R_{\mathbf{e}_{\mathbf{a}}}(\psi)$$

auf das Orthonormalsystem $\{e_a\}$, a = 1, 2, 3, generiert werden kann. Die hierzu erforderlichen Parameterbereiche der drei Eulerwinkel sind durch

$$\phi \in [0, 2\pi), \qquad \theta \in [0, \pi), \qquad \psi \in [0, 2\pi)$$

gegeben.

Info: Die oben angegebene Form der Drehmatrix ist im aktiven Bild einer Koordinatentransformation (vgl. Abschnitt 1.1.2) zu interpretieren. Wir diskutieren diesen Punkt am Beispiel der Abbildung $R_{\mathbf{e}_3}(\phi)$. Bei Anwendung dieser Drehmatrix wird der Basisvektor \mathbf{e}_1 von K, repräsentiert durch die Komponentendarstellung $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, 'aktiv' abgebildet auf den Basisvektor

$$\mathbf{e}_1' = R_{\mathbf{e}_3}(\phi)\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi\\ \sin\phi\\ 0 \end{pmatrix}$$



Abbildung 3.12: Zur aktiven und passiven Deutung der Drehmatrix $R_{\mathbf{e}_3}(\phi)$. Die Vektoren $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_3$ stehen senkrecht zur Bildebene.

von K'. Dies ist zu unterscheiden vom passiven Bild: Gegeben einen Vektor \mathbf{v} , der bezüglich K die Komponentendarstellung $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ hat, d.h. $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$. Was ist seine Darstellung $(v'_1, v'_2, v'_3)^T$ bezüglich K', d.h. wie lauten die Koeffizienten in $\mathbf{v} = v'_1 \mathbf{e}'_1 + v'_2 \mathbf{e}'_2 + v'_3 \mathbf{e}'_3$? (Beachten Sie, daß der Vektor hier fest bleibt und lediglich in einer anderen Basis dargestellt wird.) Die Antwort ist

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = R_{\mathbf{e}_z}^T(\phi) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

Die hier auftretende Matrix ist $R_{\mathbf{e}_3}^T(\phi) = R_{\mathbf{e}_3}^{-1}(\phi) = R_{\mathbf{e}_3}(-\phi)$ – beachten Sie den Vorzeichenwechsel! Man kann sich diesen Sachverhalt leicht veranschaulichen: Im aktiven Bild werden die Basisvektoren für positives ϕ im Gegenuhrzeigersinn um die z-Achse gedreht. Dagegen erscheint jeder feste Vektor \mathbf{v} vom Standpunkt des gedrehten Koordinatensystems so, als sei er im Uhrzeigersinn gedreht (vgl. Fig. 3.12). In vielen Lehrbüchern sind die die das Eulersystem erzeugenden Drehungen in ihrer passiven Form gegeben, anstelle der oben angegebenen Matrizen treten deren Transponierte auf.

3.5.1 Lagrangefunction des Schweren Kreisels

Nächstes Etappenziel ist es, die Lagrangefunktion des schweren Kreisels in den Eulerwinkeln auszudrücken. Wir werden dabei von vornherein investieren, daß die Koordinaten ϕ und ψ zyklisch sind und daher nicht explizit in der Lagrangefunktion auftreten können. Dies wird zu einer erheblichen Vereinfachung der Rechnung führen⁹. Da ϕ und ψ zyklisch sind, können wir ohne Einschränkung $\phi = 0 = \psi$ setzen. Zyklizität bedeutet jedoch *nicht*, daß diese Koordinaten völlig ignoriert werden können. Auch wenn die Lagrangefunktion nicht explizit vom Wert dieser Winkel abhängt, kann sie doch immer noch ihre zeitlichen Ableitungen enthalten. (Zum Beispiel darf die Lagrangefunktion eines allgemeinen Problems mit Rotationssymmetrie um die z-Achse aus Symmetriegründen nicht vom Azimuthwinkel ϕ abhängen. Sie

⁸Man beachte, daß die Drehmatrizen genau in entgegengesetzter Reihenfolge auf die körperfesten Basisvektoren wirken, als das Konstruktionsprinzip suggeriert.

⁹Man kann die gleich folgende Ableitung natürlich auch ohne diese Annahme durchführen. Am Ende einer ungleich aufwendigeren Rechnung steht das gleiche Resultat, womit explizit nachgeprüft ist, daß ϕ und ψ zyklisch sind.

enthält aber sehr wohl Terme, die ϕ enthalten. Diese Terme beschreiben die Azimuthkomponente des Geschwindigkeitsvektors.)

Der wesentlichste Bestandteil der im körperfesten System ausgedrückten Lagrangefunktion eines Kreisels ist neben dem Trägheitstensor der Rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}' = R^{-1}\boldsymbol{\omega}$. Die Hauptarbeit ist geleistet, sobald wir es geschafft haben, $\boldsymbol{\omega}'$ über die Eulerwinkel auszudrücken. Der Schlüssel zur Lösung dieses Problems liegt in dem oben erarbeiteten Zusammenhang (3.4) zwischen Rotationsvektoren $\boldsymbol{\omega}$ und der Zeitableitung von Drehmatrizen. Im momentanen Kontext ist $R = R(\phi(t), \theta(t), \psi(t))$ durch die Eulerwinkel parametrisiert, d.h. es muß möglich sein, auch $\boldsymbol{\omega}$ durch Eulerwinkel darzustellen. Zur Lösung dieses Problems gehen wir von der Kettenregel aus,

$$\dot{R}R^{-1} = \left\{ (\dot{\phi}\partial_{\phi} + \dot{\theta}\partial_{\theta} + \dot{\psi}\partial_{\psi})R \right\} R^{-1}$$
(3.18)

Substitution von (3.18) in die Definitionsgleichung von $\boldsymbol{\omega}$ ergibt

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \equiv (\boldsymbol{\omega}_{\phi} + \boldsymbol{\omega}_{\psi} + \boldsymbol{\omega}_{\theta}) \times \mathbf{q} \equiv \left\{ (\dot{\phi}\partial_{\phi} + \dot{\theta}\partial_{\theta} + \dot{\psi}\partial_{\psi})R \right\} R^{-1} \mathbf{q},$$

wobei die Vektoren $\boldsymbol{\omega}_{\phi,\theta,\psi}$ durch

$$\boldsymbol{\omega}_{\phi} \times \mathbf{r} = \dot{\phi}(\partial_{\phi}R)R^{-1}\mathbf{q}$$

(und analog für die anderen) definiert sind. Inhaltlich besagen diese Gleichungen, daß ω als Summe dreier Rotationsvektoren $\omega_{\phi,\theta,\psi}$ dargestellt werden kann. Die Vektoren $\omega_{\phi,\theta,\psi}$ entsprechen Drehungen um die das Eulersystem definierenden Drehachsen:

- $\triangleright \omega_{\phi} = \dot{\phi} \mathbf{e}_3$: Drehung um \mathbf{e}_3 mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$.
- $\triangleright \omega_{\theta} = \dot{\theta} \mathbf{n}$: Drehung um **n** mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$.
- $\triangleright \omega_{\psi} = \dot{\psi} \mathbf{e}'_3$: Drehung um \mathbf{e}'_3 mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$.

Info: Wem diese Argumente zu vage sind, der kann die Vektoren $\omega_{\phi,\theta,\psi}$ mittels der oben angegebenen Drehmatrizen und der Definition (3.18) auch explizit ausrechnen. Dazu benutzen wir die Relation

$$\left[\partial_{\alpha}R_{\mathbf{e}_{a}}(\alpha)\right]R^{-1}(\alpha)\mathbf{q}=\mathbf{e}_{a}\times\mathbf{q}$$

Wir illustrieren das Vorgehen am Beispiel von ω_{θ} . Es ergibt sich

$$(\partial_{\theta}R)R^{-1} = R_{\mathbf{e}_3}(\phi) \Big[\partial_{\theta}R_{\mathbf{e}_1}(\theta)\Big]R_{\mathbf{e}_1}^{-1}(\theta)R_{\mathbf{e}_3}^{-1}(\phi).$$

Nun ist

$$\begin{bmatrix} \partial_{\theta} R_{\mathbf{e}_{1}}(\theta) \end{bmatrix} R_{\mathbf{e}_{1}}^{-1}(\theta) \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{q}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{e}_{1} \times \mathbf{q},$$

Zusammen mit der oben bewiesenen Verträglichkeit von Drehungen und Kreuzprodukt erhalten wir

$$(\partial_{\theta} R) R^{-1} \mathbf{q} = R_{\mathbf{e}_3}(\phi) \Big(\mathbf{e}_1 \times R_{\mathbf{e}_3}^{-1}(\phi) \mathbf{q} \Big) = \mathbf{n} \times \mathbf{q}.$$

Wir haben also gezeigt, daß der Drehvektor als

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{e}'_3$$

geschrieben werden kann. Um mit dieser Darstellung arbeiten zu können, ist noch der raumfeste Vektor \mathbf{e}_3 durch die Vektoren des körperfesten Systems auszudrücken. Für $\psi = 0 = \phi$ ist die zwischen den zwei Systemen vermittelnde Matrix R eine Drehung um die Achse $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1$. (Bei der Identifikation $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1$ verwenden wir wiederum $\phi = \psi = 0$.) Der Drehwinkel ist θ . Ihre explizite Wirkung wird durch die Gleichungen (vgl. auch Fig. 3.13)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_2' &= \cos\theta\mathbf{e}_2 + \sin\theta\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' &= \cos\theta\mathbf{e}_3 - \sin\theta\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

beschrieben. Dieses Gleichungssystem kann nach den raumfesten Basisvektoren aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_2 &= \cos\theta \mathbf{e}_2' - \sin\theta \mathbf{e}_3', \\ \mathbf{e}_3 &= \cos\theta \mathbf{e}_3' + \sin\theta \mathbf{e}_2'. \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist die uns Interessierende. Mit ihr transformiert sich die oben angegebene Gleichung für den Drehvektor zu

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_1' + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_2' + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{e}_3'.$$



Abbildung 3.13: Veranschaulichung der durch $R_{\mathbf{e}_1}(\theta)$ beschriebenen Drehung. Die Achse \mathbf{e}_1 steht senkrecht auf der Papierebene.

Die Koeffizienten des im körperfesten System ausgedrückten Drehvektors sind also durch

$$\begin{split} \omega_1' &= \dot{\theta} \\ \omega_2' &= \dot{\phi} \sin \theta, \\ \omega_3' &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{split}$$

gegeben. Der nächste Schritt der Problemlösung besteht in der Formulierung der Lagrangefunktion.

Tatsächlich können wir nicht unmittelbar von der oben abgeleiteten Funktion (3.12)ausgehen, denn letztere war ja unter Verwendung eines Bezugssystems K' mit Ursprung im Schwerpunkt konstruiert, während im derzeitigen Kontext ein *beliebiger* Punkt auf der Figurenachse als Ursprung gewählt ist. Eine für unsere Zwecke modifizierte Lagrangefunktion läßt sich jedoch unter Verwendung der oben allgemein abgeleiteten Transformationsformeln leicht konstruieren. Es ist

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum m \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sum m [R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{q}')] \cdot [R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{q}')] - U =$$
$$= \frac{1}{2} \sum m(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{q}') \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{q}') - U = \boldsymbol{\omega}'^T I \boldsymbol{\omega}' - U = \sum_{a=1}^3 \omega_a'^2 I_a - U,$$

wobei $I_{ab} = \sum m(q_c q_c \delta_{ab} - q_a q_b)$ der bezüglich des fixierten Punktes in K' berechnete Trägheitstensor ist und wir im letzten Schritt verwendet haben, daß das System K' bezüglich der Symmetrieachse ausgerichtet ist und I daher Diagonalgestalt mit Hauptträgheitsmomenten $I_1 = I_2$ und I_3 hat.

Substitution der oben abgeleiteten Ergebnisse für die Koeffizienten von ω' führt auf

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2.$$

Schließlich ist noch die potentielle Energie über Eulerwinkel auszudrücken. Die auf jedes Massenelement m_i des Körpers wirkende Gewichtskraft ist $\mathbf{F}_{e,i} = -m_i g \mathbf{e}_3$. Eine diese Kraft gemäß $\mathbf{F}_{e,i} = -\nabla U_{e,i}$ erzeugende Potentialfunktion ist durch $U_{e,i} = m_i g q_{3,i}$ gegeben. Das Gesamtpotential erhält man durch Summation

$$U_{\rm e} = \sum_{i} m_i g q_{3,i} \to g \int dV \rho(\mathbf{r}) q_3 = g M R_1,$$

wobei der Pfeil einen Kontinuumlimes andeutet und im zweiten Gleichheitszeichen die Definition des Schwerpunkts verwendet wurde. In dieser Formel ist R_3 als die 3-Koordinate des Schwerpunkts bezüglich eines festgehaltenen Raumpuntes. Wir wählen diesen Punkt als denjenigen fest, an dem der Körper fixiert ist (gleichzeitig der Ursprung beider Koordinatensysteme). Vergleich mit Fig. 3.13 zeigt, daß diese Koordintate für den gedrehten Kreisel durch $R_3 = R \cos \theta$ gegeben ist, wobei R der Abstand des Schwerpunkts vom Fixierungspunkt ist.

Zusammenfassend erhalten wir

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - gMR \cos \theta$$
(3.19)

als Lagrangefunktion des schweren Kreisels. Wie zu erwarten hängt sie von drei Koordinaten ab (Wegen der Fixierung fallen ja drei Koordinaten weg.). Die Winkel ϕ und ψ sind zyklisch (was wir freilich nicht bewiesen, sondern in der Ableitung von Anbeginn vorausgesetzt haben.)

3.5.2 Diskussion der Kreiselbewegung

Im folgenden beschäftigen wir uns mit der Analyse der Lagrangefunktion und der aus ihr resultierenden Bewegungsgleichungen. Wir werden die Gleichungen zwar nicht geschlossen lösen können – das geht nur für einige spezielle Kreiseltypen, wie den 'schlafenden' und den 'schnellen' Kreisel[2] – uns aber einen weitreichenden halbquantitativen Überblick über verschiedene in der Kreiselphysik realisierte Bewegungstypen machen können.

Zunächst stellen wir die Bewegungsgleichungen für die zwei zyklischen Variablen ϕ und ψ auf. Unter Verwendung von (2.7) und des auf Seite 94 ausgearbeiteten Zusammenhangs $\partial_{\dot{\phi}}L = L_3$, wobei ϕ der Drehwinkel um die Achse \mathbf{e}_3 und L_3 der zugeordnete Drehimpuls ist, ergibt sich auf. Mit

$$\partial_{\dot{\phi}}L = L_3 = \dot{\phi}(I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\psi} \cos \theta I_3 = \text{const.},$$

$$\partial_{\dot{\psi}}L = L'_3 = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{const.}$$

Außerdem wissen wir, daß die Gesamtenergie des Systems

$$E = T + U = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + gMR \cos \theta$$

erhalten ist. Mittels der oben angegebenen Formeln können die hier auftretenden Winkelableitungen $\dot{\phi}$ und $\dot{\psi}$ als Funktion der erhaltenen Drehimpulskomponenten und θ dargestellt werden. Eine kurze Rechnung führt auf

$$\dot{\phi} = \frac{L_3 - L_3' \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

und

$$E = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{L_3'^2}{2I_3} + mgR\cos\theta + \frac{(L_3 - L_3'\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}$$

Wir definieren $E' = E - L_3'^2 (2I_3)^{-1}$ und schließen daß sich die Dynamik von θ als die eines eindimensionalen Problems mit Energie

$$E' = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + V(\theta),$$

und

$$V(\theta) = mgR\cos\theta + \frac{(L_3 - L'_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}$$

darstellt. Zur Lösung dieses effektiv eindimensionalen Problems führen wir eine Reihe dimensionsloser Hilfsparameter ein:

$$a \equiv \frac{L_3}{I_1}, \qquad b = \frac{L'_3}{I_1}, \qquad \alpha = \frac{2E'}{I_1}, \qquad \beta = \frac{2mgR}{I_1}.$$

Mit $\cos \theta = u \in [-1, 1]$ nimmt der Energiererhaltungssatz nun die Form

$$\dot{u}^2 = f(u)$$

an, wobei das Polynom dritten Grades

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2$$

Die in den neuen Variablen ausgedrückte Variation des Azimuthwinkels lautet

$$\dot{\phi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}.\tag{3.20}$$

Da $\beta > 0$ ist $f(u \to \pm \infty) = \pm \infty$ (vgl. Fig.3.14). Weiterhin ist (abgeschen vom



Abbildung 3.14: Die die Kreiseldynamik charakterisierende Hilfsfunktion f(u).

entarteten Fall $a\neq\pm b$

$$f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 < 0.$$

Schließlich wissen wir, daß wegen $u = \cos \theta$ das Intervall $u \in [-1, 1]$ physikalischen Bewegungen entspricht. Für eine nichttriviale Bewegung muß zumindest irgendwann einmal $\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 > 0$ sein. Dies beinhaltet, daß für zumindest ein $u \in [-1, 1]$ $\dot{u}^2 = \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 > 0 \Rightarrow f(u) > 0$ gelten muß. In Kombination mit $f(\pm 1) < 0$ folgt, daß f die in Fig. 3.14 dargestellte Struktur haben muß. Insbesondere existieren zwei Nullstellen u_1 und u_2 im Intervall [-1, 1]. Wegen $0 \leq \dot{u}^2 = f(u)$ entspricht das Intervall $[u_1, u_2]$ tatsächlich angenommenen Werten der Winkelvariable. Wegen $\dot{u}^2|_{u=u_{1,2}} = f(u_{1,2}) = 0$ verschwindet die Winkelgeschwindigkeit an den Außengrenzen des zulässigen Bereichs. Von einem Punkt im Intervallinneren kommend wird sich die Variable u daher bis zu einer der Intervallgrenzen vorarbeiten dort umkehren und wieder ins Intervallinnere zurücklaufen. Mittels $\theta = \arccos(\phi)$ kann hieraus auf die zwischen den zwei Grenzwinkeln $\theta_{1,2} = \arccos(u_{1,2})$ ablaufende Dynamik des Winkels θ rückgeschlossen werden.

Die in Fig.3.15 abgetragenen Kurven geben die Bewegung des Schnittpunkts der Figurenachse mit einer Einheitssphäre, des sogenannten **Locus**, wieder. Entsprechend den eben abgeleiteten Eigenschaften der Bewegung ist die Locusbewegung auf einen



Abbildung 3.15: Bewegung der Figurenachse auf der Einheitssphäre. Gestrichelt: Position der Variable u'.

Polarwinkelbereich $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ eingeschränkt. Man nennt die θ -Komponente der zwischen den beiden Grenzwinkeln verlaufende Bewegung **Nutation**. Als nächstes diskutieren wir die Azimuthaldynamik, d.h. die Bewegung der Winkelvariable ϕ . Diese Bewegungskomponente wird allgemein als **Präzession** bezeichnet. Die Struktur von Gleichung (3.20) beinhaltet, daß drei qualtiativ verschiedene Fälle zu unterscheiden sind.

- ▷ Sofern die Lösung u' der Gleichug a bu' = 0 außerhalb des physikalischen Intervalls $[u_1, u_2]$ liegt, hat $\dot{\phi}$ gleichbleibendes Vorzeichen. Die Bewegung sieht qualitativ wie in Figur 3.15 links aus, d.h. im Laufe der Nutation wandert die Figurenachse gleichbleibend in eine Richtung.
- ▷ Für $u' \in [u_1, u_2]$ wechselt ϕ im Laufe jedes Nutationsintervalls einmal sein Vorzeichen, d.h. der Locus 'spiralisiert' zwischen den beiden Grenziwinkeln (Fig. 3.15 mitte).
- ▷ Ein Grenzfall liegt für $u' = u_1$ vor. In diesem Fall verschwindet die Geschwindigkeit der Präzession am oberen Grenzpunkt der Nutation. Physikalisch ist dieser Fall nicht so grenzwertig wie es scheint: Ein Kreisel, der mit Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ (aber natürlich $\dot{\psi} \neq 0$, denn sonst fiele der Kreisel ja einfach um) losgelassen wird führt diesen Bewegungstyp aus. Startend von $\theta_1 = \theta(0)$ 'sackt' er zunächst nach unten weg, richtet sich dann aber wieder auf u.s.w.

Aufgabe: Beweisen Sie, daß der dritte der oben angesprochenen Bewegungstypen für die Anfangsbedingungen $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ charakeristisch ist.

Die Gesamtbewegung des Kreisels ist durch drei Komponenten charakterisiert, die oben diskutierte Nutation und Präzession sowie die Rotation um die Eigenachse (Winkel ψ). Jede der drei Komponenten hat ihre eigene Winkelgeschwindigkeit, wobei $\dot{\psi}$ i.d.R. die mit Abstand größte ist. Abgesehen vom Grenzfall miteinander komensurabler Winkelgeschwindigkeiten kehrt der Kreisel niemals zu seiner Ausgangsposition zurück.

3.5. SCHWERER KREISEL

Die oben halbquantitativ durchgeführte Diskussion kann für einige Kreiseltypen (z.B. sehr schnell angeworfene Kreisel oder Kreisel deren Figurenachse fast vertikal ist) quantifiziert werden [2, 1]. Wir wollen hier jedoch nicht weiter in diese Diskussion einsteigen.

Bsp.: Der schlafende Kreisel

Wir betrachten eine spezielle Lösung der Bewegungsgleichungen des schweren Kreisels, nämlich $\theta(t) = 0, \dot{\psi}(t) = \text{const.}$

Aufgabe: Verfizieren Sie anhand der Ergebnisse für den allgemeinen schweren Kreisel, daß ($\theta = 0, \dot{\psi} = \text{const.}$) eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist.

Es handelt sich also um eine Konfiguration, in der der Kreisel mit konstanter Geschwindigkeit um seine Figurenachse rotierend aufrecht steht. Da er von außen betrachtet zu ruhen scheint, bezeichnet man das System als einen **schlafenden Krei**sel.

Diese Lösung kann nur dann physikalische Bedeutung haben, wenn sie gegenüber kleinen Störungen von außen stabil bleibt. Die Frage, die es also zu stellen gilt, ist was passiert, wenn wir eine kleine Auslenkung $\theta \neq 0$ vornehmen. Bleibt θ im Laufe der Zeit klein (entsprechend einer leicht um $\theta = 0$ 'vibirierenden' Kreiselspitze) oder wächst θ mit der Zeit rasch an (der Kreisel wacht auf)?



Abbildung 3.16: Stabile Bewegung des schlafenden Kreisels

Wir bemerken zunächst, daß für $\theta = 0$ die Systeme K und K' nicht in 3-Richtung gegeneinander gekippt sind. M.a.W. für alle vektoriellen Großen **v** ist $v_3 = v'_3$. Insbesondere $\omega'_3 I_3 = \omega_3 I_3 = L_3 = L'_3$. Unter Verwendung dieser Formeln entwickeln wir das oben abgeleitete effektive Potetial $V(\theta)$ in $\theta \ll 1$:

$$V(\theta) = mgR\cos\theta + \frac{(L_3 - L'_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} \simeq \underbrace{\left(-\frac{mgR}{2} + \frac{\omega^2 I_3^2}{8I_1}\right)}_{C/2} \theta^2.$$

Subsitution in die Energiebilanzgleichung führt auf

$$E' = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{C}{2}\theta^2$$

Dies ist die Energiegleichung für einen eindimensionalen Oszillator, für kleine θ wird die Winkelauslenkung der Bewegungsgleichung¹⁰

$$I_1\theta = -C\theta$$

genügen. Für C > 0 beschreibt diese Gleichung die gebundene Bewegung eines harmonischen Oszillators, d.h. abgesehen von einer kleinen oszillatorischen Komponente bleibt die $\theta \simeq 0$ eine stabile Lösung. Für C < 0 entspricht die rechte Seite jedoch einer vom Ursprung wegtreibenden Kraft und θ divergiert exponentiell (bitte nachrechnen). Das Kriterium für Stabilität lautet also

$$C \stackrel{!}{>} 0 \Rightarrow \omega^2 \stackrel{!}{>} \frac{4I_1}{I_3^2} mgR.$$

Damit läßt sich die Bewegung eines schnell angeworfenen Kreisels voraussagen. Ein geübter Kreiselwerfer kann den Kreisel so plazieren, daß er zunächst stabil und aufrecht steht (abgesehen von einer kleinen überlagerten Nutation). Im Laufe der Zeit verliert der Kreisel durch Reibungsverluste Winkelgeschwindigkeit bis schließlich das obige Stabilitätskriterium verletzt ist. An diesem Punkt bricht gerät die Bewegung außer Kontrolle und der Kreisel kollabiert.

3.6 Zusammenfassung

Gegenstand dieses Kapitels war die Untersuchung von N-Teilchensystemen mit festen Relativabsänden. In solchen sogenannten starren Körpern reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade von 3N auf 6, womit analytisch-theoretischen Behandlungen möglich werden.

In die quantitative Beschreibung der Bewegung starrer Körper waren stets zwei Koordinatensysteme involviert, ein raumfestes und ein körperfestes. Die zwischen diesen Systemen vermittelnden Umrechnungsformeln beinhalteten das Erscheinen zweier charakteristische Typen von Scheinkräften, der Zentrifugalkraft und der Beschleunigungskraft. Die Eigenschaften der in Frage kommenden Körper selbst wurden im körperfesten System mittels der Konzepte Trägheitstensor, Trägheitsellipsoid, Hauptachsensystem, instantane Winkelgeschwindigkeit und der resultierenden Lagrangefunktion charakterisiert. Der wesentlichste Teil der zur Beschreibung der Körperdynamik nötigen Arbeit bestand darin, diese Größen vom körperfesten ins

¹⁰Man rechnet dies explizit nach, indem man $0 = d_t E' = \dot{\theta}(I_1 \ddot{\theta} + C\theta)$ bildet.

raumfeste System zurückzutransformieren. Dieses Programm ließ sich für das Beispiel eines symmetrischen kräftefreien Kreisels noch geschlossen durcführen. Bereits beim 'nächstschwierigeren' System, dem symmetrischen Kreisel im konstanten Kraftfeld ließen sich jedoch keine geschlossenen Lösungen mehr angeben, obschon die Bewegung einer qualitativen Analyse noch zugänglich war. Für komplizierter geformte Körper (\sim Trägheitsellipsoide ohne identische Hauptträgheitsmomente) bzw. kompliziertere externe Kräfte sind analytische Berechnungen kaum mehr möglich. Abschließend erwähnen wir, daß dieses Kapitel verglichen mit dem 'üblichen' Rahmen in dem der dem starren Körper in Mechanikvorlesungen diskutiert wird, ziemlich knapp ausgefallen ist. Wichtige Konzepte wie z.B. die Poinsot Konstruktion oder andere Verfahren der qualitativen Analyse von Körperbewegungen, allgemeine Kreiseltheorie, Stabilitätsanalyse der Hauptachsenrotationen, der Steinersche Satz u.a. wurden nicht diskutiert.

KAPITEL 3. DER STARRE KÖRPER

Kapitel 4 Hamilton Mechanik

Im Rahmen der Lagrange Beschreibung hatten wir mechanische Systeme über einen Satz generalisierter Koordinaten $q_i, i = 1, ..., f$ und deren generalisierte Geschwindigkeiten \dot{q}_i beschrieben. Dabei hatte sich herausgestellt, daß neben dem Variablensatz $\{q_i, \dot{q}_i\}$ immer wieder auch nachgeordnete Größen $X(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ eine Rolle spielten. Insbesondere hatten wir gefunden, daß die über $p_i = \partial_{\dot{q}_i} L$ definierten generalisierten Impulse (i) in der Regel der Fälle direkte physikalische Bedeutung tragen aber (ii) nur im Falle kartesischer Koordinaten mit den Geschwindigkeiten über die triviale Beziehung $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}}$ verknüpft sind.

Es treten immer wieder Situationen auf, in denen es sinnvoll wäre, anstelle der Geschwindigkeiten \dot{q}_i die Impulse p_i selbst als primäre Variable zu verwenden. Eine solche auf dem Variablensatz $\{q_i, p_i\}$ aufbauende Formulierung der Mechanik existiert und wird als **Hamilton Mechanik** bezeichnet. Man muß sich hierbei bewußt sein, daß es sich bei dem Wechsel $\{q_i, \dot{q}_i\} \rightarrow \{q_i, p_i\}$ nicht um einen der bereits früher besprochenen 'gewöhnlichen' Variablenwechsel von einem Satz generalisierter Koordinaten auf einen anderen handelt. Es passiert mehr, und tatsächlich handelt es sich bei der Hamilton Formulierung um einen Zugang zur Mechanik, der sich qualitativ von der Lagrange Formulierung absetzt. Zu den entscheidenden Vorteilen der Hamilton Mechanik zählen

- ▷ eine Flexibilität bei der Koordinatenwahl, die der der Lagrange Mechanik noch bei weitem übersteigt.
- ▷ die Tatsache, daß sie direkt im Phasenraum formuliert ist. Der Phasenraum besitzt weitreichende mathematische und physikalische Strukturen, die im Rahmen der Hamilton Formulierung für die Lösung mechanischer Probleme nutzbar gemacht werden können. Beispielsweise ist die moderne Theorie irreversibler dynamischer Systeme (→ 'Chaos') größtenteils in der Hamilton'schen Formulierung entwickelt.
- ▷ daß das nichtklassischen Gegenstück der Punktmechanik, die Quantenmechanik, in einer Weise formuliert ist¹, die der Hamilton Mechanik parallel läuft.

 $^{^1}$ Jedenfalls gilt das für den sogenannten kanonischen Zugang zur Quantenmechanik (und damit denjenigen Zugang, der einführenden Kursen zugrundeliegt.) Es gibt auch einen der Lagrange

Praktisch alle unten entwickelten Konzepte haben eine quantenmechanische Entsprechung.

Man darf hieraus jedoch nicht schließen, daß die Hamilton Mechanik 'höher' als die Lagrange Mechanik stünde. Es handelt sich einfach um einen Alternativzugang, der eine Reihe spezifischer Vorteile hat, aber durchaus nicht immer der Lagrange Formulierung vorzuziehen ist. Viele moderne Theorien, zum Beispiel die Quantenfeldtheorie, moderne Theorien der Kontinuumsmechanik und andere werden parallel in einer Hamilton'schen und einer Lagrange'schen Formulierung entwickelt, wobei sich mal die eine mal die andere als geigneter erweist.

4.1 Hamilton Funktion und Hamilton Bewegungsgleichungen

Wir beginnen mit einer formalen Herleitung der zentralen Konzepte der Hamilton Mechanik.

4.1.1 Herleitung der Hamilton Gleichungen

Eine Art die Hamilton Mechanik zu entwickeln baut auf einer Analyse des totalen Differentials der Lagrangefunktion auf.

Info: Wir erinnern an den Begriff des Differentials einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to R$. Das an der Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ genommene Differential $df(\mathbf{x})$ ist in gewisser Weise die höherdimensionale Verallgemeinerung der Ableitung. Genauer gesagt handelt handelt es sich um eine lineare Abbildung

$$df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \quad \to \quad \mathbb{R}$$
$$\mathbf{h} \quad \mapsto \quad df(\mathbf{x})\mathbf{h}$$

die über folgende Vorschrift definiert ist:

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \epsilon df(\mathbf{x})\mathbf{h} + O(\epsilon^2).$$

In Worten: $df(\mathbf{x})$ angewendet auf den Vektor **h** ergibt die Richtungsableitung von f in Richtung h. Man darf sich dabei df (anders als oft suggeriert) nicht als etwas 'Kleines' vorstellen². Es handelt sich einfach um diejenige lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} , die f an der Stelle x am besten approximiert. Wenn man gerne bildhaft denkt, kann man sich df dagegen als ein 'hungriges' Objekt vorzustellen, das man mit einem Vektor gefüttert werden muß, um eine Zahl zu produzieren (vgl. Fig. 4.1). Da es sich bei dem Differential um eine verallgemeinerte Ableitung handelt, erfüllt df eine Reihe von für den Ableitungskalkül typischen Rechenregeln:

130

Formulierung parallel laufenden Zugang zur Quantenmechanik.

²Die 'Kleinheit' steckt vielmehr in dem in die Definition von df eingehenden Parameter ϵ , der besagt, daß f nur lokal durch df approximiert werden kann.



Abbildung 4.1: Zur Definition des Differentials einer Funktion

Produktregel: d(fg) = fdg + gdf. Kettenregel: Für $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist

$$d(f \circ \mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_i} dg_i,$$

wobei $g_i(x)$ die *i*-te Kompoonente des Bildvektors $\mathbf{g}(x) \in \mathbb{R}^n$ ist. Koordinatendarstellung: Es ist

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Die ersten beiden Regeln werden in Analogie zum eindimensionalen Fall bewiesen (\rightarrow Lehrbücher der Analysis). Die letzte Identität beweist man, indem man die rechte und die linke Seite auf die Einheitsvektoren \mathbf{e}_i anwendet. Einerseits ist

$$df(\mathbf{x})\mathbf{e}_j = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} (f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})) = \partial_{x_j} f(\mathbf{x}),$$

andererseits:

$$dx_i \mathbf{e}_j = \partial_{x_i} x_i = \delta_{ij}$$

(Beachten Sie, daß x_i eine gewöhnliche Funktion ist, die den Punkt **x** auf seine *i*-te Koordinatenkomponente abbildet.) Da die $\{\mathbf{e}_j\}$ ein vollständiges System bilden, ist die Identität oben bewiesen.

Eine unmittelbar aus $dx_i \mathbf{e}_j$ folgende und in der Praxis sehr wichtige Identität ist $dx_i \mathbf{v} = v_i$. In Worten: Das Differential der *i*-ten Koordinatenfunktion angewendet auf einen Vektor \mathbf{v} liefert dessen *i*-te Komponente.

Wir betrachten die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &\mapsto L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{aligned}$$

als Funktion von 2f + 1 unabhängigen Variablen und bilden ihr vollständiges Differential:

$$dL = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + d(p_i \dot{q}_i) - q_i dp_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Die Bedeutung der letzten Zeile können wir folgendermaßen interpretieren: Wir definieren eine Funktion

$$H \equiv \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L.$$

$$(4.1)$$

Man bezeichnet H als die **Hamiltonfunktion** des (durch L beschriebenen) Systems. Die Ableitung oben besagt, daß H das Differential

$$dH = \sum_{i=1}^{f} \left(-\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \dot{q}_i dp_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

hat. Auf der rechten Seite treten die Differentiale dq_i , dp_i und dt auf. Aus der allgemeinen Konstruktion des Differentials einer Funktion folgt, daß H als Funktion $H(q_i, p_i, t)$ von q_i , p_i und t aufzufassen ist:

$$H: \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

(q, p, t) $\mapsto H(q, p, t).$

Vergleich mit der allgemeinen Koordinatendarstellung

$$dH = \sum_{i=1}^{J} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Führt auf die Gleichungen

$$\partial_{q_i} H = -\partial_{q_i} L, \qquad \partial_{p_i} H = \dot{q}_i, \qquad \partial_t H = -\partial_t L.$$

Hierbei sind die rechten Seiten so zu interpretieren, daß (i) $(q_i, p_i) = (q_i, p_i)(\{q_j, \dot{q}_j, t\})$ (Koordinaten und Impulse als Funktionen der Koordinaten, Geschwindigkeiten und möglicherweise der Zeit) nach $(q_i, \dot{q}_i) = (q_i, \dot{q}_i)(\{q_j, p_j, t\})$ (Koordinaten und Geschwindigkeiten als Funktionen von Koordinaten, Impulsen und Zeit) aufgelöst wurde und (ii) $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)$ als Funktion der Koordinaten und Impulse ausgedrückt ist. Alles andere machte keinen Sinn, denn $H(\mathbf{q}, \mathbf{q}, t)$ ist ja eine Funktion von Koordinaten und Impulsen. Für den eigentlich interessanten Fall, in dem $\mathbf{q}(t)$ eine Lösungskurve des Problems (Lösung der Lagrange Gleichungen $\partial_{q_i}L = d_t\partial_{\dot{q}_i}L = \dot{p}_i$) ist, nehmen die Formel oben die Gestalt

Diese Gleichungen werden als die **Hamilton Gleichungen** des Systems bezeichnet: ein System von 2f gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Sie übernehmen die Rolle der Lagrange Gleichungen des Lagrange Formalismus.

Bsp.: Hamilton Gleichungen in kartesischen Koordinaten

Als ein Beispiel zum Aufwärmen betrachten wir den einfachen Fall eines in kartesischen Koordinaten formulierten Ein-Teilchen Problems mit der standard Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 - V(\mathbf{q}).$$

Der Impuls ist $\mathbf{p} = \partial_{\dot{\mathbf{q}}} L = m \dot{\mathbf{q}}$ woraus

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})) = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 - V(\mathbf{q})$$

und

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})) = \frac{1}{2m} \dot{\mathbf{p}}^2 + V(\mathbf{q}) \stackrel{\text{!!}}{=} E$$

folgt. (Bemerken Sie, daß die Hamiltonfunktion mit der Energiefunktion des Systems übereinstimmt, ein Sachverhalt, mit dem wir uns gleich noch beschäftigen werden.) Die Auswertung der Hamilton Gleichungen führt auf

$$\dot{\mathbf{p}} = -\partial_{\mathbf{q}}H = -\partial_{\mathbf{q}}V = \mathbf{F},$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial_{\mathbf{p}}H = \frac{\mathbf{p}}{m}.$$

Diesen Gleichungen sind wir bereits sehr früh in (1.9) als einer Möglichkeit, die Bewegungsgleichungen der Newton Mechanik zu formulieren, über den Weg gelaufen.

Eine unmittelbare Konsequenz der Hamilton Gleichungen ist

$$d_t H = \partial_t H.$$

Diese Identität besagt, daß eine Hamilton Funktion, die nicht *explizit* von der Zeit abhängt, im Laufe der Bewegung konstant bleibt, eine Erhaltungsgröße des Systems ist. Beweis:

$$d_t H = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \stackrel{(4.2)}{=}$$

$$\stackrel{(4.2)}{=} \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)}_{= 0} + \frac{\partial H}{\partial t} = \partial_t H.$$

Was ist die physikalische Bedeutung dieser Erhaltungsgröße? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir die zwischen L und H vermittelnde Identität (4.1) in kartesischen Koordinaten. Eine direkte Verallgemeinerung der oben für ein Teilchen durchgeführten Überlegung auf ein System von N-Teilchen führt auf

$$\mathbf{p}_j = m_j \dot{\mathbf{q}}_j, \qquad j = 1, \dots, N$$

und damit

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{m_j} \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_j - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j} \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_j + V(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j} \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_j + V(\mathbf{q}) = E,$$

wobei wir im ersten Gleichheitszeichen die in Koordinaten und Impulsen ausgedrückte Lagrangefunktion eingesetzt haben. Aus dem Prinzip der Koordinateninvarianz der Lagrange Mechanik folgt, daß diese Identität koordinatenungebunden ist und allgemeine Gültigkeit hat. Es ergibt sich:

Die Hamiltonfunktion eines nicht explizit zeitabhängigen Systems bleibt im Laufe der Bewegung konstant und nimmt den Wert der Gesamtenergie des Systems an.

4.1.2 Praktisches zum Übergang Lagrange \rightarrow Hamilton

Ein beim Ubergang von der Lagrange- zur Hamiltonformulierung zentral wichtiger Punkt ist, daß man beim Arbeiten mit den Funktionen L, H u.s.w. sehr genau auf die Argumentabhängigkeiten aufpassen muß. Es macht z.B. keinen Sinn, Gleichungen der Art $H = \ldots$ hinzuschreiben, wenn auf der rechten Seite die Variablen \dot{q}_i auftauchen: H ist eine Funktion von Koordinaten q_i und Impulsen p_i nicht aber von Geschwindigkeiten \dot{q}_i . Umgekehrt ist L eine Funktion von q_i und \dot{q}_i . Auch wenn in manchen Texten etwas lasch mit diesem Sachverhalt umgegangen wird und durchaus einmal Formeln der Art $L(q_i, p_i)$ auftauchen, sollte man sofort zu $L(q_i, p_i(\{q_j, \dot{q}_j\}))$ übersetzen. Man kann sich eine Menge Verwirrung ersparen, wenn man diesen Punkt immer gut im Auge behält.

Wir fassen den Ubergang $L \to H$ noch einmal in einer Konstruktionsvorschrift zusammen, wobei die Betonung auf den Argumentabhängigkeiten liegt:

- 1. Gehe von der in generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten formulierten Lagrangefunktion $L(\{q_i, \dot{q}_i\}, t)$ aus.
- 2. Bestimme die generalisierten Impulse gemäß

$$p_i = \partial_{\dot{q}_i} L(\{q_i, \dot{q}_i\}, t).$$

4.1. HAMILTON FUNKTION UND HAMILTON BEWEGUNGSGLEICHUNGEN135

Es ergeben sich f Funktionen $p_i(\{q_j, \dot{q}_j\}, t)$. (In der Regel ist die Lagrangefunktion quadratisch in den Variablen \dot{q}_i (vgl. die bereits behandelten Beispiele) \rightsquigarrow p_i ist linear in den \dot{q}_j , kann aber in nichttrivialer Weise von den q_j abhängen.)

3. Löse diese Gleichungen nach den \dot{q}_j auf:

$$p_i(\{q_j, \dot{q}_j\}, t) \rightsquigarrow \dot{q}_i(\{q_j, p_j\}, t).$$

4. Berechne die Hamiltonfunktion gemäß

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i(\{q_j, p_j\}, t) - L(q_i, \dot{q}_i(\{q_j, p_j\}, t), t).$$

Natürlich werden wir in der Regel der Fälle die Notation kompater halten. Falls aber einmal Verwirrung auftauchen sollten, ist es gut, sich dieses Schema noch einmal zu vergegenwärtigen.

Bsp.: Zentralkraftproblem via Hamilton Mechanik

Auf Seite 94 hatten wir die Lagrangefunktion eines zentralsymmetrischen Problems in Polarkoordinaten mit

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - U(r)$$

angegeben. Die sich hieraus ergebenden Impulse sind

$$p_r = \partial_{\dot{r}} L = m\dot{r},$$

$$p_{\theta} = \partial_{\dot{\theta}} L = mr^2 \dot{\theta},$$

$$p_{\phi} = \partial_{\dot{\phi}} L = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

Inversion dieser Identitäten führt auf

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}$$
$$\dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{mr^2}$$
$$\dot{\phi} = \frac{p_{\phi}}{mr^2 \sin^2 \theta}.$$

Damit ergibt sich die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_{\theta}^2}{2mr^2} + \frac{p_{\phi}^2}{2mr^2\sin^2\theta} + U(r).$$

Die Bewegungsgleichungen für den Impuls p_{ϕ} ist

$$\dot{p}_{\phi} = -\partial_{\phi}H = 0.$$

Der Impuls p_{ϕ} ist erhalten, eine Tatsache, die wir schon kannten, denn es handelt sich ja um die 3-Komponente des erhaltenen Drehimpulses (vgl. Seite 2.4). Die Hamilton Gleichungen für das Paar (θ, p_{θ}) lauten

$$\dot{\theta} = \partial_{p_{\theta}} H = \frac{p_{\theta}}{mr^2},$$

$$\dot{p}_{\theta} = -\partial_{\theta} H = \frac{p_{\phi}^2 \cos \theta}{mr^2 \sin^3 \theta}.$$

Wir wählen Anfangsbedingungen so, daß sich zur Zeit t = 0, die Bewegung in der Äquatorialebene des Systems abspielt, d.h. es ist $\theta(0) = \pi/2$ und $p_{\theta}(0) = 0$ (bitte veranschaulichen). Mit diesen Startbedingungen werden die Gleichungen oben für alle Zeiten durch $\theta(t) = \pi/2$ und $p_{\theta}(t) = 0$ gelöst: Die Bewegung verläßt die Äquatorialebene nicht, eine Wiederentdeckung der bereits früher allgemein gezeigten Tatsache, daß sich Zentralkraftbewegungen in erhaltenen Ebenen abspielen. Mit $\theta(t) = \pi/2, p_{\theta} = 0$ ergibt sich schließlich

$$\dot{r} = \partial_{p_r} H = \frac{p_r}{m},$$

 $\dot{p}_r = -\partial_r H = \frac{p_{\phi}^2}{mr^3} - \partial_r U$

Kombination dieser Gleichungen führt auf die bereits früher diskutierte Bewegungsgleichung im Zentralpotential

$$m\ddot{r} = -\partial_r \left(U + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} \right).$$

Info: Schließlich sei noch erwähnt, daß es sich beim oben diskutierten Übergang zwischen Lagrange- und Hamiltonfunktion um eine allgemeine mathematische Funktionentransformation handelt. Man bezeichnet Übergänge dieser Art als Legendre Transformationen. Wir illustrieren das Prinzip am Beispiel einer eindimensionalen Funktion f(x). Für eine solche Funktion bezeichnet man

$$g(y) = f(x(y)) - yx(y)$$

als ihre Legendretransformierte, wobei $y = d_x f(x)$ ist und x(y) bedeutet, daß die ursprüngliche Variable durch Inversion als Funktion von y auszufrücken ist. Die Motivation für die Einführung dieser Operation ist, daß sie einen Wechsel der unabhängigen Variablen $x \to y = d_x f$ ohne Informationsverlust ermöglicht. Daß bei der Legendretransformation keine Information verloren geht, sieht man daran, daß zweimalige Anwendung der Transformation (bis auf einen Vorzeichenwechsel im Argument) auf die Ausgangstransfunktion zurückführt. Mit

$$z = d_y g = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dy} - x(y) - y\frac{dx}{dy} = -x(y)$$

erhalten wir nämlich die Legendretransformation von g als

$$h(z) = g(y(z)) - y(z)z = f(-z) + y(z)z - y(z)z = f(-z).$$

Aufgabe: Probieren Sie diese Rücktransformation am Beispiel der Hamiltonfunktion aus und verifizieren Sie, daß sie zur Lagrangefunktion zurückgelangen.

Auf den ersten Blick sieht die Legendretransformation ungewohnt aus, aber man muß sich bewußt sein, daß sie die einfachste Möglichkeit darstellt, einen Wechsel $x \to d_x f = y$ der unabhängigen Variablen durchzuführen. Insbesondere reicht es hierzu nicht aus, einfach in $f(x) \to f(x(y))$ die invertierte Variable zu substituieren. Betrachten Sie z.B. die Funktion $f(x) = C \exp x, C = \text{const.}$. Es ist $y = d_x f = f(x)$. Die durch einfache Substitution erhaltene Funktion wäre also einfach f(x(y)) = y: Alle Information über die Konstante Cist verlorengegangen, Informationsverlust. Dagegen lautet die Legendretransformierte

$$g(y) = f(x(y)) - x(y)y = y - \ln(y/C)y,$$

enthält also die Konstante C noch. Die Rücktransformation führt auf $h(z) = C \exp(-z) = f(-z)$, wie oben allgemein gezeigt.

4.2 Formale Mechanik

In diesem Abschnitt werden wir die Hamilton Formulierung der Mechanik auf ihre formale Struktur hin untersuchen; anwendungsorientierte Aspekte treten in den Hintergrund.

Die Hamilton Theorie hat eine sehr schöne und reichhaltige innere Struktur. Einige ihrer Schlüsselelemente sollen in diesem Abschnitt erarbeitet werden. Die hierzu notwendigen gedanklichen und technischen Schritte sind vergleichsweise abstrakt. Andererseits werden wir in Hinblick auf die konkrete Lösung der bislang aufgetauchten Problemtypen nicht viel weiter kommen, als wir es ohnehin schon sind. Das legt die Frage nahe, warum man sich, abgesehen vielleicht von ästhetischen Gesichtspunkten, überhaupt mit dem unten entwickelten Apparat beschäftigen soll. Dies doch zu tun, ist durch zwei Gesichtspunkte motiviert:

Erstens wird uns die Untersuchung der Hamilton Formulierung zu einem vertieften Strukturverständnis der Mechanik bringen. Insbesondere werden geometrische Konzepte beginnen, eine Rolle zu spielen, wobei mit 'Geometrie' nicht die räumliche Geometrie eines gegebenen mechanischen Systems, sondern die Geometrie des zugrundeliegenden Phasenraums gemeint ist. Die 'moderne Mechanik', womit in erster Linie die Theorie nichtintegrabler dynamischer Systeme gemeint ist, baut ganz wesentlich auf solchen geometrischen Konzepten auf. Einige Ansätze dieser Methodik werden wir in einem späteren Kapitel behandeln. Zweitens liegt in der formalen Struktur der Hamilton Mechanik der Schlüssel zu einem Verständnis der Parallelen zwischen klassischer und Quantenmechanik. Wie oben bereits angedeutet, haben alle unten eingeführten klassischen Konzepte eine inhaltlich und methodisch sehr naheliegende quantenmechanische Entsprechung.

Sollte einmal Ernüchterung darüber auftauchen, daß das komplexeste der unten diskutierten Beispiele der harmonische Oszillator ist, ist es gut, sich sich diese Gesichtspunkte in Erinnerung zu rufen.

4.2.1 Struktur der Hamilton Gleichungen

Die oben abgeleiteten Hamilton Gleichungen sind im Phasenraum formuliert, d.h. es handelt sich um Differentialgleichungen für generalisierte Koordinaten und Impulse. Eines der wesentlichen Ergebnisse unserer Untersuchungen wird sein, daß, zumindest im Rahmen der Hamilton Mechanik, kein konzeptioneller Unterschied zwischen Impulsen und Koordinaten besteht. Um diese Entwicklung vorzubereiten, führen wir eine Notation ein, in der Impulse und Koordinaten gleichbehandelt sind. Wir gehen aus von dem bereits in Abschnitt 1.3.3 eingeführten 2f-komponentigen Vektor

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$$
.

Inhaltlich handelt es sich bei dem Vektor \mathbf{x} um einen (auf den Ursprung $\mathbf{q} = \mathbf{p} = 0$ bezogenen) Punkt im Phasenraum. Die für die Komponenten von \mathbf{x} formulierten Hamilton Gleichungen lauten

$$\dot{x}_i = \partial_{x_{i+f}} H, \qquad i = 1, \dots, f \dot{x}_i = -\partial_{x_{i-f}} H, \qquad i = f+1, \dots, 2f$$

Dies läßt sich in kompaktere Notation bringen, indem man eine $2f \times 2f$ -Matrix

$$I \equiv \begin{pmatrix} 0_f & 1_f \\ -1_f & 0_f \end{pmatrix}$$

definiert. (Wie üblich, ist 1_f die f-dimensionale Einheitsmatrix.) Damit ergibt sich:

$$\dot{x}_i = I_{ij}\partial_{x_i}H, \qquad i = 1, \dots, 2f, \tag{4.3}$$

(Summenkonvention!) bzw. in komponentenfreier Schreibweise

$$\dot{\mathbf{x}} = I\partial_{\mathbf{x}}H.$$

(Der Vektor $\partial_{\mathbf{x}} H$ ist durch $(\partial_{\mathbf{x}} H)_i = \partial_{x_i} H$ definiert.) Im folgenden werden wir der Matrix I ständig wiederbegegnen. Aus Gründen, die weiter unten klar werden werden bezeichnet man sie als die **symplektische Eins**. Anhand der neu eingeführten Schreibweise läßt sich die geometrische Bedeutung der Hamilton Gleichungen erkennen: Die Größe $I\partial_{\mathbf{x}}H$ ist ein Vektor im Phasenraum. Formaler: Über die Vorschrift

$$X_H : \mathbf{x} \to I \partial_{\mathbf{x}} H$$

wird jedem Punkt des Phasenraums ein Vektor zugeordnet (vgl. Fig. 4.2.) Das so erzeugte Vektorfeld X_H heißt **Hamilton'sches Vektorfeld**. Die Hamilton Gleichungen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_H(\mathbf{x})$ besagen, daß die Tangenten an die Lösungskurven mechanischer Systeme parallel zm Hamilton'schen Vektorfeld ausgerichtet sind. Man kann sich das veranschaulichen, indem man sich \mathbf{X}_H als das Strömungsfeld einer bewegten Flüssigkeit vorstellt. Zur Zeit t = 0 werde an einer Stelle $\mathbf{x}(0)$ etwas Farbstoff in die Flüssigkeit gegeben. Der entstehende 'Farbfaden' symbolisiert die Lösungskurve.

Info: Der Vollständigkeit halber soll erwähnt werden, daß unsere Behandlung des Phasenraums als Vektorraum die Darstellung der Theorie vereinfacht, inhaltlich jedoch nicht ganz korrekt ist: Die Koordinaten der Lagrangemechanik definierten eine f-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M. Für jeden Punkt $\mathbf{q} \in M$ ist die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}M$ ein Element des Tangentialraums an M am Punkt q, d.h. die Gesamtheit aller Koordinaten und Geschwindigkeiten (der fundamentale Satz von Variablen der Lagrangemechanik) spannt das auf Seite $\ref{eq:spannt}$ definierte Tangentialbündel TM auf. In der Theorie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten wird gezeigt, daß es sich bei TM selbst um eine 2f-dimensionale Mannigfaltigkeit handelt. Die Hamiltonmechanik geht aus der Lagrangemechanik durch wechsel der fundamentalen Variablen $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \rightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ hervor. In weiterführenden Darstellungen der Mechanik wird gezeigt, daß der natürliche Darstellungsraum der den Geschwindigkeiten zugeordneten Impulse der Cotangentialraum $T^*_{\mathbf{q}}M$, d.h. der dem Tangentialraum zugeordnete Dualraum ist. Der Phasenraum, d.h. die Menge aller Tupel (\mathbf{p}, \mathbf{p}) ist dementsprechend durch das in Analogie zum Tangentialbündel konstruierte Cotangentialbündel $TM^*M = \cup_{\mathbf{q}} T^*_{\mathbf{q}}M$ gegeben. Wie beim Tangentialbündel handelt es sich hierbei um eine 2f-dimensionale Mannigfaltigkeit, also ein Objekt, daß lokal zum \mathbb{R}^{2f} isomorph ist. Wenn wir im folgenden den Phasenraum wie einen Vektorraum behandeln, wird auf diesen Zusammenhang aufgebaut. Auch wenn wir in diesem Kurs die globale Struktur des Phasenraums als Mannigfaltigkeit nicht weiter betonen, sollte man jedoch im Hinterkopf behalten, daß seine Darstellung als Vektorraum nur lokal Gültigkeit besitzt.



Abbildung 4.2: Das Hamilton'sche Vektorfeld \mathbf{X}_H im Phasenraum Γ . Die Lösungskurven sind parallel zu \mathbf{X}_H ausgerichtet.

Ganz allgemein bezeichnet man für ein Vektorfeld $\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}(\mathbf{x})$ die einparametrige Schar von Abbildungen,

$$\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

$$(\mathbf{x},t) \mapsto \Phi(\mathbf{x},t)$$

mit den Eigenschaften $\Phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ und $\partial_t \Phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}(\Phi(\mathbf{x}, t))$ als den **Fluß** des Vektorfelds. Die durch Lösung der Hamilton Gleichungen zu allen Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(t=0) \equiv \mathbf{x}$ gewonnenen Menge von Lösungskurven definiert gemäß

$$\Phi(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{x}(t)$$

den Fluß von \mathbf{X}_{H} , den sogenannten Hamilton'schen Fluß.

Bsp.: Phasenfluß des harmonischen Oszillators



Abbildung 4.3: Hamilton'sches Vektorfeld des harmonischen Oszillators.

Mit $p = \partial_{\dot{q}}L = m\dot{q}$ ergibt sich die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators zu

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

Daraus resultiert das Hamilton'sche Vektorfeld (vgl. Fig. 4.3).

$$\mathbf{X}_{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{p}H \\ -\partial_{q}H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -m\omega^{2}q \end{pmatrix}.$$

Die tangential zu X_H liegenden Lösungskurven sind die in Fig. 1.24 dargestellten Ellipsen.

Die oben eingeführten Konzepte des Hamilton'schen Vektorfelds und seines Fluß sind ihrem Wesen nach geometrisch. Andererseits haben wir uns bis jetzt überhaupt noch keine Gedanken zur (geometrischen) Struktur des Phasenraums als Ganzes gemacht. Es ist hilfreich, sich an dieser Stelle noch einmal in Erinnerung zu rufen, wie die Hamilton Formulierung (und damit das Konzept des Phasenraums) eingeführt worden war: Ausgegangen waren wir von der in einem gewissen Satz von Koordinaten formulierten Lagrange Beschreibung. Daraus wurden über eine Legendretransformation die Hamilton'schen Formulierung, gleichfalls in einem spezifischen Satz von Koordinaten $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, abgeleitet. Das wesentliche Stichwort in diesen Sätzen ist 'Koordinaten'. In der Lagrange Mechanik hatten wir immer wieder betont, daß sich die eigentliche Bewegung eines Systems auf einer (unabhängig von Koordinatensystemen) existierenden Mannigfaltigkeit M abspielt. Zur Beschreibung von M wurden (u.U. nur lokal definierte Koordinatensysteme) verwendet. Über ein vorgegebenens System diesen Typs wurde dann der Übergang zur Hamilton Mechanik durchgeführt. Tatsächlich handelt es sich bei den Größen (\mathbf{q}, \mathbf{p}) gleichfalls nur um lokale Koordinaten und zwar um Koordinaten für den Phasenraum Γ als 'Ganzes'. Ähnlich wie die Konfigurationsmannigfaltigkeit M der Lagrangemechanik kann auch der Phasenraum in einer koordinatenunabhängigen Weise definiert werden. Allerdings bräuchte es dazu, anders als in der Lagrange Mechanik, wesentlich weitergehender mathematischer Grundlagen, als wir sie hier haben.

Wir erwähnen daher nur, daß der Phasenraum Γ die Struktur einer 2f-dimensionalen Mannigfaltigkeit hat. Lokal ist Γ isomorph zu einer Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^{2f}$ und kann durch einen Satz von Koordinaten \mathbf{x} beschrieben werden. Wir werden in dieser Vorlesung in der Regel die Koordinatenbeschreibung verwenden. Um die Notation nicht zu sehr aufzublähen, verzichten wir im folenden darauf, die Koordinatenmannigfaltigkeit $V \subset \mathcal{R}^{2f}$ und den Phasenraum Γ explizit zu unterscheiden. Man muß dabei jedoch in Erinnerung behalten, daß der Phasenraum als Ganzes durchaus nicht die Struktur eines Vektorraums haben muß, und es sich bei $\Gamma \simeq V$ nur um eine lokale Identifikation handelt. Einige allgemeine und koordiantenunabhängige Eigenschaften der 2f-dimensionalen Mannigfaltigkeit Γ werden wir weiter unten ausarbeiten. Jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Gamma$ ist ein Tangentialvektorraum $T\Gamma(\mathbf{x})$ zugeordnet. Per Konstruktion liegen die zeitlichen Ableitungen $\dot{\mathbf{x}}(t)|_{t=0} \in T\Gamma(\mathbf{x})$ in diesem Tangentialraum. (Erinnern Sie sich daran, wie wir auf Seite 61 den Tangentialvektorraum einer Mannigfaltigkeit M über die Tangentialvektoren von Kurven $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eingeführt hatten. In unserer momentanen, koordinatengestützten Formulierung bräuchten wir eigentlich nicht zwischen Γ und seinem Tangentialraum unterscheiden. Die Motivation dazu, dies doch zu tun, liegt darin, daß das Auseinanderhalten von Γ und dem zugeordneten Tangentialraum $T\Gamma$ das konzeptionelle Verständnis der Hamiltonmechanik unterstützt.)

Wenn wir von jetzt ab also von Phasenraum*vektoren* bzw. Vektorfeldern sprechen, so sind damit Größen aus dem Tangentialbündel $T\Gamma$ gemeint. Bisher eingeführte Beispiele sind die Tangentialvektoren $\dot{\mathbf{x}}$ oder das Hamilton'sche Vektorfeld \mathbf{X}_H . Dagegen werden Elemente $\mathbf{x} \in \Gamma$ des Phasenraums selbst als Punkte bezeichnet. (Da Γ selbst ein Vektorraum ist, ist jeder Punkt über seinen Komponentenvektor $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ identifiziert. Nachdem was oben gesagt wurde, sollte hieraus aber keine Verwirrung entstehen.)

4.2.2 Symplektische Struktur des Phasenraums

Die oben eingeführte symplektische Eins spielt der Hamilton Mechanik eine zentrale Rolle. Ihre Bedeutung für die Entwicklung der Theorie wird sich in den kommenden Abschnitten schrittweise erarbeiten. Hier soll zunächst gezeigt werden, daß über die symplektische Eins dem Phasenraum eine starke geometrische Struktur aufgeprägt ist. Wir beginnen mit folgender

Def.: Es sei M eine 2f-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine **symplektische Struk**tur ist eine nichtentartete schiefsymmetrische Bilinearform ω^2 auf dem Tangentialbündel TM, d.h. eine Abbildung

$$\begin{aligned} \omega^2 : TM_x \times TM_x &\to & \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto & \omega^2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

- $\triangleright \forall \mathbf{v} \in TM_x : \omega^2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \Rightarrow \mathbf{w} = 0$ (Nichtentartung),
- $\triangleright \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in TM_x : \omega^2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\omega^2(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (Schiefsymmetrie).

Über die oben eingeführte Matrix I ist dem Phasenraum eine solche symplektische Struktur aufgeprägt. Denn mit der Definition

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T\Gamma_{\mathbf{x}} : \omega^2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \mathbf{v}^T I \mathbf{w} = v_i I_{ij} w_j,$$

ist eine schiefsymmetrische und nichtentartete (bitte nachprüfen) Bilinearform erklärt.

Kritischen Lesern wird auffallen, daß wir die Matrix I und damit die Form ω^2 in einem spezifischen Satz von Koordinaten (q_i, p_i) definiert haben. Damit sieht es zunächst so aus, als sei die symplektische Struktur nicht *kanonisch*, d.h. nicht basisunabhängig erklärt; Eine solche Definition wäre in Hinblick auf Strukturüberlegungen weitgehend wertlos. Tatsächlich jedoch, kann die Bilinearform ω^2 in koordinatenunabhängiger und damit kanonischer Weise eingeführt werden. Dazu müßte man jedoch wesentlich tiefer in die Differentialgeometrie des Phasenraums – die relevanten Stichwörter sind Kotangentialbündel und Kalkül äußerer Differentialformen – einsteigen als wir es uns hier leisten können. Wir erwähnen daher nur, daß die koordinatenfreie Definition von ω^2 sich in jeder Darstellung über generalisierte Koordinaten und Impulse auf die oben angegebene Form reduziert.

Über die Bilinearform ω^2 wird der Phasenraum zu einem Vektorraum mit Skalarprodukt. Man könnte sich fragen, warum wir dieses Skalarprodukt betrachten, wo es doch auch das 'einfachere' $\mathbf{x}'^T \mathbf{x} = x'_i x_i$ gibt. Obwohl man den Phasenraum formal über dieses Skalarprodukt zu einem euklidischen Raum machen kann, ist damit nichts gewonnen. Unter den weiter unten betrachteten physikalisch motivierten Transformationen ist das 'gewöhnliche' Skalarprodukt nicht invariant und wird damit weitgehend wertlos. Merke: Der Phasenraum ist *kein* euklidischer Raum. Anders das (positiv indefinite) Skalarprodukt ω^2 . Unter 'kanonischen' Koordinatentransformationen bleibt ω^2 invariant und hat damit hervorgehobene Bedeutung.

Grundsätzlich spielen für einen Vektorraum mit Skalarprodukt diejenigen Transformationen, die das Skalarprodukt invariant lassen, eine besondere Rolle. Konkret fragen wir, welche linearen Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} M: T\Gamma_{\mathbf{x}} & \to & T\Gamma_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{v} & \to & M\mathbf{v} \end{array}$$

4.2. FORMALE MECHANIK

das Skalarprodukt ω^2 invariant lassen, also die Relation

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T\Gamma_{\mathbf{x}} : \omega^2(M\mathbf{v}, M\mathbf{w}) = \omega^2(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

erfüllen. Aus der Definition von ω^2 folgt, daß dies zu der Forderung

$$M^T I M = I$$

äquivalent ist. Die Menge aller Matrizen mit dieser Eigenschaft bildet eine Unter*gruppe* der allgemeinen linearen Gruppe $GL(2f)^3$. Man bezeichnet sie als die **symplektische Gruppe**, Sp(2f).

Aufgabe: Beweisen Sie: (i) Die Elemente $M \in \text{Sp}(2f)$ sind invertierbar. (ii) Sp(2f) ist eine Gruppe. (iii) $\forall M \in \text{Sp}(2f) : (\det M)^2 = 1$. (iv) $M \in \text{Sp}(2f) \Rightarrow M^T \in \text{Sp}(2f)$.

Info: Am Rande erwähnen wir, daß für geradzahlig dimensionale Vektorräume die symplektische Gruppe Sp(2n) neben der orthogonalen Gruppe O(2f) (also der Matrizengruppe, die das gewöhnliche Skalarprodukt invariant läßt,) die wichtigste Matrizen-Untergruppe von GL(2n) ist. In verschiedensten physikalischen und mathematischen Anwendungen kommt ihr zentrale Bedeutung zu.

Aus $I^2 = -1_{2f}$ (bitte nachrechnen) und $I^T = -I$ folgt $I^T II = I$, d.h. $I \in \text{Sp}(2f)$. In gewisser Weise spielt die Matrix I dieselbe Rolle, die die gewöhnliche Einheitsmatrix für die orthogonale Gruppe hat. Daraus erklärt sich der Name 'symplektische Eins'. Der 'Lohn' für die hier geleisteten Vorarbeiten wird sein, daß eine Reihe unten erarbeiteter Zusammenhänge, die sich ansonsten nur durch längliche indexbehaftete Formeln ausdrücken lassen würden, in eine koordinatenfreie 'gut merkbare' Form gebracht werden können. Ein erstes Beispiel eines wird im folgenden Abschnitt auftauchen.

4.2.3 Poisson Klammern

Als ein weiteres Element der Hamilton Mechanik führen wir den Begriff der Poisson Klammern ein: Wir betrachten eine beliebige Funktion

$$\begin{array}{rccc} g: \Gamma \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ (\mathbf{x}, t) & \to & g(\mathbf{x}, t) \end{array}$$

über dem Phasenraum, wobei eine explizite Zeitabhängigkeit zugelassen sei. Was ist die zeitliche Evolution der Größe $g(\mathbf{x}(t), t)$ entlang einer Phasenraumtrajektorie $\mathbf{x}(t)$? Die Antwort ist

$$d_t g = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \partial_t g =$$

³Wir erinnern daran, daß GL(2f) die Gruppe aller invertierbarer $2f \times 2f$ -Matrizen ist.

$$=\sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \partial_t g \equiv$$
$$\equiv \{H, g\} + \partial_t g,$$

wobei wir die für beliebige Phasenraumfunktionen $f, g : \Gamma \to \mathbb{R}$ erklärte **Poisson**klammer als

$$\{f,g\} \equiv \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$
(4.4)

eingeführt haben.

Die zeitliche Evolution einer Funktion $g: \Gamma \times \mathcal{R} \to \mathbb{R}, (\mathbf{x}, t) \mapsto g(\mathbf{x}, t)$ entlang einer Phasenraumtrajektorie $\mathbf{x}(t)$, ist durch

$$d_t g = \{H, g\} + \partial_t g$$

gegeben.

Info: Mittels der oben eingeführten Form ω^2 kann die Poissonklammer auch in koordinatenfreier Weise eingeführt werden. Ausgangspunkt hierfür ist die Tatsache, daß mittels der Form ω^2 jeder auf dem Phasenraum erklärten Funktion $g: \Gamma \to \mathbb{R}$ in eindeutiger Weise ein Phasenraumvektorfeld X_g zugeordnet werden kann. Die Konstruktionsvorschrift ist wie folgt: Wir gehen aus vom Differential dg, das, wie oben allgemein diskutiert eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} dg_{\mathbf{x}}:T\Gamma_{\mathbf{x}} & \to & \mathbb{R} \\ \mathbf{v} & \mapsto & dg_{\mathbf{x}}\mathbf{v} \end{array}$$

darstellt. Wir definieren nun ein Vektorfeld X_g durch die Forderung:

$$\forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{v} \in T\Gamma_{\mathbf{x}} : dg_{\mathbf{x}}\mathbf{v} \stackrel{!}{=} \omega^2(\mathbf{X}_q(\mathbf{x}), \mathbf{v}).$$

Daß dies wirklich eine vernünftige Definition darstellt, liegt daran, daß ω^2 nichtentartet ist (bitte überlegen.).

Aufgabe: Verwenden Sie die allgemeine Definition des Differentials und die Matrixdarstellung von ω^2 , um zu zeigen, daß X_g die Komponentendarstellung

$$X_{g} = \begin{pmatrix} \partial_{p_{1}g} \\ \vdots \\ \partial_{p_{f}g} \\ -\partial_{q_{1}g} \\ \vdots \\ -\partial_{q_{f}}g \end{pmatrix}$$

hat.

144
Ein Beispiel dieser Konstruktion hatten wir oben bereits kennengelernt: \mathbf{X}_H ist das der Hamiltonfunktion kanonisch zugeordnete Vektorfeld. Für zwei vorgegebene Funktionen f, gkönnen wir also (für jeden Punkt \mathbf{x}) zwei Vektoren $\mathbf{X}_f(\mathbf{x}), \mathbf{X}_g(\mathbf{x})$ und daraus wiederum die Zahl $\omega^2(\mathbf{X}_f(\mathbf{x}), \mathbf{X}_g(\mathbf{x}))$ produzieren. Die oben angekündigte Alternativdefinition der Poissonklammer lautet:

$$f,g:\Gamma \to \mathbb{R}: \{f,g\} \equiv \omega^2(X_q, X_f),$$

(wobei für zwei beliebige Vektorfelder X, Y die Funktion $\omega^2(X, Y)$ in naheliegender Weise durch $\omega^2(X, Y)(\mathbf{x}) \equiv \omega^2(\mathbf{X}(\mathbf{x}), \mathbf{Y}(\mathbf{x}))$ definiert ist.)

Aufgabe: Zeigen Sie, daß diese Definition mit der oben gegebenen übereinstimmt.

Mit dieser Definition können wir den oben erwähnten Zusammenhang zwischen der Hamiltonfunktion H und dem Hamilton'schen Vektorfeld noch einmal unabhängig und koordinatenfrei nachrechnen. Zunächst ist $\dot{x}_i = \{H, x_i\}$, wobei x_i auf der rechten Seite die Bedeutung einer gewöhnlichen Phasenraumfunktion (der *i*-ten Koordinatenfunktion nämlich) hat. Es folgt

$$\dot{x}_i = \{H, x_i\} = \omega^2(X_{x_i}, X_H) = dx_i \mathbf{X}_H = (X_H)_i,$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen die allgemeine Identität (vgl. Seite 130) $dx_i \mathbf{v} = v_i$ verwendet haben.

Bevor wir auf die Frage eingehen, wozu die Poissonklammern gut sind, stellen wir ihre wesentlichsten Eigenschaften zusammen. Für beliebige Funktionen $f, g, h : \Gamma \to \mathbb{R}$ und Konstante $c, d \in \mathbb{R}$ ist

 $\triangleright \{f, g\} = -\{g, f\}$ (Antisymmetrie).

$$\triangleright \{cf + dg, h\} = c\{f, h\} + d\{g, h\} \text{ (Linearität)}.$$

$$\triangleright \{c, f\} = 0.$$

$$\triangleright \{fg,h\} = f\{g,h\} + \{g,h\}f ('Produktregel').$$

▷
$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$
 (Jacobi Identität).

Die ersten drei Eigenschaften sind unmittelbare Konsequenzen der Definition, die vierte folgt aus der Produktregel. Für die sogenannte Jakobi Identität scheint es keinen knappen Beweis zu geben. Man kann über algebraische Eigenschaften der Ableitung argumentieren[5] (wobei der gedankliche Aufwand recht hoch ist) oder die Identität mittels der Definition der Poissonklammer direkt nachrechenen. Letzteres läuft auf eine längliche Rechnung hinaus. Da sie weder interessant noch schwierig ist, wollen wir sie hier nicht reproduzieren.

Für eine (nicht explizit zeitabhängige) Erhaltungsgröße f ist $\{H, f\} = 0$. Eine interessante Konsequenz ist, daß für *zwei* gegebene Erhaltungsgrößen f und g auch $\{f, g\}$ erhalten ist:

$$d_t\{f,g\} = \{H, \{f,g\}\} \stackrel{\text{Jacobi}}{=} -\{f, \{g,H\}\} - \{g, \{H,f\}\} = 0.$$

Man darf daraus jedoch nicht den Schluß ziehen, daß sich aus einem Paar von Erhaltungsgrößen durch iterative Bildung von Poissonklammern eine ganze Sequenz weiterer erhaltener Größen generieren ließe (zu schön um wahr zu sein). In der Regel der Fälle wird die Poissonklammer erhaltener Größen verschwinden. Die resultierende Null ist zwar auch erhalten, doch ist mit diesem Ergebnis wenig gewonnen.

Die Poissonklammern nehmen eine besonders einfache Form an, wenn man sie auf den Koordinatenfunktionen selbst auswertet. Als direkte Konsequenz ihrer Definition ergibt sich:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$
 (4.5)

Eine leicht merkbare Kompaktschfassung dieser Gleichungen ist

$$\{x_i, x_j\} = -I_{ij}.$$

Schließlich geben wir noch eine weitere für das praktische Rechnen mit Poissonklammern nützliche Darstellung an: Mit $\partial_{\mathbf{x}} f = (\partial_{q_1} f, \dots, \partial_{p_f} f)$ ist

$$\{f,g\} = -\partial_{\mathbf{x}} f^T I \partial_{\mathbf{x}} g.$$

Auf die inhaltliche Rolle der Poissonklammern werden wir im folgenden Abschnitt zurückkommen.

4.2.4 Variationsprinzip

Für die konzeptionelle Entwicklung der Lagrange Mechanik hatte sich die Existenz eines Variationsprinzips als nützlich erwiesen. Gleiches gilt für die Hamilton Mechanik. Da Lagrange- und Hamiltonfunktion miteinander über eine Legendretransformation in Beziehung stehen, liegt es nahe zu vermuten, daß das für die Hamilton Mechanik relevante Wirkungsfunktional aus dem der Lagrange Mechanik gleichfalls durch Legendretransformation zu erhalten ist.

Wir gehen vom in Kapitel 2 definierten Wirkungsfunktional aus und unterziehen es einer Legendretransformation:

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\right) \equiv S[\mathbf{x}].$$

Auf der rechten Seite fungieren die Größen (q_i, p_i) als unabhängige Variable, d.h. das Funktional $S[\mathbf{x}]$ bildet Phasenraumkurven $t \mapsto (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{x}$ in die rellen Zahlen ab. Größen wie $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\{q_j, p_j, t\})$ sind nachgeordnete Größen, die wie oben allgemein erläutert, über Koordinaten und Impulse auszudrücken sind. Die Randbedingungen, unter denen das Funktional zu nehmen ist, lauten nach wie vor, $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \mathbf{q}(t_1) =$ \mathbf{q}_1 , wobei \mathbf{q}_0 und \mathbf{q}_1 fest vorgegeben sind. M.a.W. das Funktional rechts entspricht einem Variationsprinzip, bei dem über Phasenraumkurven $\gamma : t \mapsto (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ mit festgehaltener Anfangs- und Endkoordinate variiert wird.

4.2. FORMALE MECHANIK

Wie in der Lagrange Mechanik suchen wir nach Kurven $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ für die das Funktional bei infinitesimaler Variation $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t) \rightarrow (\mathbf{q}(t) + \delta \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t) + \delta \mathbf{p}(t))$ invariant bleibt. Um die Notation kompakt zu halten, führen wir die Rechnung für den Fall eines Freiheitsgrades, f = 1, durch. Der allgemeine Fall rechnet sich vollständig analog. Da p und q unabhängige Variable sind, können sie auch unabhängig variiert werden. Variation nach δp führt auf:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\dot{q} \delta p + p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \delta p - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) =$$

=
$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left(\dot{q} \delta p - d_t (p \delta p) \frac{\partial q}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p + p \delta p \frac{\partial q}{\partial p} \Big|_{t_0}^{t_1} =$$

=
$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p \stackrel{!}{=} 0.$$

(Im zweiten Gleichheitszeichen haben wir partiell nach der Zeit integriert und verwendet, daß $\partial_p q = 0$.) Da diese Identität für beliebiges δp gelten muß, folgt $\dot{q} = \partial_p H$, die erste der Hamilton Gleichungen. Die Variation nach δq läuft völlig analog. Das Ergebnis einer Rechnung, die wir nicht explizit aufführen wollen, ist der zweite Satz Hamilton Gleichungen.

Aufgabe: Führen Sie die Variation nach δq explizit aus und generalisieren Sie die Beweisführung oben auf den Fall von f > 1 Freiheitsgraden.

Als Ergebnis dieses Abschnitts halten wir fest:

Das auf der Menge aller Phasenraumkurven $t \mapsto \mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ definierte Funktional

$$S[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right)$$

wird auf den Lösungen der Hamilton Gleichungen extremal.

4.2.5 Kanonische Transformationen I: Definition

In der Formulierung und Anwendung der Lagrange Mechanik spielten Wechsel zwischen verschiedenen Systemen generalisierter Koordinaten eine zentrale Rolle. Gleiches gilt für die Hamilton Mechanik. Tatsächlich ist in der Hamilton Mechanik die Flexibilität der Koordinatenwahl noch erheblich größer als in der Lagrange Mechanik. Während in letzterer der allgemeinst mögliche Koordinatenwechsel die Form einer Abbildung $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}'(\mathbf{q}, t)$ hatte, können in der Hamilton Mechanik Koordinaten und Impulse unabhängig voneinander transformiert werden: $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto$ $(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t))^4$. (Die Notation deutet an, daß die Transformation explizit zeitabhängig sein kann.) In dieser zusätzlich gewonnenen Freiheit liegt einer der größten Vorteile der Hamilton Formulierung. Eine gewisse Einschränkung besteht jedoch darin, daß in der Hamilton Mechanik nicht jede grundsätzlich mögliche Abbildung $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ auch physikalisch sinnvoll ist. 'Sinnvoll' heißt hier, daß sich unter der Transformation die grundsätzliche Struktur der Hamilton Gleichungen nicht ändern darf. Die Unterklasse von Koordinatenwechseln für die das der Fall ist, heißt 'kanonisch'.

Def. (vorläufig): Eine (i.A. zeitabhängige) Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \phi_t : \Gamma & \to & \Gamma, \\ \mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) & \mapsto & \phi_t(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \equiv (\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)), \\ H(\mathbf{x}, t) & \mapsto & H'(\mathbf{X}, t) \end{array}$$

ist eine **kanonische Transformation**, wenn die in neuen Variablen ausgedrückten Bewegungsgleichungen die Standardform

$$\dot{Q}_i = \partial_{P_i} H',$$

 $\dot{P}_i = -\partial_{Q_i} H',$

bzw. in Kurzform

$$\dot{\mathbf{X}} = I\partial_{\mathbf{X}}H'$$

haben. Man muß hierbei beachten, daß die neue Hamiltonfunktion H' i.A. *nicht* durch $H'(\mathbf{X}) = H(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ gegeben sein wird. Sie kann in durchaus komplizierterer Weise mit der alten Hamiltonfunktion verknüpft sein. Einzig entscheidend ist, daß die kanonischen Gleichungen ihre Form behalten.

Bsp.: Austausch von Koordinaten und Impulsen

Ein einfaches Beispiel, an dem man sehen kann, daß in der Hamilton Mechanik viel mehr Raum für Koordinatenwechsel als in der Lagrangemechanik besteht, ist durch folgende Transformation gegeben:

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{p}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{q}, \qquad H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), t).$$

Diese Transformation ist kanonisch, denn es gilt

$$\partial_{Q_i} H' = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial Q_i} = -\dot{q}_i = -\dot{P}_i,$$

$$\partial_{P_i} H' = \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_i} = -\dot{p}_i = \dot{Q}_i.$$

Andererseits macht diese Transformation etwas Seltsames: Sie tauscht Koordinaten und Impulse einfach aus. Man sieht hieran, daß die Zuordnung (Koordinaten \leftrightarrow Orte im Raum, Impulse \leftrightarrow Ortsänderungen) in der Hamilton Mechanik ihre Bedeutung

 $^{^4 \}rm Wir$ folgen einer in der Literatur allgemein üblichen Konvention und bezeichnen die neuen Variablen mit Großbuchstaben.

4.2. FORMALE MECHANIK

vollständig verliert. Verallgemeinerte Koordinaten und Impulse sind vielmehr gleichberechtigte Elemente der Beschreibung eines mechanischen Systems. Ihr Bezug zu anschaulich faßbaren Größen ist weitgehend variabel. Einzig wichtig ist, daß diese Größen durch die kanonischen Relationen (4.5) miteinander in Bezug stehen. Aus diesem Grunde gibt man manchmal die Bezeichnung 'Koordinaten' und 'Impulse' völlig auf und bezeichnet die q_i und p_i einfach als zueinander kanonisch konjugierte Größen.

Das oben formulierte Kriterium legt fest, unter welchen Bedingungen eine Koordinatentransformation kanonisch ist, ist jedoch für praktische Zwecke nur sehr begrenzt nutzbar: (i) ist es indirekt über die Bewegungsgleichungen formuliert (anstelle direkt eine Bedingung für die Transformation $\mathbf{x} \to \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ anzugeben) und (ii) wissen wir noch nicht, wie kanonische Transformationen systematisch konstruiert werden können.

Diese Lücken sollen jetzt geschlossen werden. Die hierzu nötige mathematische Aufwand ist nicht sonderlich hoch. *Gedanklich* jedoch, sind einige ziemlich anspruchsvolle Schritte durchzuführen. Fast alle bislang entwickelten Konzepte sind involviert. Es ist sicher eine gute Idee, ausreichend Zeit in das Verständnis der gleich folgenden Argumente gut zu inverstieren!



Abbildung 4.4: Zum inhaltlichen Bezug zwischen kanonischen Transformationen und Variationsprinzip.

Der Weg zu einer direkten Beschreibung kanonischer Transformationen führt über das Variationsprinzip. Wir nehmen an, wir hätten eine Transformation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, $H(\mathbf{x}, t) \mapsto H'(\mathbf{X}, t)$ gefunden, so daß in alten und neuen Koordinaten die kanonischen Gleichungen gälten. Die Gültigkeit der kanonischen Gleichungen in alten Koordinaten bedeutet, daß das (gleichfalls in alten Koordinaten formulierte) Wirkungsfunktional $S[\mathbf{x}]$ auf den Lösungskurven der Hamilton Gleichungen extremal wird (vgl. Fig. 4.4). Aus der Kanonizität der Transformation folgt, daß die Darstellung derselben Lösungskurven (Erinnern Sie sich daran, daß Lösungskurven ein geometrisches, koordinatenunabhängiges Objekt sind.) in neuen Koordinaten zu Lösungen der transformierten Hamilton Gleichungen führt. Dies wiederum beinhaltet, daß das in neuen Koordinaten ausgedrückte Funktional

$$S'[\mathbf{X}] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i - H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right)$$
(4.6)

gleichfalls auf den Lösungskurven extremal wird. Da dies unabhängig von den Anfangsbedingungen und dem gewählten Zeitintervall $[t_0, t_1]$ gilt, müssen die in neuen bzw. alten Koordinaten dargestellten Funktionale (bis auf eine die Variation nicht berührende Konstante) identisch sein:

$$S[\mathbf{x}] = S'[\mathbf{X}] + \text{const.}$$

$$(4.7)$$

Diese Gleichung beinhaltet ihrerseits eine direkte Relation zwischen den die Funktionale definierenden Integranden: Die maximale mit der Relation (4.7) verträgliche Abweichung zwischen den Integranden ist durch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{p}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + d_t M,$$
(4.8)

beschrieben, wobei die unter der totalen Zeitableitung auftauchende Funktion M, im Prinzip, von alten *und* neuen Koordinaten sowie von der Zeit abhängen kann, $M = M(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$. Integrieren dieser Relation über die Zeit liefert

$$S[\mathbf{x}] = S'[\mathbf{X}] + \int_{t_0}^{t_1} dt d_t M = S'[\mathbf{X}] + M(t_1) - M(t_0)$$

Sofern M so gewählt ist, daß auf der durch $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ definierten Kurvenklasse⁵ die Differenz $M(t_1) - M(t_0) = \text{const.}$ eine die Variation nicht berührende Konstante ist folgt (4.6), und die Addition der totalen Zeitableitung $d_t M$ zum Integranden war zulässig. Tatsächlich wird sich aus dieser Freiheit eine Methode zur systematischen 'Erzeugung' kanonischer Transformationen ergeben.

Aufgabe: Überlegen Sie sich, warum aus (4.6) die Gleichung (4.8) folgt, d.h. warum keine allgemeineren Beziehungen zwischen den Integranden möglich sind. Hinweis: Verwenden Sie, daß (4.7) für beliebige Zeitintervalle $[t_0, t_1]$ Gültigkeit haben muß.

Gl. (4.8) stellt eine Beziehung zwischen den vier Koordinatenpaaren $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ her. Gleichungen dieser Art weden im folgenden des öfteren auftauchen, und man muß sich sehr genau klarmachen, wie sie zu lesen sind: Von den vier Koordinatensätzen sind vermöge der Relation

$$\mathbf{X} = \phi_t(\mathbf{x})$$

nur zwei unabhängig. Eine Gleichung der Art $F(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) = 0$ kann daher als $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ gelesen werden. Nun besteht aber ein großer Spielraum

⁵Beachten Sie, daß sich aus $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}(t_0), t_0)$ ergibt. Da im allgemeinen $\mathbf{p}(t_0)$ nicht für alle Kurven identisch sein wird, gilt also *nicht* $\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{Q}_0$, $\mathbf{Q}(t_1) = \mathbf{Q}_1$ mit konstanten $\mathbf{Q}_{0,1}$. Mehr dazu unten.

4.2. FORMALE MECHANIK

darin, welche zwei der insgesamt vier Sätze als unabhängig gewählt werden, eine Freiheit, die im folgenden eine Große Rolle spielen wird. Wir können z.B. die Relation zwischen \mathbf{x} und \mathbf{X} gemäß $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ und $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ eindeutig auflösen und fortan \mathbf{q} und \mathbf{Q} als unabhängige Variable in den zwischen alten und neuen Koordinaten vermittelnden Gleichungen verwenden. Dies führte auf $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{Q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t))$ als völlig gleichwertigen Ersatz für die oben angegebene Relation.

Ein weiterer Punkt, der uns die Formulierung der gleich folgenden Schritte erleichtern wird, ist daß (4.8) als eine Gleichung für die vollständigen Differentiale der beteiligten Funktionen umgeschrieben werden kann:

$$\sum_{i=1}^{f} p_i dq_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) dt = \sum_{i=1}^{f} P_i dQ_i - H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) dt + dM.$$
(4.9)

Man kann sich diese Relation leicht heuristisch 'herleiten': Ausgehend von (4.8) schreiben wir alle Zeitableitungen \dot{F} als dF/dt, und alle nichtdifferenzierten Funktionen als $G = G \cdot dt/dt$. 'Durchmultiplikation' mit dem im Nenner stehenden 'dt' führt auf (4.9).

Info: Der ordentliche Beweis von (4.9) geht wie folgt. Wir betrachten eine Gleichung der Art $\sum_l f_l \dot{g}_l = 0$, wobei die Zeitableitung entlang einer beliebigen Phasenraumtrajektorie genommen ist. (Gleichung (4.8) ist von diesem Typ, bitte überlegen.) Ferner betrachten wir die Paare (\mathbf{x}, t) als Elemente als eines um die Zeit erweiterten f + 1-dimensionalen Raums $\tilde{\Gamma}$. In diesem Raum führen wir ein f + 1 komponentiges System von Koordinaten (y_1, \ldots, y_{f+1}) ein. (Man könnte z.B. das System $(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$ aber auch ein ganz anderes verwenden.) Dann gilt:

$$0 = \sum_{l} f_l \dot{g}_l = \sum_{l} f_l \sum_{i=1}^{f+1} \frac{\partial g_l}{\partial y_i} \dot{y}_i = \sum_{l} f_l dg_l(\dot{y}),$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition und Koordinatendarstellung des Differentials (vgl. Seite 130f) verwendet haben. Da der Vektor \dot{y} durch Änderung der der betrachteten Phasenraumtrajektorie zugrundeliegenden Randbedingungen beliebig geändert werden kann, folgt

$$\sum_{l} f_l dg_l = 0$$

als Gleichung für das Differential.

4.2.6 Kanonische Transformationen II: Erzeugende

Aufbauend auf Gleichung (4.9) können wir nun explizite Ausdrücke für die Umrechnung ziwschen den Koordinatensätzen ableiten. Die Struktur dieser Formeln wird wesentlich davon abhängen, welche zwei der vier Koordinatensätze als unabhängige Variable gewählt sind.

Variable q und Q unabhängig

Wir nehmen zunächst an, **q** und **Q** seien als unabhängige Variable gewählt. Aus Gründen, die gleich klar werden, geben wir der so definierten Funktion M einen eigenen Namen und setzen $M_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \equiv M(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{Q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)t)$. Mit

$$dM_1 = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial M_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial M_1}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial M_1}{\partial t} dt$$

ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{J} \left[(p_i - \partial_{q_i} M_1) dq_i + (-P_i - \partial_{Q_i} M_1) dQ_i \right] + (H - H' - \partial_t M_1) dt = 0.$$

Diese Gleichung kann nur dann identisch erfüllt sein, wenn die die Differentiale multiplizierenden Koeffizientenfunktionen verschwinden:

$$p_i = \partial_{q_i} M_1, \qquad P_i = -\partial_{Q_i} M_1, \qquad H = H' - \partial_t M_1.$$

Die ersten beiden Ausdrücke liefern eine Vorschrift, die, für gegebenes M_1 , eine explizite Umrechnung zwischen alten und neuen Koordinaten ermöglicht. Wir gehen von dem ersten Satz von Gleichungen aus und lösen nach \mathbf{Q} auf⁶:

$$p_i(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \partial_{q_i} M_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \rightsquigarrow Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

In die zweite Gleichung eingesetzt ergibt sich damit

$$P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) = -\partial_{Q_i} M_1 |_{\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}$$

Da der Ausgangspunkt für diese Konstruktion die nach Koordinaten differenzierte Funktion M_1 ist, nennt man M_1 auch **Erzeugende** der kanonischen Transformation. Eine direkte, zwischen alten und neuen Variablen vermittelnde Relation ergibt sich durch zweimalige Differentiation der Erzeugenden:

$$\partial_{Q_i} p_j = \partial_{Q_i} \partial_{q_j} M_1 = \partial_{q_j} \partial_{Q_i} M_1 = -\partial_{q_j} P_i$$

Beachten Sie, daß diese Gleichung für eine kanonischen Transformation zwingend erfüllt sein muß, also einen Test (nicht hinreichend aber notwendig) für Kanonizität darstellt.

Aufgabe: Verifizieren Sie explizit, daß die Variation des durch

$$S'[\mathbf{X}] + \text{const.} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i - H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + d_t M_1 \right)$$

$$\det\left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial q_i Q_j}\right) \neq 0.$$

152

 $^{^6}$ Nach dem Satz über implizite Funktionen läßt sich genau dann nach \mathbf{Q}_i auflösen, wenn

gegebenen Funktionals auf Lösungen (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) der 'neuen' kanonischen Gleichungen verschwindet. Achten Sie dabei in besonderer Weise auf Randterme $(\dots)_{t_0}^{t_1}$ und zeigen Sie, daß die kanonischen Gleichungen auch dann Gültigkeit haben, wenn $\mathbf{Q}(t_0)$ und (\mathbf{Q}_{t_1}) nicht konstant sind (vgl. die Fußnote auf S.150).

Variable q und P unabhängig

Die Wahl von \mathbf{q} und \mathbf{Q} als unabhängige Variable ist in keiner Weise zwingend. Wir könnten uns z.B. entscheiden, stattdessen \mathbf{q} und \mathbf{P} als unabhängig zu betrachten. Nun ist in der alten Formulierung $P_i = \partial_{Q_i} M_1$, d.h. der Wechsel von \mathbf{Q} zu \mathbf{p} als unabhängige Variable läuft auf eine Legendretransformation hinaus. Wir setzen

$$M_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \equiv M_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) + \sum_i P_i Q_i,$$

wobei die Gleichung wie bei Legendretransformationen üblich so zu lesen ist, daß auf der rechten Seite $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ als Funktion der neuen unabhängigen Variable ausgedrückt ist. Damit erhalten wir

$$dM_2 = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial M_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial M_1}{\partial Q_i} dQ_i + d(P_i Q_i) \right) + \frac{\partial M_1}{\partial t} dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{f} \left(p_i dq_i - P_i dQ_i + d(P_i Q_i) \right) + (H' - H) dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{f} \left(p_i dq_i + Q_i dP_i \right) + (H' - H) dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial M_2}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial M_2}{\partial P_i} dP_i \right) + \frac{\partial M_2}{\partial t} dt,$$

wobei die letzte Zeile die Definition des Differentials ist, und die erste sich aus den oben abgeleiteten Eigenschaften der Funktion M_1 ergibt. Vergleich der beiden letzten Zeilen dieser Rechnung führt auf

$$p_i = \partial_{q_i} M_2, \qquad Q_i = \partial_{P_i} M_2, \qquad H = H' - \partial_t M_2.$$

Ähnlich wie oben bilden wir

$$\partial_{P_i} p_j = \partial_{P_i} \partial_{q_j} M_2 = \partial_{q_j} \partial_{P_i} M_2 = \partial_{q_j} Q_i$$

und erhalten eine zweite Bedingung, die von kanonischen Transformationen erfüllt sein muß.

Wir bemerken noch, daß sich über M_2 die Identitätstransformation formulieren läßt: Mit $M_2(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{q} \cdot \mathbf{P}$ ergibt sich nämlich:

$$p_i = P_i, \qquad Q_i = q_i.$$

Variable p und P unabhängig

Ausgehend von M_2 können wir eine Form der Erzeugenden angeben, die durch **p** und **P** als unabhängigen Variablen ausgedrückt ist. Da die Vorgehensweise komplett analog zu der oben diskutierten Legendretransformation ist, geben wir die wesentlichen Formeln komentarlos an:

Mit

$$M_3(\mathbf{p}, \mathbf{P}) = \left(M_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) - \sum_i p_i q_i \right) \bigg|_{\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)}$$

ergibt sich

$$dM_3 = \sum_i \left(-q_i dp_i + Q_i dP_i\right) + (H' - H)dt$$

und damit

$$q_i = -\partial_{p_i} M_3, \qquad Q_i = \partial_{P_i} M_3, \qquad H = H' - \partial_t M_3,$$

sowie

$$\partial_{P_i} q_j = -\partial_{p_j} Q_i$$

Variable p und Q unabhängig

Eine letzte Klasse von Erzeugenden ergibt sich durch Legendretransformation auf eine Funktion, die von \mathbf{p} und \mathbf{Q} als Variablen abhängt. Aus der Definition

$$M_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}) = M_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}) - \sum_i Q_i P_i$$

folgt

$$dM_4 = \sum_i (-q_i dp_i - P_i dQ_i) + (H' - H)dt,$$

was auf die bestimmenden Gleichungen

$$q_i = -\partial_{p_i} M_4, \qquad P_i = -\partial_{Q_i} M_4, \qquad H = H' - \partial_t M_4,$$

und

$$\partial_{Q_i} q_i = \partial_{p_i} P_i.$$

führt.

Es ist nicht leicht, sich in dem Dschungel aus vier verschiedenen Erzeugenden kanonischer Transformationen zurechtzufinden. Aus diesem Grunde stellen wir die wichtigsten Eigenschaften der Erzeugenden nocheinmal in einer Tabelle zusammen. (Die Tabelle ist als Referenz gedacht, es ist nicht nötig, sie auswendig zu lernen.) Alle Erzeugenden haben gemeinsam, daß

- $\triangleright H' = H + \partial_t M_i,$
- $\triangleright \det\left(\frac{\partial^2 M_i}{\partial x_i X_j}\right) \neq 0$, wobei x_i und X_j die unabhängigen Variablen sind, und daß

 \triangleright jede über sie erzeugte Koordinatentransformation kanonisch ist.

154

Erzeugende	Unabh.Var.	Generierte Variable	Koordinatenrelationen
M_1	Q_i, q_i	$p_i = \partial_{q_i} M_1, P_i = -\partial_{Q_i} M_1$	$\partial_{Q_i} p_j = -\partial_{q_j} P_i$
M_2	q_i, P_i	$p_i = \partial_{q_i} M_2, Q_i = \partial_{P_i} M_2$	$\partial_{P_i} p_j = \partial_{q_j} Q_i$
M_3	p_i, P_i	$q_i = -\partial_{p_i} M_3, Q_i = \partial_{P_i} M_3$	$\partial_{P_i} q_j = -\partial_{p_j} Q_i$
M_4	p_i, Q_i	$q_i = -\partial_{p_i} M_4, P_i = -\partial_{Q_i} M_4$	$\partial_{Q_i} q_j = \partial_{p_j} P_i$

Tabelle 4.1: Die vier Erzeugenden kanonischer Transformationen und ihre Eigenschaften

Bsp.: Harmonischer Oszillator via kanonische Transformation

Als Beispiel für die Lösung eines mechanischen Problems über eine geeignete kanonische Transformation betrachten wir noch einmal den harmonischen Oszillator. Auf

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

wenden wir die durch

$$M_1(q,Q) = \frac{m\omega}{2}q^2 \operatorname{cotan} Q$$

generierte Transformation an. Aus der Tabelle liest man ab:

$$p = \partial_q M_1 = m\omega q \operatorname{cotan} Q, \qquad P = -\partial_Q M_1 = \frac{m\omega}{2} q^2 \sin^{-2} Q.$$

Dies lösen wir gemäß

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \qquad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

auf. Mit H'(P,Q) = H(p(P,Q), q(P,Q)) resultiert der einfache Ausdruck.

$$H' = \omega P.$$

Damit ergibt sich

$$\dot{Q} = \omega \quad \Rightarrow \quad Q(t) = \omega t + \alpha,$$

$$\dot{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad P(t) = \beta$$

löst. (Zwei freie Integrationskonstante, wie es für eine noch nicht über Anfangsbedingungen festgelegte Lösung sein muß.) Rücksubstitution in die alten Variablen führt auf die altbekannte Lösung

$$q = \sqrt{\frac{2\beta}{m\omega}}\sin(\omega t + \alpha)$$

Ist diese Art den harmonischen Oszillator zu lösen einfacher als die oben diskutierten? Nein, denn die Hauptarbeit steckt im Auffinden der Erzeugenden M_1 , die oben einfach vom Himmel viel. Später werdern wir systematische Verfahren zur Berechnung von Erzeugenden kennenlernen.

4.2.7 Kanonische Transformationen III: Kriterien für Kanonizität

Aufbauend auf der letzten Spalte der Tabelle oben lassen sich eine Reihe von Kriterien aufstellen anhand derer sich direkt prüfen läßt, ob eine gegebene Transformation kanonisch ist oder nicht. 'Direkt' bedeutet hier, daß es nicht nötig ist, explizit die Struktur der neuen Hamilton Gleichungen zu untersuchen. Vielmehr wird die die Transformation vermittelnde Abbildung ϕ direkt untersucht.

Im Mittelpunkt der folgenden Untersuchungen steht die Jakobi Matrix der Abbildung ϕ , d.h. die Matrix $2f \times 2f$ -Matrix

$$T_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

In einer nach Koordinaten und Imulsen differenzierenden Blockform nimmt T die Form

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}$$

an, wobei die Blöcke $f \times f$ -Matrizen der Struktur $\partial_{Q_j} q_i$ u.s.w. sind. Wie für Jakobi Matrizen üblich ist die Inverse der Matrix T ist durch

$$(T^{-1})_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

gegeben (denn es gilt ja $\delta_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_j}$.) Wir behaupten nun:

Eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn die Jakobi Matrizen $T = \partial_{X_j} x_i$ der vermittelnden Abbildung $\phi : \mathbf{x} \to \mathbf{X}$ Elemente der symplektischen Gruppe Sp(2f) sind, d.h. die Bedingung

$$T^T I T = I, (4.10)$$

erfüllen, wobei I die 2f-dimensionale symplektische Eins ist.

Beweis der Hinrichtung: 'Transformation kanonisch $\rightarrow T$ symplektisch': Hierzu formen wir die Behauptung zunächst zu $T^{-1} = -IT^T I$ um und verwenden die letzte Spalte von Tabelle 4.1:

$$-IT^{T}I = -\begin{pmatrix} 1_{f} \\ -1_{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^{T} & \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)^{T} \\ \left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)^{T} & \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)^{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{f} \\ -1_{f} \end{pmatrix} =$$

4.2. FORMALE MECHANIK

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)^T & -\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)^T \\ -\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)^T & \left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^T \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = T^{-1}$$

Beweis der Rückrichtung, 'T symplektisch \sim Hamilton Gleichungen strukturinvariant': Wir setzen voraus, daß die Hamilton Gleichungen in alten Koordinaten Gültigkeit haben. Zu verifizieren ist, daß in neuen Koordinaten $\dot{\mathbf{X}} = I\partial_{\mathbf{X}}H'$, wobei $H' = h + \partial_t M$ und M die Erzeugende der Transformation ist. Dazu transformieren wir zunächst die linke und rechte Seite der zu verifizierenden Gleichung separat auf die alten Koordinaten zurück. Für die linke Seite ergibt sich:

$$\dot{X}_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \partial_t X_i = (T^{-1} \dot{\mathbf{x}})_i + \partial_t X_i,$$

und für die rechte

$$(I\partial_{\mathbf{X}}H')_{i} = I_{ij}\partial_{X_{j}}H' = I_{ij}\partial_{X_{j}}(H + \partial_{t}M) =$$
$$= I_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_{l}}\frac{\partial x_{l}}{\partial X_{j}} + I_{ij}\partial_{t,X_{j}}^{2}M = (IT^{T}\partial_{\mathbf{x}}H)_{i} + \partial_{t}(I\partial_{\mathbf{X}}M)_{i}$$

Kombination dieser Gleichungen führt auf die Forderung

$$T^{-1}\dot{\mathbf{x}} + \partial_t \mathbf{X} \stackrel{!}{=} IT^T \partial_{\mathbf{x}} H + \partial_t I \partial_{\mathbf{X}} M.$$

Die jeweils ersten Terme heben sich weg, denn es ist ja

$$0 = \dot{\mathbf{x}} - I\partial_{\mathbf{x}}H = T^{-1}(\dot{\mathbf{x}} - I\partial_{\mathbf{x}}H) = T^{-1}(\dot{\mathbf{x}} - TIT^{T}\partial_{\mathbf{x}}H) = T^{-1}\dot{\mathbf{x}} - IT^{T}\partial_{\mathbf{x}}H.$$

Es bleibt also zu zeigen, daß

$$\partial_t \mathbf{X} = \partial_t I \partial_{\mathbf{X}} M$$

Hierzu begeben wir uns in eine Darstellung in der ein alter und ein neuer Koordinatensatz unabhängig sind. Z.B. seien **q** und **Q** unabhängige Variable, d.h. für die Erzeugende ist die Form $M = M_1$ gewählt. In dieser Darstellung gilt (bitte gut klarmachen) $\partial_t Q = 0$ und zu verifizieren bleibt

$$\partial_t P_i = -\partial_t \partial_{Q_i} M_1.$$

Diese Gleichung ist aber (vgl. dritte Spalte von Tabelle 4.1) identisch erfüllt. Kritiker könnten berechtigterweise einwenden, daß wir beim Beweis der Behauptung nicht nur von $T \in \text{Sp}(2f)$ sondern auch aktiv von den Eigenschaften der Erzeugenden der Transformation Gebrauch gemacht haben. Dem sei entgegengesetzt, daß diese Schwierigkeit nur für explizit zeitabhängige Transformationen auftritt. Für eine zeitunabhängige Transformation ist $\partial_t M = 0$ und der behauptete Sachverhalt läßt sich ohne Rückgriff auf die Eigenschaften von M verifizieren. In einem strikten Sinne gilt die Behauptung, so wie sie steht, also nur für zeitunabhängige Abbildungen ϕ . Im zeitabhängigen Fall müssen die oben verwendeten Zusatzeigenschaften der Erzeugenden mit vorausgesetzt sein. Aus der Eigenschaft (4.10) lassen sich nun einige weitere leicht handhabbare Testkriterien für kanonische Transformationen ableiten. Wir betrachten die in neuen Koordinaten ausgedrückte Poissonklammer

$$\{f,g\}_X \equiv \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_i} - \frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_i}\right)$$

zweier Funktionen f und g. Mit $\{f,g\}_X=-\partial_{\mathbf{X}}^T f I \partial_{\mathbf{X}} g$ und der Kettenregel

$$\partial_{X_i} f = \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \partial_{x_j} f = T_{ij}^T \partial_{x_j} f$$

ergibt sich:

$$\{f,g\}_X = -\partial_{\mathbf{X}}^T f I \partial_{\mathbf{X}} g = -(T^T \partial_{\mathbf{x}} f)^T I T^T \partial_{\mathbf{x}} g = \\ = -\partial_{\mathbf{x}} f^T T I T^T \partial_{\mathbf{x}} g = -\partial_{\mathbf{x}} f^T I \partial_{\mathbf{x}} g = \{f,g\}_x.$$

In Worten:

Die Poissonklammer zweier Phasenraumfunktionen f, g ist unter kanonischen Transformationen invariant:

$$\{f, g\}_{\mathbf{x}} = \{f, g\}_{\mathbf{X}}.$$
 (4.11)

Tatsächlich gilt die Rückrichtung der Aussage bereits in einer sehr schwachen Form:

Wenn nur die Poissonklammer der Koordinatenfunktionen selbst forminvariant ist, $-I_{ij} = \{X_i, X_j\}_{\mathbf{X}} \stackrel{!}{=} \{X_i, X_j\}_{\mathbf{x}}, \qquad (4.12)$

dann ist die Transformation $\mathbf{x} \to \mathbf{X}$ kanonisch.

Dieses Kriterium ist wirklich sehr leicht abzufragen. Mat hat lediglich die bezüglich der alten Koordinaten gebildete Poissonklammer der neuen Koordinaten $\{X_i, X_j\}_{\mathbf{x}} = -\partial_{\mathbf{x}} X_i^T I \partial_{\mathbf{x}} X_j$ zu bilden und zu testen, ob $-I_{ij}$ herauskommt. Falls ja, ist die Transformation kanonisch.

Der Beweis der Aussage ist leicht. Man muß die Forderung lediglich explizit hinschreiben:

$$-I_{ij} = \{X_i, X_j\}_{\mathbf{x}} = -\frac{\partial X_i}{\partial x_l} I_{lm} \frac{\partial X_j}{\partial x_m} = -(T^{-1})_{il} I_{lm} (T^{-1})_{jm} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I = T^{-1} I T^{-1T}.$$

Wir haben also gezeigt, daß die Inverse der Transformationsmatrix T symplektisch ist. Da aber Sp(2f) eine Gruppe ist, ist damit auch T selbst symplektisch. Das wiederum bedeutet, daß die Transformation kanonisch ist.

Wir fassen die vier in diesem und im vorangegangenen Abschnitt formulierten Kriterien für Kanonizität von Koordinatentransformationen noch einmal zusammen. Eine Phasenraumtransformation $\phi : \mathbf{x} \to \mathbf{X}$ ist kanonisch, wenn

- ▷ sie die Struktur der Hamilton Gleichungen invariant ist,
- \triangleright die Jakobimatrix $T \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ symplektisch ist,
- \triangleright die Poissonklammern beliebiger Funktionen forminvariant bleiben, $\{f,g\}_{\mathbf{x}}=\{f,g\}_{\mathbf{X}}$ oder nur
- ▷ die Poissonklammern der Koordinatentransformationen selbst die kanonische Form $\{X_i, X_j\}_{\mathbf{x}} = -I_{ij}$ haben.

Aufgabe: Rekapitulieren Sie nocheinmal die Argumentationskette über die wir die Äquivalenz der Kriterien gezeigt haben.

Damit ist unsere Analyse der Grundlagen der Hamilton Mechanik abgeschlossen. Als nächstes müssen wir sehen, wie sich diese formalen Strukturen für die inhaltliche Entwicklung der Theorie nutzbar machen lassen. Dies wir Gegenstand des nächsten Kapitels sein. Zum Abschluß dieses Kapitels diskutieren wir einen Satz, der inhaltlich mehr in die statistische Mechanik gehört, aber aufgrund seines unmittelbaren Bezugs auf die symplektische Struktur des Phasenraums bereits an dieser Stelle besprochen werden soll.

4.2.8 Liouville'scher Satz

In Anwendungen der statistischen Mechanik hat man es nicht mit einzelnen oder endlich vielen, sondern i.d.R. mit Ensembles von makroskopisch vielen Teilchen zu tun. Zum Beispiel könnte man sich für die zeitliche Evolution der Moleküle eines Gasstrahls interessieren, der unter hohem Druck durch eine Düse geschickt wird. Vom Standpunkt der (statistischen) Mechanik aus gesehen, stellt sich die Situation folgendermaßen dar:

- ▷ Die Bewegung jedes der (klassisch behandelten) Moleküle genügt einer mechanischen Bewegungsgleichung, deren detaillierte Struktur unbekannt ist.
- ▷ Die Zahl N der Moleküle ist groß, von der Ordnung 10^x , x > O(20).
- ▷ Die Anfangsbedingungen der Bewegung einzelner Moleküle sind weder bekannt, noch wäre diese Kenntnis von großem Nutzen (denn wir sind ja an der Bewegung des Systems als ganzes und nicht an einzelnen Molekülen interessiert.)

Wie geht man ein solches Problem an? Zunächst einmal ist klar, daß der Phasenraum ein nützliches Konzept bleibt, denn seine Struktur, speziell die geometrische Struktur, ist von Details der Bewegungsgleichung unabhängig. Dem vorangegangenen Aufbau der Theorie entsprechend, könnte man das System nun durch einen Punkt im 6N-dimensionalen Phasenraum eines N-Teilchen Systems beschreiben. Der statistischen Natur des Problems angepasster ist es jedoch, sich das Ensemble von N Molekülen als einen Schwarm von N Punkten im sechsdimensionalen Ein-Teilchen

Phasenraum vorstellen. Anstelle jeden dieser Punkte einzeln zu betrachten – ohnehin unmöglich – ist es besser, den Schwarm als ganzes über das Konzept einer Phasenraumdichte zu charakterisieren. Wir definieren $\rho_t(\mathbf{x})d(\mathbf{x})$ als die Zahl der Teilchen, die sich zur Zeit t im infinitesimalen Volumenelement $d(\mathbf{x}) \equiv dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3$ befindet. Man kann sich $\rho_t(\mathbf{x})$ als eine Phasenraumfunktion vorstellen, die die instantane Verteilung des Ensembles wiedergibt. Die Menge $M_t = {\mathbf{x} | \rho_t(\mathbf{x}) \neq 0}$ aller Punkt für die ρ_t nichtverschwindend ist, definiert die Ausdehnung der Verteilung im Phasenraum bzw. präziser, ihr **Phasenraumvolumen** (vgl. Fig4.5.)

$$V_t \equiv \int_{M_t} d(\mathbf{x}).$$



Abbildung 4.5: Zum Liouville'schen Satz. Das Phasenraumvolumen der Verteilung, angdeutet durch die umrandete Fläche, ändert sich im Laufe der Bewegung nicht.

In der Regel werden die Bewegungsgleichungen eines makroskopischen Vielteilchensystems so kompliziert sein, daß die zeitliche Evolution der Phasenraumdichte nicht oder nur qualitativ bestimmbar ist. Es ist daher von besonderer Bedeutung, daß unabhängig von der Beschaffenheit des Ensembles und der Struktur der Vielteilchen-Hamiltonfunktion eine Invariante der Bewegung existiert:

Satz (Liouville): Das Phasenraumvolumen V_t eines Enesembles von Teilchen ändert sich im Laufe der Bewegung nicht, $d_t V_t = 0$.

Anschaulich bedeutet dies, daß zwar die Form der Verteilung im Laufe der zeitlichen Evolution ändern kann, daß dies jedoch so zu geschehen hat, daß das gesamte von ihr im Phasenraum eingenommene Volumen ungeändert bleibt. Das zentrale zum Beweis dieser Aussage benötigte Konzept ist der oben eingeführte Hamilton'sche Fluß. Innerhalb einer Zeit t bewegt sich ein Phasenraumpunkt $\mathbf{x}(0)$ zum Punkt $\mathbf{x}(t) = \Phi(\mathbf{x}(0), t)$. Die durch die Verteilung zur Zeit t = 0 definierte Menge $M_{t=0}$ bildet sich auf die Menge $M_t = \Phi_t(M_0) \equiv {\Phi(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x} \in M_0}$ ab (vgl. Fig.4.5.) Der

4.2. FORMALE MECHANIK

Satz ist bewiesen, sobald es gelungen ist zu zeigen, daß

$$V_0 = \int_{M_0} d(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} \int_{M_t} d(\mathbf{x}) = V_t,$$

(wobei das letzte Gleichheitszeichen die Definition des Phasenraumvolumens zur Zeit t darstellt.) Zum Beweis dieser Aussage benötigen wir folgendes Lemma

Der Hamilton'sche Fluß

$$\begin{array}{rccc} \Phi_t : \Gamma & \to & \Gamma \\ \mathbf{x} & \mapsto & \Phi_t(\mathbf{x}) \end{array}$$

definiert eine symplektische Transformation des Phasenraums, d.h. es ist

$$\frac{\partial \Phi_t^i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \in \operatorname{Sp}(2f)$$

Dieses Lemma ist nicht weniger bedeutend als die eigentlich zu beweisende Aussage selbst. Durch die in der Zeit t ablaufende Bewegung ist eine Transformation Φ_t des Phasenraums definiert. Das Lemma besagt, daß diese Transformation kanonisch ist. M.a.W., die Bewegung des Systems selbst kann als kanonische 'Koordinaten'transformation aufgefasst werden. Diese Aussage wirft eine Reihe interessanter Fragen auf, z.B. die nach der Erzeugenden der Transformation Φ_t . Im nächsten Kapitel werden wir auf diesen Punkt zurückkommen.



Abbildung 4.6: Hamilton'scher Fluß als Hintereinanderschaltung infinitesimaler Flüßse dargestellt.

Beweis (des Lemmas): Zum Beweis des Lemmas reicht es aus, den Fluß $\Phi_{\delta t}$ für infinitesimales δt zu untersuchen. Der Grund ist, daß man sich den Fluß für endliche Zeiten t als Produkt

$$\Phi_t = \Phi_{\delta t} \dots \Phi_{\delta t}$$

vieler hintereinandergeschalteter infinitesimaler Flüßse vorstellen kann. Sobald gezeigt ist, daß die durch $\Phi_{\delta t}$ generierte Transformation symplektisch ist, ist auch Φ_t selbst, als Hintereinanderschaltung kanonischer Transformationen, symplektisch. **Aufgabe:** Zeigen Sie, daß für zwei kanonische Koordinatenwechsel, $\phi_i : \mathbf{x} \mapsto \phi_i(\mathbf{x}), i = 1, 2$ die Verkettung $\phi_i \circ \phi_2$ ihrerseits kanonisch ist. Hinweis: Stellen sie die Jakobimatrix der Gesamttranformation über die (symplektischen) Jakobimatrizen der Teiltransformationen dar und verwenden Sie die Gruppeneigenschaft.

Das Arbeiten mit dem inifinitesimalen Fluß ist deswegen vorteilhaft, weil $\Phi_{\delta t} = id.$ dicht bei der Einheitsabbildung liegt. Für infinitesimales δt kann in linearer Ordnung um t = 0 entwickelt werden und wir erhalten

$$\Phi_{\delta t}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(t = \delta t) = \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\delta t + O(\delta t^2) = \mathbf{x} + I\partial_{\mathbf{x}}H + O(\delta t^2).$$

Damit ergibt sich für die dem infinitesimalen Fluß zugeordnete Transformationsmatrix

$$(T^{-1})_{ij} \equiv \frac{\partial \Phi_{\delta t}^i}{\partial x_j} = \partial_{x_j} (x_i + I_{il} \partial_{x_l} H) = \delta_{ij} + I_{il} \partial_{x_i x_l}^2 H,$$

bzw. in kompakter Form

$$T^{-1} = 1_{2f} + IR\delta t,$$

wobei die symmetrische Matrix $R = \{\partial_{x_i x_j}^2 H\}$. Wir erinnern daran, daß alle Formeln nur bis zu linearer Ordnung in δt Gültigkeit haben. Es folgt

$$T^{-1T}IT = (1_{2f} + IR\delta t)^T I(1_{2f} + IR\delta t) =$$

= (1_{2f} - RI\delta t)I(1_{2f} + IR\delta t) = I + (-RII + IIR)\delta t + O(\delta t^2) =
= I + O(\delta t^2),

womit gezeigt wäre, daß der infinitesimale Fluß in der Tat symplektisch ist. Nach dieser Vorarbeit ist der Beweis des Liouville'schen Satzes einfach. Wir verwenden ein Standardergebnis der Analysis, nach dem stetig differenzierbare bijektive Abbildung $\rho : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$

$$\int_{\rho(M)} d(\mathbf{y}) = \int_M \left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right| d(\mathbf{x})$$

Angewandt auf die Abbildung Φ_t ergibt sich:

$$V_t = \int_{M_t} d(\mathbf{x}) = \int_{\Phi_t(M_0)} d(\mathbf{x}) = \int_{M_0} \left| \frac{\partial \Phi_t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right| d(\mathbf{x}) = \int_{M_0} d(\mathbf{x}) = V_0,$$

wobei wir im entscheidenden vorletzten Gleichheitszeichen die Eigenschaft det $M = \pm 1$ jeder symplektischen Matrix M benutzt haben. (Aus $M^T I M = I$ und dem Determinantenmultiplikationssatz folgt det $M \det M^T = (\det M)^2 = 1 \Rightarrow \det M = \pm 1$.). Damit ist der Liouville'sche Satz bewiesen.

4.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Hamilton Mechanik als nach der Newton- und Lagrange Mechanik dritter großer Zugang zur klassischen Mechanik entwickelt. Es stellte sich heraus, daß die Hamilton Mechanik eine Vielzahl von Parallelen zur Lagrange Mechanik aufweist, eine Tatsache, die sich schon daraus erklärt, daß die für die Theorieentwicklung zentrale Hamiltonfunktion durch Legendretransformation aus der Lagrangefunktion hervorgeht. Die Bewegungsgleichungen beider Zugänge lassen sich 'direkt' oder über Variationsprinzipien herleiten. Sowohl in der Lagrange- als auch in der Hamilton Mechanik besteht weitgehende Freiheit in der Wahl problemangepasster Koordinaten. Darüberhinaus gibt es noch eine Reihe von Parallelen auf die wir aus Zeitmangel nicht haben explizit eingehen können. Z.B. gibt es in der Hamilton Mechanik ähnlich wie in der Lagrange Mechanik einen hochentwickelten Mechanismus über den sich ein direkter Bezug zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen herstellen und für Problemlösungen nutzbar machen läßt.

Einer der zentralen Unterschiede zwischen den Zugängen besteht in ihrem Transformationsverhalten unter Koordinatenwechseln. Während in der Lagrange Mechanik lediglich die 'Lagekoordinaten' q_i transformierbar waren – dies allerdings völlig unbeschränkt – besteht in der Hamilton Mechanik viel größerer Spielraum. Koordinaten und Impulse sind frei ineinander transformierbar, was allerdings mit dem Preis zu bezahlen ist, daß nicht jede denkbare Transformation physikalisch sinnvoll (kanonisch) ist. Der bei weitem größte Teil der in diesem Kapitel geleisteten Arbeit wurde in die Ausarbeitung von Kriterien für Kanonizität von Phasenraumtransformationen investiert. Bis jetzt haben wir, abgesehen vom notorisch immer wieder auftauchenden Beispiel des harmonischen Oszillators, freilich noch nicht gesehen, wozu die in der Hamilton Mechanik realisierte Flexibilität bei der Koordinatenwahl tatsächlich nützlich ist. Diese Lücke soll im nächsten Kapitel geschlossen werden.

Ein zweiter Unterschied zwischen Lagrange und Hamilton Mechanik ist, daß in letzterer geometrische Aspekte in den Vordergrund treten. Über die symplektische Bilinearform ω^2 wird der Phasenraum der Hamilton Mechanik zu einem Raum mit einer starken geometrischen Struktur. Über diese Struktur ließen sich Beziehungen zwischen verschiedenen Objekten mit geometrischer Signifikanz, Funktionen, Kurven, Vektorfeldern u.ä. herstellen. Bislang hat sich die Bedeutung geometrischer Konzepte in der Mechanik nur angedeutet, z.B. in Form der oben diskutierten Phasenraumportraits oder der 'Flüsse' mechanischer Bewegungen. Im folgenden Kapitel wird die zentrale Rolle der (Phasenraum)Geometrie in der modernen Mechanik dagegen voll sichtbar werden.

KAPITEL 4. HAMILTON MECHANIK

Kapitel 5 Stabilität und Chaos

In Kapitel 1 wurde, bereits unter Rückgriff auf die Hamilton'sche Formulierung, gezeigt, daß mechanische Bewegungsgleichungen lokal stets eine eindeutige Lösung besitzen. Lange Zeit hat man ohne groß Fragen zu stellen, daraus den Schluß gezogen, daß die Existenz von Lösung auch 'im Großen' garantiert ist. Auch wenn sich die Bewegungsgleichugen nur in den wenigsten Fällen explizit werden lösen lassen, so kann man ja doch wenigstens im Prinzip durch 'Aneinanderhängen' lokaler Lösungen eine globale Lösung konstruieren. Eine ganz andere Frage ist, ob das so erdachte Lösungsschema, selbst wenn es sich praktisch realisieren ließe, zu physikalisch sinnvollen Resultaten führt. Ein Kriterium für 'physikalisch sinnvoll' ist z.B., daß zwei Lösungen, deren Anfangsbedingungen infinitesimal dicht beieinander liegen, im Laufe ihrer Evolution auch benachbart bleiben (Fig. 5.1, links). Da sich Anfangsbedingungen nämlich niemals mit der Präzision eines mathematischen Punktes vorgeben¹lassen, wäre anderenfalls (Fig. 5.1, rechts), abgesehen von der schieren Existenzaussage, die Evolution der Lösungen nicht vorhersagbar. Systeme mit solchem singulären Verhalten nennt man nichtintegrabel (für eine präzise Definition des Begriffs, siehe unten).



Abbildung 5.1: Phasenraumevolution eines integrablen (links) und eines nichtintegrablen Systems (rechts). Im letzteren Fall ist selbst präziser Vorgabe von Anfangsbedingungen die Phasenraumevolution der Lösungskurven nicht vorhersagbar; Bereits infinitesimale Abweichungen der Anfangsbedingungen führen zu auf großen Skalen divergierenden Lösungskurven.

¹Das maximale Auflösungsvermögen im Phasenraum ist durch die Quantenmechanik limitiert. Aufgrund der Unschärferelation lassen sich auf Skalen unterhalb des Phasenraumvolumens $dV = \hbar^f$ keine Strukturen mehr auflösen (\hbar : Planck'sches Wirkungsquantum).

Früher war man, ohne es explizit auszusprechen, der Ansicht, das solch 'pathologisches' Verhalten in der Physik nicht realisiert ist. Heute weiß man, daß das Gegenteil der Fall ist; die nichtintegrablen Systeme sind gegenüber den Integrablen bei weitem in der Mehrzahl. Gegenstand dieses Kapitels ist eine erste und notgedrungener Maßen sehr oberflächliche Einführung in das moderne Gebiet der Dynamik nichtintegrabler Systeme.

5.1 Beispiele Nichtintegrablen Verhaltens

Vor der systematischen Analyse nichtintegrabler Systeme ist es sinnvoll, sich anhand einiger Beispiele einen gewissen qualitativen Eindruck von ihren Eigenschaften zu verschaffen. Wie eben schon gesagt, ist Nichtintegrabilität eine in der Mechanik oft anzutreffendes Erscheinung. In diesem Abschnitt, wie auch im Rest des Kapitels, wollen wir uns auf die Betrachtung nichtintegrabler *konservativer* Systeme beschränken. Eine vollständige Diskussion der Physik nichtintegrabler Systeme erforderte unbedingt den Einschluss dissipativer Systeme (vgl. Abschnitt 1.5); einige der wichtigsten und faszinierendsden Erscheinungsformen nichtintegrablen Verhaltens sind in diesem Bereich realisiert. Um die Diskussion jedoch nicht zu sehr auszudehnen, wollen wir uns auf die Physik konservativer Systeme beschränken.

5.1.1 Das Henon-Heiles System

Einen ersten Eindruck von den gegenüber den bislang studierten integrablen Systemen dramatisch geänderten Eigenschaften nichtintegrabler Systeme kann man bereits anhand eines sehr einfachen Beispiels bekommen. Wir betrachten die scheinbar harmlose Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2^2 - \frac{1}{3}q_2^3.$$

Dieses System wurde 1964 von Henon und Heiles zur einfachen Modellierung der Bewegung von Sternen in einem galaktischen Potentialfeld eingeführt. Seine zweidimensionale Potentialfunktion

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2^2 - \frac{1}{3}q_2^3$$

ist in Figur 5.2 dargestellt.

Die Hamiltonfunktion H beschreibt ein konservatives System mit Energieerhaltung. Für kleine Werte der Energie E nehmen die Koordinaten q_i kleine Werte an und die kubischen Terme in der Potentialfunktion sind vernachlässigbar. In diesem Regime ist $V(q_1, q_2) \simeq (q_1^2 + q_2^2)/2$ die Überlagerung zweier harmonischer Oszillatorpotentiale und das System ist integrabel

Aufgabe: Bestimmen Sie die allgemeine Form der Lösungskurven des durch die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)$$



Abbildung 5.2: Potentialfunktion des Henon-Heiles Systems.

beschriebenen zweidimensionalen harmonischen Oszillators.

Für ansteigende Energie beginnen die anharmonischen Potentialbeiträge eine Rolle zu spielen, und das Problem ist nicht mehr elementar lösbar. Ein wesentlicher Beitrag zum physikalischen Verständnis dieses Systems mit f = 2 Freiheitsgraden wäre geleistet, wenn es gelänge, seine Bewegung im vierdimensionalen Phasenraum in irgendeiner Weise zu veranschaulichen. Tatsächlich gibt es ein Methode, die es gestattet, Elemente der Bewegung der Phasentrajektorien beliebiger f > 1 dimensionaler Systeme im 2f-dimensionalen Phasenraum in einfacher Weise zu visualisieren.



Abbildung 5.3: Veranschaulichung einer surface of section A. Dreidimensional dargestellt: Phasenraumtrajektorie eines Systems mit f = 2 Freiheitsgraden auf der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit konstanter Energie.

Die Idee ist in Figur 5.3 für den Fall f = 2 visualisiert. Die Bewegung eines autonomen Systems mit f = 2 spielt sich auf einer dreidimensionalen, durch E = const. definierten Untermannigfaltigkeit des vierdimensionalen Phasenraums ab. (Für f > 2hat diese sogenannte 'Energieschale' Dimensionalität 2f - 1.) Wir denken uns nun durch diese Mannigfaltigkeit eine zweidimensionale Ebene A hindurchgelegt. Die Phasenraumtrajektorien $\mathbf{x}(t)$ des Systems stechen im Laufe der Zeit t immer wieder durch diese Ebene hindurch. Die Auftragung dieser Schnittpunkte liefert ein zweidimensionales Diagramm, das man allgemein als eine **surface of section** bezeichnet. Anhand solcher Diagramme kann man sich gut einen qualitativen Eindruck vom Charakter mechanischer Bewegungungen verschaffen.



Abbildung 5.4: Surface of section für das Henon-Heiles System.

Eine surface of section des Henon-Heiles Systems ist in Figur 5.4 für drei verschiedene Werte der Energie abgetragen. Als Koordinaten der Ebene sind die Phasenraumkoordinaten $y \equiv q_2$ und $p_y \equiv p_2$ gewählt. In Teil (a) der Figur ist E = 1/12gewählt. Für diesen Energiewert ist die Bewegung durch die harmonischen Beiträge zum Potential bestimmt und ihrem Charakter nach integrabel. Die für (Kurven verschiedener Anfangsbedingung) aufgetragenen Durchstoßpunkte liegen auf glatten Kurven. (Es sind so viele Punkte aufgetragen, daß keine einzelnen Punkte mehr sichtbar sind und die Kurven wie durchgezogen aussehen.). In Teil (b) der Abbildung ist ein größerer Energiewert E = 1/8 zugrundegelegt. Offensichtlich sind zwei verschiedene Bewegungstypen realisiert. Für einen manche Anfangsbedingungen ist die Bewegung immer noch regulär, in dem Sinne, daß die surface of section eine glatte Kurve liefert. Daneben jedoch ist ein Schwarm anscheinen völlig irregulärer Durchstoßpunkt (generiert von einer einzigen Kurve) aufgetreten. Dies ist unser erstes Beispiel für komplett irreguläre, chaotische Dynamik. Für noch grösere Energie, E = 1/6, Teil (c) ist jedwelche Regularität verschwunden und das System komplett chaotisch.

Der hier für das Henon-Heiles System Übergang von integrabler zu gemischt integrabelchaotischer bis hin zu komplett chaotischer Dynamik ist für eine Vielzahl von Systemen charakteristisch.

5.1.2 Nichtintegrabilität im Sonnensystem

Die Planetenbahnen gelten gemeinhin als Beispiele sehr regelmäßiger, mit hoher Genauigkeit periodisch ablaufender Bewegungen. Während dies für die größeren Himmelskörper des Sonnensystems auch (näherungsweise) der Fall ist, hat man in letzter Zeit entdeckt, daß neben regulären Bewegungsformen in verblüffend großer Zahl auch irreguläre, nichtintegrable Bewegungstypen im Sonnensystem realisiert sind. Der Grund für diese Abweichungen liegt zum einen darin, daß die Bewegung der Himmelskörper in der Regel einem überaus komplizierten Kraftgesetz unterworfen ist. Während sich die Bewegung eines schweren Planeten, der Erde z.B., in guter Näherung auf das Zweikörpersystem Erde/Sonne, und damit auf ein integrables System reduzieren läßt, ist die Situation bei kleineren Himmelskörpern komplizierter. Z.B. zeigt sich, daß die Bewegung von Asteoriden z.T. ganz wesentlich durch die Gravitationskraft der Sonne und der schweren Planeten des Sonnensystems beeinflußt ist. In diesem Fall hat man es mit einem Mehrkörperproblem zu tun, das je nach Lage seiner physikalischen Parameter integrabel oder nichtintegrabel sein kann (s. unten.) Es ist interessant, daß die Stabilität der Bewegung des Sonnensystems als ganzes bis heute nicht abschließend bewiesen ist (auch wenn die Erfahrung der letzten vier Milliarden Jahre natürlich dafür spricht.)

Eine zweite Quelle für nichtintegrables Verhalten ist, daß eine Reihe kleinerer Himmelskörper nur in sehr dürftiger Näherung kugelförmig sind. Abgesehen von den ohnehin irregulär geformten Asteoriden gibt es auch einige Monde, den Saturnmond Hyperion z.B., deren Form wesentlich von der einer Kugel abweicht. Wenn ein solches unregelmäßiges Objekt einer Gravitationskraft ausgesetzt wird, kann es zu nichtintegrabler Bewegung kommen. Am Beispiel des eben erwähnten Saturnmondes wollen wir diesen Typus irregulärer Bewegung etwas genauer untersuchen.

Der Sturnmond Hyperion ist von der Sonde Voyager 2 vermessen worden, mit dem Ergebnis, daß es sich um einen asymmetrischen Kreisel der Abmessungen

$$190 \,\mathrm{km} \times 145 \,\mathrm{km} \times 114 \,\mathrm{km}$$

bei einer Unsicherheit von ± 15 km handelt. Die Besonderheit dieses Mondes ist, daß er keine schön regelmäßige Trabantenbewegung um Saturn herum durchführt, sondern sich vielmehr in einer chaotischen, torkelnden Weise um seinen Mutterplaneten herumbewegt. Im Laufe eines Umlaufs ändert sich die Orientierung seines Hauptachsensystems dabei in irregulärer und unvorhersehbarer Weise.

Wie oben schon angedeutet, rührt die Irregularität der Bewegung aus einem Wechselspiel des assymmetrischen Trägheitstensors von Hyperion und der durch Saturn verusrsachten Gravitationskraft her. Eine einfache Möglichkeit, die Situation zu modellieren, ist in Fig. 5.5 angedeutet. In erster Näherung bewegt sich der Mond auf einer Keplerellipse um das durch Saturn repräsentierte Kraftzentrum S. Die Assymmetrie von Hyperion simulieren wir durch ein einfaches zweidimensionales Modell,



Abbildung 5.5: Zur Erklärung der Bewegung des Saturnmondes Hyperion.

in dem seine Massenverteilung durch vier kreuzartig angeordnete Massenpunkte 1, 2, 3, 4 gleicher Masse. Ziel ist es, die Torkelbewegung des Mondes, d.h. in unserem zweidimensionalen Modell seine Drehbewegung um die auf der Papierebene senkrecht stehende 3-Achse durch den Schwerpunkt zu beschreiben. Wir fassen hierzu Hyperion als einen starren Körper und betrachten seine Bewegungsgleichung

$$L_3 = N_3,$$

wobei **L** der Drehimpuls des Mondes bezüglich seines Schwerpunkts und **N** das von außen angreifende Drehmoment ist. Für die 3-Komponente des Drehimpulses gilt die allgemeine Identität $L_3 = I_3\omega_3 = I'_3\omega'_3$, wobei I_3 das Hauptträgheitsmoment um die 3-Achse und ω_3 die 3-Komponente des Drehvektors ist. Wir haben hier verwendet, daß in unserem zweidimensionalen Modell die Drehung um die 3-Achse verläuft und damit die 3-Komponenten aller Größen im körperfesten und raumfesten Bezugssystem zusammenfallen (bitte überlegen). Für die 3-Komponente des Drehvektors setzten wir $\omega_3 = \dot{\theta}$ an, wobei θ den von der Hauptträgheitsachse 12 und der großen Halbachse der Keplerellipse eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Aus der allgemeinen in Abschnitt 3.4.1 angegebenen Formel für die Hauptträgheitsmomente folgt (bitte überlegen) $I_3 = \frac{m}{2}(l_{12}^2 + l_{34}^2)$, wobei l_{ij} den Abstand zwischen den Massenpunkten *i* und *j* bezeichnet. Die 3-Komponente des Drehmoments schließlich berechnet sich gemäß

$$N_3 = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)_3,$$

wobei \mathbf{r}_i die Lagekoordinate des Massenpunktes *i* bezüglich des Hyperion-Schwerpunkts, $\mathbf{F}_i = -mMg(\mathbf{R}+\mathbf{r}_i)|\mathbf{R}+\mathbf{r}_i|^{-3}$ die Gravitationskraft und *M* die Saturnmasse ist. Wir zerlegen $N_3 \equiv N_3^{(12)} + N_3^{(34)}$ in zwei Beiträge, wobei $N_3^{(ij)}$ das auf die Massenpunkte (*ij*) wirkende Drehmoment ist. Aus $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2$ folgt

$$\begin{split} N_3^{(12)} &= -mMg\left(\mathbf{r}_1 \times \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}_1}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_1|^3}\right)\right) \simeq \\ &\simeq 6mMg(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{R})_3 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{R}}{R^5}, \end{split}$$

wobei wir verwendet haben, daß $r_1 \ll R$. Mit

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{R})_3 = \frac{1}{2} l_{12} R \sin \alpha, \qquad \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{R} = \frac{1}{2} l_{12} R \cos \alpha$$

sowie $\alpha = \phi - \theta$ und $2\sin\beta\cos\beta = \sin(2\beta)$ ergibt sich

$$N_3^{(12)} \simeq -\frac{3}{4}mMg\frac{l_{12}^2}{R^3}\sin(2(\theta-\phi))$$

Eine analoge Rechnung für den Beitrag $N_3^{(34)}$ führt auf

$$N_3 \simeq -\frac{3}{4}mMg\frac{l_{12}^2 - l_{34}^2}{R^3}\sin(2(\theta - \phi))$$

und damit auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}mMg\frac{l_{12}^2 - l_{34}^2}{I_3R(t)^3}\sin(2(\theta - \phi(t))),$$

wobei die Notation andeutet, daß auf der rechten Seite die sich aus der Lösung der Keplergleichung ergebende Bahnkurve $R(t), \phi(t)$ zu substituieren ist.



Abbildung 5.6: Transversalschnitt der Bewegung des Hyperion. Erklärung der Achsen, siehe Text.

Für den Fall einer Bahnkurve mit verschwindender Exzentrizität, $\epsilon = 0 \rightsquigarrow R(t) = \text{const}, \phi(t) = \omega t, \omega = \text{const}, läßt sich die Zeitabhängigkeit der rechten Seite eliminieren (bitte nachrechnen) und die Bewegungsgleichung ist integrabel. Für den Fall nichtverschwindender Exzentritität jedoch, kann die Gleichung nicht mehr gelöst werden. Eine numerische Analyse zeigt, daß, in Abhängigkeit von den gewählten Parametern, sowohl reguläre Lösungen als auch anomale Lösungen mit irregulärem und unvorhersagbarem Verhalten des Orientierungswinkels <math>\theta$ existieren. Dieser Sachverhalt ist in Fig.5.6 dargestellt, wo für jeden Durchgang des Perihels (Winkel $\phi = 0$) der Orientierungswinkel θ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ aufgetragen sind.

Ahnlich wie beim Transversalschnitt für das Henon-Heiles System identifiziert man Bereiche verschiedener Struktur. Wie dort entsprechen die linienartigen Gebilde Regimes integrabler Dynamik. Die 'verschneiten' Gebiete entsprechen Regimes vollausgeprägten Chaos. Zwischen diesen Extremfällen existieren kompliziert strukturierte Bereiche des Übergangs von integrablem zu chaotischen Verhalten.

Jüngere Untersuchungen haben gezeigt, daß die Geschichte der Bewegung des Hyperion ungefähr wie folgt aussieht. In der Frühzeit des Sonnensystems hatte der Mond eine hohe Eigenrotationskomponente $\dot{\theta}$ entsprechend einem Bereich, der 'oberhalb' des in Fig.5.6 dargestellten Fensters liegt und integrabel war. Im Laufe der Zeit richtete sich (i) die Drehachse senkrecht zur Bahnebene auf (was das oben verwendete einfache Modell rechtfertigt) und (ii) senkte sich die Eigendrehgeschwindigkeit aufgrund des Wirkens sogenannter Gezeitenkräfte ab. Schließlich trat Hyperion in einen Bereich chaotischer Dynamik ein und die Drehbewegung wurde innerhalb von Tagen (!) völlig irregulär.



Abbildung 5.7: Transversalschnitt der Bewegung der Marsmonde Deimos (links) und Phobos (rechts).

Es ist instruktiv, die Bewegung des Hyperion mit der zweier ähnlich assymetrischer Monde, nämlich der Marsmonde Deimos und Phobos zu vergleichen. Die Bahnkurven beider Monde haben wesentlich kleinere Exzentrizitäten als die des Hyperion, und dementsprechend eine schwächer ausgeprägte Tendenz zu chaotischem Verhalten. Der dunkle Klecks in der Mitte des Transversalschnitts von Deimos entspricht der sogenannten Synchronphase, bei der sich die Orientierung des Mondes synchron mit seinem Umlaufwinkel ändert (wie bei unserem Mond, der der Erde immer das gleiche Gesicht zeigt.) Am Transversalschnitt von Phobos läßt sich schön die Struktur der Zwischenbereiche zwischen chaotischen und integrablen Gebieten Erkennen. Beachten Sie, daß in der Nähe der Grenzen integrabler Gebiete (also von Gebieten mit geschlossenen kurvenartigen Strukturen) eine Tendenz zur Ausformung geschlossener Kurven kleinerer Größe besteht. Dahinter verbirgt sich ein allgemeines Prinzip, daß weiter unten untersucht werden soll. Die Monde Deimos und Phobos torkeln heute nicht mehr haben aber vermutlich einmal eine solche Phase durchgemacht. Man schätzt, daß sie bei Deimos 100 Mio. Jahre, bei Phobos ca. 10 Mio. Jahre gedauert hat.

Eine weitere Form chaotischer Bewegung im Sonnensystem läßt sich an verschiede-



Abbildung 5.8: Zur Beinflussung der Bewegung des Asteroidengürtels durch Jupiter.

nen Asteoridengürteln beobachten. Die Bewegung der Asteoriden des zwischen Mars und Jupiter angesiedelten Asteoridengürtels, z.B. ist wesentlich durch die durch Jupiter ausgeübte Gravitationskraft beeinflußt (vgl. Fig. ??.) Das die Bewegung eines Asteoriden dieses Gürtels beschreibende Hamilton'sche System hängt wesentlich von zwei Parametern, der Umlaufsfrequenz ω_1 des Asteoriden um die Sonne und die Umlaufsfrequenz ω_2 von Jupiter um die Sonne ab. Weiter unten werden wir zeigen, daß die Bewegung eines durch zwei eingeprägte Frequenzen gekennzeichneten dynamischen Systems dann instabil wird, wenn sich die zwei Frequenzen $\omega_1/\omega_2 = n/m$, in rationalem Verhältnis befinden. Die Auswirkungen dieser Instabilität auf die Asteroidenpopulation sind in Fig. ?? dargestellt. Man sieht, daß die Population der Asteoriden in der nähe rationaler Frequenzverhältnisse tatsächlich drastisch reduziert ist. Der Grund ist, daß für diese Frequenzverhältnisse ist die Bewegung instabil ist, und die in Frage kommenden Asteoriden dazu tendieren, aus ihrer Bahn herauszukatapultieren. Einschränkend ist zu sagen, daß neuere Forschungsergebnisse darauf hinweisen, daß die Populationslücken kompliziertere Ursachen als die unten diskutierte rationale Frequenzinstabilität haben könnten. Für eine ausführlichere Diskussion dieses Sachverhalts, siehe [6].



Abbildung 5.9: Häufigkeitsverteilung der Asteoriden des Gürtels zwischen Mars und Jupiter als Funktion der eingeprägten Frequenzverhältnisse.

Ein ähnliches Phänomen läßt sich schön an den Saturnringen beobachten. Bei diesen Ringen handelt es sich um planare 'Wolken' von Gesteinsbrocken, die sich auf im Prinzip stabilen Bahnen um Saturn herumbewegen. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, daß die Bahn dieser Partikel nicht nur von Saturn selbst, sondern auch vom Gravitationspotential der Saturnmonde beinflußt ist. In der Nähe rationaler Umlaufverhältnisse kommt es zu einer Instabilität vom oben angesprochenen Typ. Das Resultat ist eine Region reduzierter Partikelpopulation, die sogenannte Cassini-Region (Fig.5.10.)



Abbildung 5.10: Cassini Region der Saturnringe. Man erkennt eine Region reduzierter Partikelkonzentration, die graduell in Breiche stabiler Dynamik übergeht.

In den vorangegangenen Beispielen haben wir eine Reihe von Eigenschaften irregulärer bzw. chaotischer Bewegungsformen kennengelernt. Wir fassen die wesentlichen Punkte nocheinmal zusammen und formulieren gleichzeitig einige Fragen, die wir weiter unten beantworten wollen.

- ▷ Zunächsteinmal ist festzustellen, daß wir die Begriffe 'integrabel', 'nichtintegrabel' und 'chaotisch' bis jetzt noch überhaupt nicht klar definiert haben. Dies wird im übernächsten Abschnitt nachgeholt werden, wo wir zunächst die vergleichsweise gutartigen Eigenschaften integrabler Systeme untersuchen und uns von dort zu den nichtintegrablen Systemen vorarbeiten.
- ▷ Unbeschadet der Abwesenheit einer formalen Definition haben wir anhand des Konzepts der Transversalschnitte gesehen, daß es zwei Extremformen fundamental verschiedener Dynamik zu geben scheint: Bewegungsformen, deren Transversalschnitt die Form glatter geschlossener Kurven annimmt (Dies wird ein Kriterium für integrable Dynamik sein) sowie Bereiche völliger Irregularität, in denen der Transversalschnitt die Form quasi-stochastischer Punktwolken annimmt (Chaos).
- ▷ Zwischen diesen Extremformen existieren Übergangsbereiche, an denen auffällt, daß die geschlossenen Kurven der integrablen Dynamik zunächst in gleichfalls geschlossene aber kleinere Kurven übergehen, um dann im chaotischen Untergrund zu verschwinden. Darin drückt sich ein generelles Grundmuster des

5.2. LINEARE STABILITÄTSTHEORIE

Übergangs von integrabler zu nicht-integrabler Dynamik aus, das wir verstehen wollen.

▷ In der Physik nichtintegrabler Systeme spielt das Konzept der 'Stabilität' eine entscheidende Rolle: Nichtintegrable Systeme tendieren dazu, instabil gegenüber Störungen, z.B. gegen Variation der Anfangsbedingungen, zu reagieren. Das Verständnis ihrer Physik erfordert daher eine erste Einführung in die sogenannte Stabilitätstheorie, d.h. in die allgemeine Theorie stabiler bzw. instabiler dynamischer Systeme. Dies ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

5.2 Lineare Stabilitätstheorie

Wir knüpfen bei dem bereits in Abschnitt 1.4.3 kurz eingeführten Konzept der Phasenraumportraits allgemeiner dynamischer Systeme an. Dort hatten wir (vorerst unter Einschränkung auf den einfachen Fall eindimensionaler Probleme) argumentiert, daß sich (i) Bewegungen qualitativ über die Struktur ihrer Phasenraumtrajektorien beschreiben lassen, und daß (ii) diese Struktur maßgeblich durch Lage und Beschaffenheit der Gleichgewichtspunkte beeinflußt ist. Wie überträgt sich dieses Bild auf den jetzigen Stand der Theorie und insbesondere auf den Fall höherdimensionaler Systeme?

Die Gesamtheit aller Phasenraumtrajektorien ist das, was wir mittlerweile als den Hamiltonschen Fluß $\Phi(\mathbf{x}, t)$ bezeichnen². Gleichgewichtspunkte sind solche für die $\dot{\mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \partial_{\mathbf{x}} H = 0$ gilt. In der Stabilitätstheorie bezeichnet man einen Punkt mit dieser Eigenschaft als einen **Fixpunkt**.

Für Systeme mit f > 1 ist eine einfache zweidimensionale Kartographie des Flusses im Phasenraum nicht mehr möglich. Allerdings wird im allgemeinen immer noch ein (möglicherweise unendlicher) Satz von Fixpunkten existieren. In Verallgemeinerung der in Abschnitt ?? gemachten Überlegungen steht zu erwarten, daß diese Punkte herausragende Bedeutung haben, sich der globale Fluß der Bewegung gewissermaßen um sie herum organisiert (vgl. Fig. 1.25). Tatsächlich läßt sich aus der Kenntnis der Bewegung eines Systems in der Umgebung aller seiner Fixpunkte sein Verhalten 'im Großen' oft bereits qualitativ vorhersagen. Der erste Schritt bei der Analyse eines vorgegbenen dynamischen Systems besteht daher in der Regel im Auffinden seiner Fixpunkte gefolgt vom Studium seiner Bewegung in der unmittelbaren Umgebung dieser Punkte. In der Umgebung von Fixpunkten lassen sich die Bewegungen allgemeiner dynamischer Systeme (in einem gleich erklärten Sinne) linearisieren, quantitativ bestimmen und nach einem von wenigen möglichen qualitativen Fällen gruppieren.

Info: Im Text oben war schon öfters von 'dynamischen Systemen' die Rede, ohne daß wir den Begriff bislang präzis definiert hätten. Allgemein bezeichnet man als ein **dynamisches** System (von Gleichungen) einen Satz von Differentialgleichungen erster Ordnung in der

²Erinnern Sie sich daran, daß Abtragung von $\Phi(\mathbf{x}, t)$ gegen t eine Phasenraumtrajektorie mit Anfangsbedingung $\Phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ liefert.

Zeit

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, t), \\ \vdots &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, t). \end{aligned}$$

Beispielsweise sind die Hamiltongleichungen von diesem Typ. Allgemeiner treten dynamische Systeme immer dann auf, wenn es um die zeitliche Evolution meßbarer Größen (die x_i 's) unter dem Einfluß dieser Größen selbst sowie (optional) anderer zeitlicher Faktoren geht. Ein bekanntes Beispiel aus der Populationsbiologie sind die Lotka-Volterra Gleichungen: wie ändert sich die Zahl von Füchsen, x_f , und Hasen x_h , unter der Bedingung, daß Hasen sich ständig vermehren (Rate σ), daß Füchse Hasen essen und sich vermehren (sofern es vorher einen Hasen zu essen gab, Rate λ) aber auch an Altersschwäche sterben (Rate σ). Eine vereinfachte (räumliche Wanderbewegungen vernachlässigende) Version der Gleichungen nimmt dann die Form eines einfachen dynamischen Systems an

$$\begin{split} \dot{n}_f &= -\mu n_h + \lambda n_f n_h, \\ \dot{n}_h &= +\sigma n_h - \lambda n_f n_h. \end{split}$$

(Motivieren Sie die Struktur der Gleichungen. Wie ließen sich statistische variierende Umweltfaktoren (Futterangebot für Hasen, etc.) modellieren?)

Wir erklären das Prinzip anhand eines einfachen durch die zwei Gleichungen

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2),$$

 $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$

bestimmten Systems, in dem die Funktionen f_i beliebig, aber der Einfachheit halber als zeitunabhängig gewählt sind. (Für $f_i = \partial_{x_i} H$ beschreiben diese Gleichungen ein autonomes Hamiltonsches System mit f = 1 Freiheitsgraden. Im Gegensatz zur oben erwähnten rein graphischen Phasenraumportraitierung lassen sich die hier entwickelten Konzepte jedoch direkt auf den Fall höherdimensionaler Systeme verallgemeinern, siehe unten.) Die Fixpunkte $\dot{\mathbf{x}} = 0$ des Systems sind durch die Nullstellen $\mathbf{f} \equiv (f_1, f_2) = (0, 0)$ bestimmt. Wir betrachten nun die Bewegung in unmittelbarer Umgebung eines vorgegebenen Fixpunkts \mathbf{x}_0 , d.h. wir setzen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$ und entwickeln in erste Ordnung in \mathbf{y} :

$$\dot{\mathbf{y}} \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) \simeq rac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{y},$$

wobei das ' \simeq ' andeutet, daß Terme von $O(\mathbf{y}^2)$ vernachlässigt sind und $\partial_{\mathbf{y}} \mathbf{f}$ die Jacobimatrix ist. In Komponenten ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1 & \partial_{y_2} f_1 \\ \partial_{y_1} f_2 & \partial_{y_2} f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Es beschreibt das in Fixpunktumgebung linearisierte dynamische System.

176

5.2. LINEARE STABILITÄTSTHEORIE

Es seien \mathbf{v}_i , i = 1, 2 die Eigenvektoren der Jacobi Matrix und λ_i ihre Eigenwerte. Die allgemeine Form der Lösung des linearisierten Problems ist dann durch

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \tag{5.1}$$

gegeben, wobei die c_i beliebige Konstante sind.

Aufgabe: Alle bisher gemachten Überlegungen lassen sich unmittelbar auf den Fall von Systemen mit n > 2 bestimmenden Gleichungen generalisieren. Formulieren Sie die entsprechenden Ausdrücke und geben sie die allgemeine Lösung an.



Abbildung 5.11: Die sechs qualitativ möglichen Formen der Bewegung in der Nähe eines Fixpunkts.

Der tatsächliche Charakter der Lösungskurve des linearisierten Systems hängt nun entscheidend von der Form der Eigenwerte λ_i ab. Es sind sechs verschiedene Fälle zu unterscheiden. (Wem das viel vorkommt, der sollte sich daran erinnern, daß das hier diskutierte Schema völlig allgemein und auf beliebige dynamische Systeme anwendbar ist. Die Grundaussage ist, daß die um Gleichgewichtslagen linearisierte Bewegung dynamischer Systeme in eine von *nur* sechs möglichen Kategorien fällt.) Die sechs verschiedenen Typen linearisierter Bewegungen sind in Fig.5.11 dargestellt, wo die beiden Komponenten $y_i = c_i \exp(\lambda_i)$ der in der Basis der Eigenvektoren \mathbf{v}_i dargestellten Kurve \mathbf{y} gegen die Zeit aufgetragen sind. (Um hieraus auf das 'tatsächliche Aussehen' der Bewegung im Phasenruam schließen zu können, muß man beachten, daß die Vektoren \mathbf{v}_i nicht notwendigerweise orthogonal aufeinander stehen. Die Phasenraumkurve ergibt sich durch Substitution der Komponenten y_i in(5.1) und wird im Allgemeinen gegenüber den dargestellten Kurven verzerrt aussehen. Inhaltlich ist diese Abweichung jedoch nicht von Bedeutung.)

Die einzelnen Typen der dargestellten Fixpunktbewegungen lassen sich wie folgt charakterisieren.

- 1. $\lambda_i > 0, i = 1, 2, Fig. 5.11$ oben links: Ein Fixpunkt mit dieser Eigenwertstruktur wird **stabiler Fixpunkt** genannt. Der Grund ist, daß (für beliebige Anfangsbedinungen), die Kurve $\mathbf{y}(t)$ exponentiell gegen den Fixpunkt $\mathbf{y} = 0$ konvergiert.
- 2. $\lambda_i > 0, i = 1, 2,$, *Fig. 5.11 mitte links:* Es liegt ein **instabiler Fixpunkt** vor. Die Kurven $\mathbf{y}(t)$ divergieren exponentiell.
- 3. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, Fig. 5.11$ unten links: Punkte mit dieser Eigenschaft heißen hyperbolische Fixpunkte³. Die y_1 -Komponente konvergiert exponentiell gegen die Linie $y_1 = 0$, während die y_2 -Komponente exponentiell divergiert. Man bezeichnet die 1 bzw. 2-Richtung als die stabile bzw. instabile Richtung des Fixpunkts.
- 4. $\lambda_1 = a + ib, \ \lambda_2 = a ib, \ a, b \in \mathbb{R}, a < 0$, Fig. 5.11 oben rechts:⁴. Aus $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2^{*4}$ und der physikalisch motivierten Forderung $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}$ folgt

$$\mathbf{y}(t) = \operatorname{Re} \left(c_1 \mathbf{v}_1 e^{ibt} \right) e^{at},$$

wobei 'Re' für 'Realteil' steht. Die Kurve kontrahiert also exponentiell ($\sim \exp(-|a|t)$) und rotiert gleichzeitig um den Ursprung herum. (Sie sehen dies explizit, wenn Sie den Re.(...) ausschreiben und $\exp(ibt) = \cos(bt) + i\sin(bt)$ beachten.). Insgesamt ergibt sich das Bild einer sich nach innen zusammenziehenden Spirale, weshalb man den Fixpunkt einen **stabilen Spiralpunkt** nennt.

5. $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, a > 0, Fig. 5.11 mitte rechts. Analog wie im vorherigen Fall, nur daß wegen a > 0 die Kurve $\sim \exp(at)$ exponentiell nach außen wandert. Fixpunkte diesen Typs heißen **instabile Spiralpunkte**.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

³Die Bezeichnung rührt daher, daß im Fall $|\lambda_1| = \lambda_2$, $y_1y_2 = \text{const.}$, d.h. die gegen y_1 abgetragene Komponente y_2 liegt auf einer Hyperbelkurve ($y_2 = \text{const.}/y_1$).

 $^{^4 \}rm Wir$ erinnern daran, daß eine relle $2 \times 2 \text{-Matrix}~M$ komplexe Eigenwerte haben kann. (Z.B. hat die Matrix

Eigenwerte $\pm i$.) Wegen det $M = \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}$ muß jedoch $\lambda_2 = \lambda_1^*$ gelten. Durch komplexe Konjugation der Gleichung $M\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ zeigt man, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^*$, d.h. daß auch die Eigenvektoren miteinander über komplexe Konjugation miteinander in Beziehung stehen.

5.2. LINEARE STABILITÄTSTHEORIE

6. $\lambda_1=ib,\,\lambda_2=-ib,\,b\in\mathbb{R}$, Fig. 5.11 unten rechts. Der Grenzfall zwischen den eben diskutierten Fällen. Die Kurve

$$\mathbf{y}(t) = \operatorname{Re} \left(c_1 \mathbf{v}_1 e^{ibt} \right)$$

beschreibt eine periodische Bewegung um den Ursprung herum. Die Kurvenlinien (bitte nachprüfen) haben die Gestalt von Ellipsen. Fixpunkte diesen Typs heißen daher **elliptische Fixpunkte**.

Aus dieser Klassifizierung ergibt sich unmittelbar folgendes Kriterium für die Stabilität der Gleichgewichtslagen dynamischer Systeme:

Für eine stabile Gleichgewichstslage \mathbf{x}_0 eines dynamischen Systems hat keiner der Eigenwerte λ_i des in der Umgebung von \mathbf{x}_0 linearisierten Systems einen positiven Realteil.

Der Vollständigheit halber erwähnen wir noch, daß das oben diskutierte Klassifizierungsschema nicht ganz komplett ist: Der Fall entarteter Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2$ ist nicht abgedeckt. In diesem Ausnahmefall ergeben sich noch zwei andere Bewegungstypen, die wir hier jedoch nicht weiter diskutieren wollen (siehe z.B. ??).

Bsp.: Gedämpftes Pendel

Wir probieren die oben eingeführten Konzepte am Beispiel des (eindimensionalen) gedämpften Pendels aus. Man kann sich das System durch ein in einer zu Reibungsverlusten führenden Flüssigkeit schwingendes Pendel der Masse m realisiert denken (Fig.5.12.) Ohne Dämpfung wäre die für den Auslenkungswinkel ϕ formulierte La-



Abbildung 5.12: In Ölwanne schingendes gedämpftes Pendel.

grangefunktion durch

$$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\phi}^2 + mgl\cos\phi$$

(bitte überlegen), woraus die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\phi} = -\omega^2 \sin \phi$$

mit $\omega \equiv \sqrt{g/l}$ resultierte (bitte nachrechnen.) Man bezeichnet diese Gleichung auch als die Gleichung des **mathematischen Pendels**. Der Einfluß der Reibungskraft läßt sich nun phänomenologisch durch Einfügen eines Zusatzterms (vgl. Abschnitt 1.5) $-\gamma \dot{\phi}$ auf der rechten Seite der Gleichung beschreiben, wobei γ eine positive Dämpfungskonstante ist.

Mit der Definition $x_1 \equiv \phi$ schreiben wir die modifizierte Gleichung

$$\ddot{\phi} = -\omega^2 \sin \phi - \gamma \dot{\phi}$$

nun als zweikomponentiges dynamisches System

$$\dot{x}_1 = x_2 \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1 - \gamma x_2$$

um und machen sie damit für die oben entwickelten Methoden zugänglich. Die Fixpunkte des Systems sind durch

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ -\omega^2 \sin x_1 - \gamma x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 = n\pi, x_2 = 0)$$

gegeben. Wir beschränken uns auf die Bewegung in der Nähe des Fixpunktes $(x_1, x_2) = (0, 0)$, für den das Pendel an seinem untersten Punkt ruht. Linearisierung der rechten Seite der Bewegungsgleichungen um (0, 0) führt auf

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(Für $\gamma = 0$ sind wir zurück beim harmonischen Oszillator, wie das für ein Pendel mit kleinen Ausschlägen ja auch nicht anders zu erwarten ist.) Die Eigenwerte der definierenden Matrix sind durch

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}$$

gegeben. Damit ergeben sich zwei verschiedene Fälle.

 $\gamma > 2\omega$: Beide Eigenwerte sind negativ rell \rightarrow stabiler Fixpunkt. Die Beweugungskurven laufen monoton auf den Fixpunkt zu. Physikalisch handelt es sich um den Falle eines **überdämpften Pendels**. Die Dämpfung ist so stark, daß keine Schwingungen mehr realisiert sind.

 $\gamma < 2\omega$: Es ist $\lambda_1 = \lambda_2^* = -\frac{\gamma}{2} + i\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$. Da Re $\lambda_{1,2} > 0$, ist ein stabiler Spiralpunkt realisiert. Das Pendel führt Schwingungen (entsprechend Ursprungsumläufen in der (y_1, y_2) -Ebene) aus, nähert sich dabei aber immer weiter an den Ursprung an.


Abbildung 5.13: Zur Stabilität der Hauptachsenrotationen beim freien Kreisel. Zwei Achsen sind stabil, eine instabil.

Ein hübsches Beispiel, an dem sich die oben eingeführten Konzepte untersuchen lassen, ist der freie Kreisel.

Aufgabe: Besorgen Sie sich ein Päckchen Tempo-Taschentücher. Werfen Sie es in die Luft, und zwar so, daß es dabei um je eine seiner Hauptachsen rotiert. Welchen Eindruck haben Sie von der Stabilität der Bewegung?

Die Bewegung des freien Kreisels ist durch die Euler-Gleichungen (3.16) mit verschwindendem Drehmoment $\mathbf{N}' = 0$ beschrieben:

$$d_t \omega_1' = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_2' \omega_3'$$

$$d_t \omega_2' = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_3' \omega_1'$$

$$d_t \omega_3' = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1' \omega_2'.$$

In der Nomenklatur dieses Abschnitts handelt es sich um ein dynamisches System mit drei Gleichungen. Seine drei Fixpunkte lassen sich sofort angeben. Es handelt sich um die drei 'Punkte' $\omega^{(1)} = (\omega_0, 0, 0), \, \omega^{(2)} = (0, \omega_0, 0)$ und $\omega^{(3)} = (0, 0, \omega_0)$, für die die rechte Seite verschwindet. Physikalisch entsprechen diese Gleichgewichtslagen Rotationen mit Winkelgeschwindigkeit ω_0 um eine der Hauptachsen des Systems (Fig.5.13). Wir betrachten die um $\omega^{(1)}$ linearisierte Bewegung. Mit $\omega = \omega^{(1)} + \kappa$ ergibt sich in linearer Ordnung in $\kappa, \, \dot{\kappa}_1 = 0$ und

$$\begin{pmatrix} \dot{\kappa}_2 \\ \dot{\kappa}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_0 \\ \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{(I_3 - I_1)(I_1 - I_3)} \frac{\omega_0}{\sqrt{I_2 I_3}}.$$

Daraus ergeben sich zwei qualitativ verschiedene Fälle (wobei angenommen ist, daß der Kreisel asymmetrisch ist, d.h. seine Hauptträgheitsmomente paarweise verschieden sind):

- ▷ I_1 ist ein extremes Hauptträgheitsmoment, d.h. $I_1 > I_2, I_3$ oder $I_1 < I_2, I_3$.l In diesem Fall ist das Argument unter der Wurzel negativ, d.h. beide Eigenwerte sind rein imaginär. Es liegt der Fall eines elliptischen Fixpunktes vor und eine Störung der durch $\omega^{(1)}$ charakterisierten Fixpunktbewegung resultiert in einem mit geringer Auslenkung um $\omega^{(1)}$ rotierenden Drehvektor $\omega^{(1)} + \kappa$.
- \triangleright I_1 ist das mittlere Drehmoment, z.B. $I_3 < I_1 < I_2$. Das Argument unter der Wurzel ist positiv und einer der Eigenwerte hat positiven Realtiel. Es liegt ein hyperbolischer Fixpunkt vor und die Bewegung ist exponentiell instabil.

Aufgabe: Was passiert, wenn die Rotation eines symmetrischen Kreisel um (i) seine Symmetrieachse, (ii) eine der beiden anderen Hauptträgheitsachsen gestört wird?

Wir wenden uns nun der Untersuchung der zweiten zum Verständnis der Physik nichtintegrabler Syteme notwendigen Voruntersuchung zu: Ziel ist es, die Begriffe 'integrabel' und 'nichtintegrabel' formal und physikalisch zu fassen sowie die Eigenschaften integrabler Systeme von denen Nichtintegrabler abzusetzen. Es hat sich gezeigt, daß hierzu eine auf dem Formalismus der Hamiltongleichungen und ihrer kanonischer Transformationen aufbauende Theorie, die sogenannte Theorie von Hamilton-Jacobi optimal geeignet ist. Im folgenden Abschnitt werden wir diese Thoerie in allgemeiner Weise einführen. (Inhaltlich gehört dieser Abschnitt eigentlich in das vorangegangene Kapitel. Da die Diskussion der Theorie von Hamilton-Jacobi jedoch ganz wesentlich durch ihren aktuellen Bezug zur Physik der Nichtintegrabilität motiviert ist, haben wir sie in dieses Kapitel verlegt.) In den darauf folgenden Abschnitten werden wir uns dann, alles im Rahmen der Theorie von Hamilton-Jacobi, mit den Eigenschaften integrabler und später auch nichtintegrabler Systeme befassen.

5.3 Theorie von Hamilton-Jacobi

Ausgangspunkt der **Theorie von Hamilton-Jakobi** ist die Formulierung eines auf den ersten Blick bizarr anmutenden Ziels: Es wird nach einer kanonischen Transformation gesucht, die die Hamiltonfunktion annuliert, H' = 0. Bevor wir uns der Frage zuwenden, ob und gegebenenfalls wie eine solche Transformation gefunden werden kann, wollen wir zunächst untersuchen, welche Konsequenzen die Existenz einer solchen Transformation hätte. Zunächst einmal wären alle Koordinaten X_i trivialerweise zyklisch, $\partial_{X'_i}H' = \partial_{X'_i}0 = 0$. Als Konsequenz wäre $X_i = \text{const.}$ und das Problem trivial gelöst. Das bedeutet, daß die gesamte Schwierigkeit der Lösungung mechanischer Probleme in das Auffinden der fiktiven Transformation $\mathbf{x} \to \mathbf{X}$ gewandert sein muß.

Wir nehmen an, eine auf konstante Koordinaten abbildende Transformation existierte tatsächlich und ließe sich durch eine Erzeugendenfunktion M generieren. Für

alles weitere wird es zweckmäßig (aber keinesfalls zwingend) sein, diese Transformation vom Typ M_2 , also als eine Funktion $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \equiv M_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ der alten (Lage)koordinaten und der konstanten neuen Impulse zu wählen. (Üblicherweise wird die die Hamilton-Jacobi Transformation generierende Abbildung mit S bezeichnet, eine Konvention deren Ursprung bald klarwerden wird.)

Mit den im letzten Kapitel abgeleiteten Identitäten

$$0 \stackrel{!}{=} H' = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{P}), t) + \partial_t S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$$

und $\partial_{q_i} S = p_i$ ergibt sich die Forderung

$$H(\mathbf{q}, \partial_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), t) + \partial_{t} S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = 0.$$
(5.2)

Dies ist die sogenannte **Differentialgleichung von Hamilton-Jakobi**. Technisch gesprochen handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für S in den f + 1 Variablen q_i und t. Beachten Sie, daß in (5.2) die neuen Impulse nicht explizit angesprochen sind (in dem Sinne, daß keine Differentialoperatoren auf die P_i wirken). Wir werden auf diesen Sachverhalt gleich zurückkommen.

Die Lösung von (5.2) ist der Lösung des gegebenen mechanischen Problems völlig äquivalent, denn sobald die Funktion S gefunden ist, kennen wir die explizite Umrechnung zwischen den konstanten neuen und den uns eigentlich interessierenden alten Koordinaten; Durch Angabe der Umrechnungsformel $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} = \text{const.}, t)$ ist die physikalische Bewegung beschrieben. Nach den Newton, Lagrange und Hamilton Gleichungen handelt es sich bei der Differentialgleichung von Hamilton-Jakobi also um eine vierte Möglichkeit die Bewegungsgleichungen physikalischer Systeme zu formulieren. Da wir wissen, daß solche Gleichungen nach Vorgabe von Anfangsbedingungen eindeutige Lösungen haben, steht zu Vermuten, daß auch (5.2) eindeutig lösbar ist.

Tatsächlich gilt folgender Sachverhalt, den wir der Theorie partieller Differentialgleichungen entnehmen und aufgrund der Komplizität dieser Theorie auch nicht ansatzweise näher begründen können: Eine partielle Differentialgleichung der Struktur (5.2) besitzt eine f + 1-parametrige Familie von Lösungen

$$S_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{f+1}}, \qquad \alpha_1,\ldots,\alpha_{f+1} = \text{const.}$$

Nun ist mit jeder Funktion S auch S + c, c = const. eine Lösung, d.h. wir könnnen die allgemeine Lösung ohne Einschränkung zu

$$S_{\alpha_1,\ldots,\alpha_f} + \alpha_{f+1}$$

ansetzten. Wie können wir die Anwesenheit der Konstanten α_i inhaltlich interpretieren? Auf keinen Fall können diese Größen als neben den neuen Koordinaten (Q_i, P_i) frei wählbare konstante Parameter im Spiel bleiben, denn das würde mit der Eindeutigkeit der Lösung mechanischer Systeme in Widerspruch stehen. Zweitens wissen wir, daß in die Erzeugende S ohnehin f konstante Parameter eingehen, die neuen Impulse P_i nämlich. Der entscheidende Schritt ist nun, die Parameter α_i gemäß $\alpha_i = P_i$ mit den neuen Impulsen zu *identifizieren*. M.a.W. wir wählen die freien Parameter der Lösung einfach als neue Impulse und haben damit einen wesentlichen Schritt der Lösung des Problems, nämlich die Identifikation f konstanter neuer Koordinaten, automatisch gelöst. Es ist hilfreich, sich an dieser Stelle noch einmal die eigentliche Zielsetzung des Programms vor Augen zu führen: Es geht darum, eine eindeutige Transformation auf *irgendeinen* konstanten Satz neuer Koordinaten zu bewerkstelligen. Wie diese neuen Koordinaten aussehen ist zweitrangig. Hauptsache, sie stehen in eindeutigem und bekannten Zusammenhang mit den alten, uns eigentlich interessierenden Koordinaten des Problems.

Nehmen wir also einmal an, wir hätten die Hamilton-Jacobi Gleichung durch eine Schar von Funktionen $S(q_i, P_i \equiv \alpha_i, t)$ gelöst. Unter Verwendung der generischen Eigenschaften der Erzeugenden kanonischer Transformationen ist es dann nicht schwer, die uns interessierende Phasenraumtrajektorie $\mathbf{x}(t)$ zu finden. Zunächsteinmal ist

$$Q_i = \partial_{P_i} S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \text{const.}.$$

da generell det $(\partial_{P_i,q_i}^2 S) = \det(\partial_{q_i} Q_i) \neq 0$, kann diese Gleichung gemäß

$$q_i = q_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$$

invertiert werden. Schließlich setzten wir in

$$p_i = \partial_{q_i} S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$$

die Darstellung $q_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ ein und erhalten $p_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ damit sind die Phasenraumtrajektorien $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ in Abhängigkeit von 2f freien Parametern gefunden. Wie üblich sind diese Parameter durch die Anfangsbedinungen des Problems fixiert.

Die tatsächliche Umsetzung dieses Programms vereinfacht sich für autonome Probleme, Probleme also, in denen H keine explizite Zeitabhängigkeit hat und gemäß $H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = E$ die erhaltene Gesamtenergie des Systems liefert. (Alle weiter unten untersuchten Systemtypen werden diese Eigenschaft haben.) Da die Gesamtenergie erhalten ist, liegt es nahe, sie mit einer der neuen erhaltenen Koordinaten des Problems zu identifizieren.

Tatsächlich kommt man im autonomen Fall in der Hamilton-Jacobi Gleichung mit der Identifikation $P_f \equiv E$ und dem Ansatz

$$S(\mathbf{q}, P_1, \dots, P_f, t) \equiv W(\mathbf{q}, P_1, \dots, P_{f-1}, E) - Et$$

weiter. Beachten Sie, daß die Größe W zeitunabhängig gewählt ist. Substitution dieser Darstellung in die Hamilton Jakobi-Gleichung führt auf

$$H(\mathbf{q}, \partial_{\mathbf{q}}W) - E = 0$$

und damit auf eine Differentialgleichung in nur noch f Variablen. Die so vereinfachten Gleichung wird zeitunabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung genannt. Die zu bestimmende Funktion W heißt **verkürzte Wirkung**⁵⁶ Sobald W bekannt ist, erhalten wir die Lösung des Problems durch Inversion der Gleichungen

$$Q_i = \partial_{P_i} S = \partial_{P_i} W, \qquad i = 1, \dots, f - 1,$$

$$Q_f = \partial_{P_f} S = \partial_E S = \partial_E W - t.$$

Bsp.: Harmonischer Oszillator via Hamilton-Jacobi

Wir illustrieren die Methode am harmonischen Oszillator. Die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

ist zeitunabhängig und wir können von vornherein im Rahmen der autonomen Theorie arbeiten. Die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung lautet

$$\frac{(\partial_q W(q))^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 = E.$$

(Beachten Sie, daß wegen f = 1 W nur der eine neue Impuls P = E existiert und W nur von q abhängt.) Diese Gleichung formen wir gemäß

$$\partial_q W = \sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2}{2}q^2\right)}$$

algebraisch um und erhalten durch Integration

$$W(q) = \int dq \sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2}{2}q^2\right)}.$$

Nun könnten wir darangehen, dieses Integral explizit zu lösen. Dies ist jedoch garnicht nötig, denn in der Theorie von Hamilton-Jacobi kommt es lediglich auf Ableitungen der Erzeugenden an: Es ist

$$Q = \partial_E W - t = \int dq \sqrt{\frac{m}{2\left(E - \frac{m\omega^2}{2}q^2\right)}} - t = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(q\omega\sqrt{\frac{m}{2E}}\right) + c - t,$$

mit einer beliebigen Integrationskonstanten c. Diese Konstante ist unwesentlich, und drückt lediglich die Freiheit der Wahl des zeitlichen Nullpunkts aus. (Durch Umdefinition $t \rightarrow t + c$ kann t eliminiert werden.) Ohne Einschränkung setzen wir c = 0. Inversion der Gleichung führt auf

$$q(Q, E, t) = \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{1}{\omega} \sin((Q+t)\omega)$$

⁵Zur Motivation für diese Namensgebung, siehe unten.

⁶Man kann sich fragen, ob Ansätze des Typs S = W - Et einfach vom Himmel fallen, oder aus der Struktur der zu lösenden Differentialgleichung systematisch generiert werden können. Tatsächlich ist letzteres der Fall. Der oben gemachte Ansatz ist ein Beispiel für einen sogenannten Separationsansatz. Für die systematische Verwendung von Separationsansätzen bei der Lösung von Hamilton-Jacobi Gleichungen für Hamiltonfunktionen mit vereinfachenden Strukturen, siehe z.B.[2].

Aus

$$p = \partial_q W = \sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2}{2}q^2\right)}$$

erhalten wir schließlich noch den Impuls

$$p(Q, E, t) = \sqrt{2mE}\cos((Q+t)\omega)$$

In diesem Beispiel haben die neue Koordinate und Impuls also die Bedeutung von Energie bzw. Anfangszeit des Problems. Man sieht daran, daß die neuen Koordinaten des Hamilton-Jacobi Schemas auch nicht im Entferntesten artverwandt mit den 'eigentlichen' Koordinaten eines Problems sein müssen.

In Hinblick auf den harmonischen Oszillators ist die Hamilton-Jacobi Methode ganz sicher unverhältnismäßig aufwendig. Daraus darf man aber nicht schließen, daß es sich bei Hamilton-Jacobi im allgemeinen um ein ineffizientes Verfahren handelt. Tatsächlich existieren eine Reihe von Problemen, die sich *ausschließlich* im Rahmen der Hamilton-Jacobi Theorie lösen lassen.

Info: Die Erzeugende S der Hamilton-Jacobi Transformation hat eine interessante physikalische Deutung: Wir bilden einmal das vollständige Differential von S:

$$dS = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} dP_i \right) + \frac{\partial S}{\partial t} dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{f} \left(p_i dq_i + Q_i dP_i \right) + (H' - H) dt.$$

Differentiation nach der Zeit führt auf

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^{f} \left(p_i \dot{q}_i + Q_i \dot{P}_i \right) - H = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H,$$

wobei wirH'=0und $\dot{P_i}=0$ verwendet haben. Rück
integration dieser Identität über die Zeit führt auf

$$S(\mathbf{q}(t_1), \mathbf{P}, t_1) - S(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{P}, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H\right) = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Die Aussage dieser Gleichung ist, daß S (bzw. genauer gesagt die zeitliche Änderung von S) durch die entlang der Lösungskurve $q: t \mapsto \mathbf{q}(t)$ berechnete Wirkung S[q] des Problems gegeben ist. Aus diesem Grunde wird die Erzeugende der Hamilton-Jacobi Transformation mit S-wie-Wirkung bezeichnet. Diese Assoziation ist jedoch mit großer Vorsicht zu behandeln; man darf keinesfalls das Wirkungs*funktional* S[q] mit der Erzeugenden*funktion* $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ identifizieren: Bei S[q] handelt es sich um eine Abbildung, die auf der Menge aller Kurven definiert ist. Die Erzeugendenfunktion S entsteht dagegen, wenn ich in S[q]

186

5.4. INTEGRABLE SYSTEME

tatsächliche bei $\mathbf{q}(t_1)$ endende Extremalkurven einsetze und damit eine Funktion von $\mathbf{q}(t_1)$ erhalte.

Man sieht an obiger Konstruktion auch sehr plastisch, wie sich beim Hamilton-Jacobi Schema die Schwierigkeit des Problems von der Lösung der Bewegungsgleichungen (in neuen Koordinaten tirivial) auf das Auffinden der Koordinatentransformation (sehr nichttrivial) verlagert hat: Die die Transformation vermittelnde Erzeugendenfunktion entsteht durch Integration über die *Lösungs*. Die Kennnis der Erzeugendenfunktion ist also mit der Lösung des Problems äquivalent.

5.4 Integrable Systeme

Nach diesen Vorarbeiten können wir zum Zentralthema dieses Kapitels, der Diskussion integrabler und nicht-integrabler mechanischer Bewegungen, zurückkommen. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns zunächst mit den Eigenschaften integrabler Systeme. Die Vorgehensweise wird folgende sein. Wir werden den Begriff des integrablen Systems zunächst einmal definieren, und zwar auf eine Weise, die den Bezug zur Physik und zu den eben eingeführten Konzepten nicht deutlich machen wird. Im folgenden wird diese Definition über eine im wesentlichen geometrische Konstruktion mit Inhalt gefüllt werden. Das geometrische Bild wird auf eine zweite Definition des Begriffs der Integrabilität und auf einen unmittelbaren Bezug zur Theorie von Hamilton-Jacobi führen. Über diese Brückenbildung wird sich die Erweiterung hin zu den nicht-integrablen Systemen ergeben.

Def.(I): Zwei Phasenraumfunktionen f, g stehen miteinander in **Involution**, wenn ihre Poissonklammer verschwindet. Ein mechanisches System mit f Freiheitsgraden ist **integrabel**, wenn f unabhängige miteinander in Involution stehende Erhaltungsgrößen $F_i: \Gamma \to \mathbb{R}, i = 1, ..., f$ existieren.

Im Sinne dieser Definition bezeichnet man einen Satz von k Funktionen f_i als **abhängig**, wenn sich k Funktionen $c : \Gamma \to \mathbb{R}$ finden lassen, so daß $\sum_{i=1}^{k} c_i(\mathbf{x}) df_i(\mathbf{x}) =$ 0. Mit anderen Worten, die Funktionen werden als unabhängig aufgefasst, wenn ihre Differentiale an jedem Punkt des Definitionsgebiets linear unabhängige Elemente des Raums linearer Abbildungen sind. *Inhaltlich* wird mit dieser Forderung folgende Redundanz ausgeschlossen: Für jede Erhaltungsgröße F ist die Funktion g(F)trivialerweise gleichfalls erhalten: $d_tg(F) = g'(F)d_tF = 0$. Allerdings ist nach der Kettenregel auch dg(F) = g'(F)dF. Dies ist gleichbedeutend mit dg - g'(F)dF = 0, d.h. die Funktionen g(F) und F sind nicht unabhängig. Die Definition schließt also ein Überzählen von Erhaltungsgrößen aus.

Im folgenden wollen wir uns generell nur für gebundene Bewegungen interessieren, also für Bewegungen die sich in kompakten Gebieten des Phasenraums abspielen. Die Phasenraumkurven gebundener Bewegungen integrablen Systeme haben die besondere Eigenschaft, daß sie im auf Mannigfaltigkeiten einer sehr speziellen geometrischen Struktur liegen: Es handelt sich um Mannigfaltigkeiten, die diffeomorph⁷

⁷Zwei Mengen M und M' sind **diffeomorph** zueinander, wenn es eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung $F: M \to M'$ gibt, die M auf M' abbildet.

zu einem f-dimensionalen Torus sind. (In der Mechanik werden diese Tori oft als **invariante Tori** bezeichnet.) Mit anderen Worten, es gibt einen Satz von Koordinaten in dem die Bewegung die Form einer Bewegung auf einem Torus annimmt. Eines unserer Ziele wird sein, eine Vorschrift für die Konstruktion dieser Koordinatentransformation zu finden.

Info: Ein k-dimensionaler Torus T^k im Vektorraum \mathcal{R}^n ist eine Untermannigfaltigkeit, die diffeomorph zum kartesischen Produkt $\underbrace{S_1 \times \ldots \times S_1}_k$ von k Einheitskreisen ist. Das

klingt komplizierter als es ist. Ein zweidimensionaler Torus im \mathbb{R}^3 läßt sich z.B. folgendermaßen konstruieren. Wir starten von einem in den \mathbb{R}^3 eingebetteten Einheitskreis (vgl. den gestrichelten Kreis in Fig.5.14 'vorne links'.) Nun drehen wir den Kreis um eine Linie, die außerhalb seiner selbst liegt (z.B. um die in der Figur eingezeichnete Linie.) Die durch eine vollständige Drehung um 2π 'ausgfräste' Fläche definiert den Torus. Diese Fläche ist diffeomorph zum Produkt $S_1 \times S_1$ zweier Kreise, denn für jeden Winkel $\phi \in [0, 2\pi[$ (entsprechend dem horizontalen Kreis in der Figur) haben wir eine 'Kopie' des usrprünglichen Kreises vorliegen. Per Konstruktion handelt es sich bei T^2 um eine Untermannigfaltigkeit (im Sinne der auf Seite 61 gegebenen Definition). Die Konstruktion erlaubt es nämlich eine stetig differenzierbare Abbildung $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to T^2$ anzugeben, die je zwei Winkeln (ϕ, θ) einen Punkt auf dem Torus zuweist.



Abbildung 5.14: Zweidimensionaler Torus T^2 im \mathbb{R}^3 .

Aufgabe: Geben Sie eine explizite Parameterisierung für einen Torus an, dessen äußerer Großkreis (entsprechend dem größeren gestrichelten Kreis in Fig. 5.14) mit Radius R in der $(x_3 = 0)$ -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems liegt und dessen Dicke (Durchmesser des kleineren gestrichelten Kreises der Figur) D ist.

Bevor wir uns über explizite Koordinatendarstellungen Gedanken machen, mußsen wir zunächst einmal die Tatsache an sich verifizieren, daß sich die gebundener Systeme auf Tori abspielt. Wie üblich bezeichnen wir die Bewegungsmannigfaltigkeit mit M. Daß es sich bei M um eine f-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{2f} handelt, folgt direkt aus den Grundannahmen über die Bewegung: Die Phasenraumfunktionen F_i sind erhalten. Daher ist die Bewegung auf die Nullstellenmenge

$$M = \{ \mathbf{x} | F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{x}(0)) = 0, i = 1, \dots, f \}$$

5.4. INTEGRABLE SYSTEME

eingeschränkt. Uber diese Vorschrift (vgl. Seite 61) wird M zu einer (2f - f = f)-dimensionalen Untermannigfaltigkeit. Die Mannigfaltigkeit ist kompakt da die Bewegung als gebunden angenommen war.

Die Mannigfaltigeit M hat ein entscheidendes Strukturmerkmal, das sie von generischen f-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten absetzt und als Torus identifizieren wird: Auf dem Tangentialbündel von M existieren f unabhängige und global stetige Vektorfelder. Es handelt sich hierbei um die den Funktionen F_i kanonisch zugeordneten Vektorfelder \mathbf{X}_{F_i} (vgl. Seite 144).



Abbildung 5.15: Zur Existenz stetiger Vektorfelder auf kompakten Mannigfaltigkeiten.

Daß die Existenz eines global stetigen Vektorfelds auf einer Mannigfaltigkeit keinesfalls selbstverständlich ist, kann man sich an folgendem einfachen Bild klarmachen. Wir stellen uns vor, daß die in Frage kommende Mannigfaltigkeit behaart sei. Ein stetiges Vektorfeld existiert, wenn es möglich ist, ihre Haare so zu kämmen, daß keine Unstetigkeiten, d.h. Haarwirbel entstehen. Man macht sich leicht klar, daß dies zum Beispiel für eine Kugeloberfläche nicht der Fall ist (vgl. Fig. 5.15, links). Wie immer man sie kämmt, es bleibt immer ein Wirbel übrig. Dieser Sachverhalt wird in der Topologie rigoros bewiesen. (In Anlehnung an das oben erwähnte anschauliche Bild wird das entsprechende Theorem manchmal als das 'hariy-ball-Theorem' bzw. als das 'Einen-Igel-kann-man-nicht-kämmen-Theorem' bezeichnet.) Ein Torus dagegen, ist stetig kämmbar. Ein Beispiel für (die Flüsse) zweier unabhängige Vektorfelder auf dem Torus T^2 (entsprechend zweier möglicher stetiger Frisuren) ist in Figur 5.15, rechts angedeutet.

Ein mathematisches Theorem, daß wir hier ohne Beweis (vgl. z.B. [1]) zitieren, besagt, daß eine k-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit mit k unabhängigen stetigen Vektorfeldern \mathbf{X}_i^8 diffeomorph zu einem Torus ist.

Zum Beweis der Aussage, daß auf M f unabhängige Vektorfelder \mathbf{X}_{F_i} existieren, müssen wir zeigen, daß (i) die \mathbf{X}_{F_i} linear unabhängig sind und (ii) tangential an Manliegen. (Zunächst einmal sind sie ja als Vektorfelder $\mathbf{X}_{F_i} \in \Gamma$ definiert; daß sie $\in TM$ sind, ist eine weitergehende Aussage.

Wir beginnen mit (i). Nimm an, die \mathbf{X}_{F_i} wären linear abhängig. Dann gäbe es fKonstanten c_i , so daß $\sum_{i=1}^{f} c_i \mathbf{X}_{F_i} = 0$. Insbesondere wäre für jeden Vektor $\mathbf{X} \in \Gamma$,

⁸Der Begriff 'unabhängig' beduetet hier folgendes: (i) $\forall \mathbf{x} \in M$ sind die k Vektoren $\mathbf{X}_i(\mathbf{x})$ linear unabhängig. (ii) Die den Vektorfeldern zugeordneten Flüsse $\Phi_{i,t}$ kommutieren, in dem Sinne, daß für infinitesimales $s, t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{i,t} \circ \Phi_{j,s} = \Phi_{j,s} \circ \Phi_{i,t}$, $i, j = 1, \ldots, k$. Man kann zeigen[1], daß diese Forderung für die einem Satz involutorischer Funktionen zugeordneten Vektorfelder erfüllt ist.

 $0 = \omega^2 (\sum_{i=1}^f c_i \mathbf{X}_{F_i}, \mathbf{X}) \equiv \sum_{i=1}^f c_i dF_i(\mathbf{X}), \text{ d.h. } \sum_{i=1}^f c_i dF_i = 0.$ (Im zweiten Gleichheitszeichen haben wir die Definition von ω^2 verwendet.) Das Differential $\sum_{i=1}^f c_i dF_i$ kann aber nur dann identisch verschwinden, wenn $\sum_{i=1}^f c_i F_i = \text{const.},$ in Widerspruch zu der angenommenen Unabhängigkeit der Funktionen F_i .

Zum Beweis der Aussage (ii) zeigen wir, daß die M definierenden f Funktionen F_i sich in Richtung der Vektorfelder \mathbf{X}_{F_j} nicht ändern: $\forall i, j : dF_i(\mathbf{X}_{F_j}) = 0$. Zum Beweis verwenden wir die Definition der Vektorfelder über Poissonklammern,

$$dF_i(\mathbf{X}_{F_j}) = \omega^2(\mathbf{X}_{F_i}, \mathbf{X}_{F_j}) = \{F_j, F_i\} = 0.$$

Zusammenfassend haben wir also gefunden, daß die gebundene Bewegung eines integrablen Systems auf einer Mannigfaltigkeit stattfindet, die (bis auf Diffeomorphismen) einem Torus gleicht. Was zu klären bleibt, ist wozu diese Einsicht nützlich ist und in welchem physikalischen Sinne die Bezeichnung 'integrabel' gerechtfertigt ist. Beide Fragen lassen sich mit Hilfe des Konzepts der sogenannten Winkel-Wirkungsvariable beantworten.

5.5 Winkel-Wirkungsvariable

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß sich die Bewegung integrabler Systeme auf Tori abspielt. In diesem Abschnitt sollen Bewegungen dieses Typs konkret beschrieben werden. Im Fall eines integrablen Systems ist Diese Aufgabe im wesentlichen gleichbedeutend mit der Identifikation eines Systems geeigneter Koordinaten.

Ein f-dimensionaler Torus ist über f-winkelartige Variable ϕ_i parameterisierbar (die f Winkel nämlich, die das kartesische Produkt $S_1 \times \ldots \times S_1$ von f Einheitskreisen definieren.) Damit sind f Koordinaten definiert. Es bleibt die Frage, wie die zugehörigen kanonischen Impulse zu wählen sind. In Anlehnung an die dem Hamilton-Jacobi Schema zugrundeliegende Idee könnte man auf die Idee kommen, die erhaltenen Größen F_i selbst als konstante neue Impulse einzuführen. Das Problem ist jedoch, daß die Transformation $(q_i, p_i) \mapsto (\phi_i, F_i)$ i.A. nicht kanonisch sein wird.

Glücklicherweise existiert jedoch ein ausgezeichneter Satz von Koordinaten I_i , der (i) so gewählt ist, daß die Transformation $(q_i, p_i) \rightarrow (\phi_i, I_i)$ kanonisch ist und (ii) die Lösung der gegen Ende des letzten Abschnitts aufgeworfenen Fragen beinhaltet. Aus Dimensionsgründen ist klar, daß die I_i die Dimension $[I_i] = E \cdot T$ einer Wirkung haben⁹. Man bezeichnet sie daher als **Wirkungsvariable**.

Allgemein ist das System (ϕ_i, I_i) von Winkel-Wirkungsvariablen über folgende Forderungen definiert.

- ▷ Die Wirkungsvariablen I_i sind Erhaltungsgrößen (und damit eindeutig als Funktion $I_i = f(\{F_j\})$ der vorgegebenen Erhaltungsgrößen ausdrückbar.)
- ▷ Winkel- und Wirkungsvariable sind zueinander kanonisch konjugiert, $\{\phi_j, I_i\} = \delta_{ij}$ (d.h. die Transformation $(p_i, q_i) \mapsto (\phi_i, I_i)$ ist kanonisch.)

⁹Es ist $[\phi] = 1$ aus $T^{-1} = [\dot{\phi}_i] = [\partial_{I_i}H'] = [I]^{-1}E$ folgt $[I] = E \cdot T$.

5.5. WINKEL-WIRKUNGSVARIABLE

 \triangleright Die Winkelvariable ϕ_i ändert sich um 2π , wenn sich eine Phasenraumtrajektorie einmal um die *i*-te Einheitskreiskomponente des Torus herumwindet.

Eine direkte Konsequenz dieser Forderungen ist, daß sich die Bewegungsgleichungen im System der Winkel-Wirkungsvariable trivial integrieren lassen. Zunächsteinmal muß die transformierte Hamiltonfunktion $H'(\phi, \mathbf{I}) = H(\mathbf{q}(\phi, \mathbf{I}), \mathbf{p}(\phi, \mathbf{I}))^{10}$ unabhängig von ϕ_i sein. Das liegt daran, daß (i) H auf dem Torus ja selbst erhalten ist und daher winkelunabhängig sein muß oder, gleichbedeutend, daß (ii) I_i erhalten ist und daher die zugehörige Koordinate ϕ_i zyklisch sein muß.

Die explizite Form der Bewegungsgleichungen lautet nun

$$I_i = -\partial_{\phi_i} H' = 0,$$

$$\dot{\phi}_i = \partial_{I_i} H' \equiv \omega_i,$$

wobei die ω_i gewisse 'Winkelgeschwindigkeiten' sind, die die Änderungsrate der Variablen ϕ_i spezifizieren. Diese Gleichungen lassen sich unmittelbar zu

$$I_i = \text{const.}$$

$$\phi_i = \omega_i t + \phi_i(0)$$

integrieren, wobei die 2f unabhängigen Konstanten $I_i, \phi_i(0)$ über die Anfangsbedinungen festgelegt sind. Aus der Rücktransformation der Lösung ($\phi(t), \mathbf{I}$) ergibt sich $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = (\mathbf{q}(\mathbf{I}, \phi(t), \mathbf{p}(\mathbf{I}, \phi(t)))$ und damit die gesuchte Phasenraumtrajektorie in ihrer ursprünglichen Parameterisierung.

Das vorläufige Resultat dieser Überlegungen ist, daß die Schwierigkeit der Lösung des Problems auf das Auffinden der Transformation auf Winkel-Wirkungsvariable verlagert worden ist. Die Suche nach dieser Transformation läßt sich am effizientesten im Rahmen der Hamilton-Jacobi Theorie angehen. Im Vergleich zum oben formulierten Hamilton-Jacobi Schema sind wir bescheidener und fordern nicht, daß die neue Hamiltonfunktion verschwinde, sondern lediglich, daß sie ausschließlich von den neuen Impulsen I_i abhänge. Tatsächlich läßt sich die Existenz einer Transformation auf eine nur von f konstanten Impulsen anhängende Hamiltonfunktion als zweite Definition des Begriffs der Integrabilität verwenden:

Def. (II): Ein durch eine Hamiltonfunktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ beschriebenes mechanisches System ist integrabel, wenn eine kanonische Transformation auf eine nur von den neuen Impulsen I_i abhängende Hamiltonfunktion $H'(\mathbf{I})$ existiert.

Aufgabe: Wieso folgen aus Definition II die Forderungen der oben gegebenen Definition I?

Wie gehabt wählen wir die Erzeugende der Transformation vom M_2 -Typ (Variable q_i und I_i unabhängig gewählt) und bezeichnen sie mit $S(\mathbf{q}, \mathbf{I})$. Aus $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H'(\mathbf{I})$ und $p_i = \partial_{q_i} S$ folgt die Hamilton-Jacobi Gleichung

$$H(\mathbf{q}, \partial_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \mathbf{I})) = H'(\mathbf{I})$$

¹⁰Wir erinnern daran, daß wir uns mit autonomen Problemen ohne explizite Zeitabhängigkeit beschäftigen. Daher ist $H'(\mathbf{X}) = H(\mathbf{x}(\mathbf{X}))$ ohne etwaige partielle Zeitableitungen Erzeugender Funktionen.

Im Gegensatz zu generischen mechanischen Problemen läßt sich diese Gleichung für integrable Systeme durch algebraische Manipulationen und Berechnung bekannter Integrale lösen. (Dies ist der letzendliche Grund für die Bezeichnung 'integrable Systeme'.) Wir diskutieren das Lösungsschema zunächst für den Fall eines Systems mit einem Freiheitsgrad.

5.5.1 Winkel-Wirkungsvariable für Systeme mit f = 1

Bewegungen autonomer Systeme in einer Dimension sind grundsätzlich integrabel. Der Grund ist, daß die Energie erhalten ist, damit f = 1 Erhaltungsgröße vorliegt und die Forderung der oben gegebenen Definition erfüllt ist. Die Phasenraumtrajektorie einer gebundenen Bewegung im zweidimensionalen Phasenraum spielt sich auf einer geschlossenen Kurve γ ab, die diffeomorph zu einem Kreises (d.h. dem einfach möglichsten Torus) ist. Diese Kurve ist bekannt. Es ist eine durch die Erhaltung der Energie ausgezeichnete ein-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dagegen ist die Lösung der Bewegungsgleichungen, d.h. die Zeitabhängigkeit des Kurvendurchlaufs noch zu ermitteln.

Zur Lösung dieser Aufgabe gehen wir vom Differential der Erzeugenden der Transformation

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q} dq + \frac{\partial S}{\partial I} dI$$

aus. Wir verwenden nun, daß sich die Kurve lokal eindeutig durch die Variable qdarstellen läßt. Technisch gesprochen: Abgesehen von singulären Punkten gibt es $\forall \mathbf{x}_0 = (q_0, p_0) \in \gamma$ eine (bezüglich γ offene Umgebung $U \subset \gamma$ und ein Intervall I, so daß $U = \{(q, p(q, E)) | q \in I\}$ (vgl. Fig. 5.16.)



Abbildung 5.16: Zur lokalen Parameterisierbarkeit einer Kurve im zweidimensionalen Phasenraum.

Gegeben eine solche Darstellung können wir das Differential entlang der Kurve integrieren und erhalten

$$S(q,E) = \int_{q_0}^q \left(\frac{\partial S}{\partial q'}dq' + \frac{\partial S}{\partial IdI}\right) = \int_{q_0}^q \frac{\partial S}{\partial q'}dq' = \int_{q_0}^q p(q',E)dq',$$

wobei wir im zweiten Gleichheitszeichen verwendet haben, daß sich I auf der Kurve γ nicht ändert, das auf γ eingeschränkte Differential dI also null ist, und die Notation

5.5. WINKEL-WIRKUNGSVARIABLE

andeutet, daß die Wirkung als zunächst als Funktion von q und der erhaltenen Energie resultiert.

Um die Wirkung als Funktion von q und I auszudrücken verwenden wir die bislang nicht verwendete Forderung, daß sich bei einmaligem Durchlauf von γ soll sich die Phasenvariable ϕ um 2π ändern soll. Hieraus läßt sich eine explizite Identität zwischen der Winkelvariable I und der Energie ableiten: Wir betrachten die Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial q} = \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial I}.$$

Globale Integration über die Kurve γ liefert

$$2\pi \stackrel{!}{=} \int_{\gamma} d\phi = \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial q} dq + \frac{\partial \phi}{\partial I} dI \right) = \partial_I \int_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial q} dq.$$

Diese Forderung ist mit

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial q} dq$$

erfüllt. Wir verwenden diese Gleichung als *Definition* der Wirkungsvariablen. Durchführung des Integrals liefert eine Darstellung I = F(E) der Wirkungsvariablen in Abhängigkeit der erhaltenen Energie. Durch Inversion finden wir $E = H' = F^{-1}(I)$ und damit

$$I = \text{const.}, \qquad \phi(t) = (\partial_I H')t + \phi(0) = \partial_I F^{-1}(I)t + \phi(0).$$

Substitution der Darstellung $E = F^{-1}(I)$ in die oben abgeleitete Formel für S liefert die gesuchte Darstellung $S(q, I) = S(q, E|_{E=F^{-1}(I)})$. Schließlich erhalten wir durch Auflösen von

$$\phi = \partial_I S(I,q)$$

nach q eine Darstellung $q(\phi(t), I)$, wobei das bereits berechnete $\phi(t)$ zugrundegelegt ist. Aus $p = \partial_q S$ ergibt sich $p(\phi(t), I)$ und damit die Lösung des Problems.

Wem diese Vorgehensweise unötig kompliziert vorkommt, der sollte sich vor Augen führen, daß wir kein einziges Mal eine Differentialgleichung lösen mußten. Während dies im Falle einer Dimension noch keinen wirklich durchschlagenden Vorteil darstellt, wird eine Methode, die ohne Lösung von Differentialgleichungen auskommt, in höheren Dimensionen zu einem mächtigen Werkzeug.

Info: Die Berechnung des definierenden Integrals für I läßt sich oft über folgenden Trick vereinfachen: Wir verwenden die zweidimensionale Version des Stoke'schen Satzes

$$\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S} dx_1 dx_2 (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1),$$

wobe
i γ eine Kurve und S die von der Kurve berandete Fläche ist.

Aufgabe: Beweisen sie diesen Satz unter Verwendung des dreidimensionalen Stokes'schen Satzes,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot dS,$$

wobei \mathbf{v} ein Vektorfeld, γ eine Kurve im dreidimensionalen Raum, S eine beliebige γ berandende Fläche und dS deren (orientiertes) Flächenelement ist. Hinweis: Legen Sie das Vektorfeld \mathbf{v} , die Kurve γ sowie S in die 12-Ebene.

Wir identifizieren die q/p Richtung des Phasenraums mit der 1/2-Richtung. Damit läßt sich das I definierende Kurvenintegral als

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

mit einem durch $v_1 = -p$, $v_2 = 0$ definierten zweikomponentigen Vektor schreiben (bitte nachprüfen!). Die rechte Seite des zweidimensionalen Stokes'schen Satzes liefert

$$I = \frac{1}{2\pi}A, \qquad A = \int_{S} dp dq, \qquad (5.3)$$

wobei A die von der Bewegungskurve eingeschlossene Fläche ist.

Bsp.: Winkel-Wirkungsvariable für den harmonischen Oszillator

Wie üblich illustrieren wir das neue Lösungsverfahren am harmonischen Oszillator. Zunächst bemerken wir, daß die Phasenraumtrajektorien die Form von Ellipsen haben und damit offensichtlich diffeomorph zu einem ein-dimensionalen Torus (Kreis) sind.

Mit

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \Rightarrow p = \sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2}{2}q^2\right)}$$

ergibt sich

$$S(q,E) = \int_{q_0}^q dq' \sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2}{2}q'^2\right)},$$

(wobei man die Untegrenze $q_0 = q(0)$ zweckmäßigerweise mit der Anfangskoordinate der Bewegung identifizieren wird.) Wie schon oben bei der Lösung des harmonischen Oszillators über Hamilton-Jacobi, verzichten wir darauf, dieses Integral durchzufüren und berechnen zunächst die Beziehung zwischen der Erhaltungsgröße E und der Winkelvariablen I.

Die im Phasenraum von der ellipsenförmingen Bewegungskurve eingeschlossene Fläche ist $A = \pi q_{\text{max}} p_{\text{max}} = 2\pi E/\omega$ woraus

$$I = E/\omega,$$

$$\phi(t) = \omega t + \phi(0)$$

und

$$S(q,I) = \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2m\left(I\omega - \frac{m\omega^2}{2}q'^2\right)}.$$

resultieren. Differentiation nach I führt auf

$$\phi = \partial_I S(q, I) = \omega \int_{q_0}^q dq' \sqrt{\frac{m}{2\left(I\omega - \frac{m\omega^2}{2}q'^2\right)}} = \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\right) + c(q_0, I),$$

wobei $c(q_0, I) = -\arcsin(q_0(m\omega/2I)^{1/2})$ eine von der Untergrenze der Integration her rührende Konstante ist. Auflösung nach q und Subsitution der Lösung für ϕ führt auf das Ergebnis

$$q(t) = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\sin(\omega t + \delta),$$

wobei die Phase $\delta = \phi(0) - c(q_0, I)$ durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist. (Für die oben getroffene Wahl $q_0 = q(0)$ ergibt sich $\phi(0) = 0$ als Anfangskoordinate für ϕ .)

Aufgabe: Berechnen Sie aus $p = \partial_q S$ die Lösung für den konjugierten Impuls p.

5.5.2 Winkel-Wirkungsvariable für Systeme mit $f \ge 1$

Die Transformation auf Winkel-Wirkungsvariable für Systeme mit mehr als einem Freiheitsgrad ähnelt der für den Fall f = 1. Das Ziel ist nach wie vor die Konstruktion eines Lösungsschemas, das ohne Lösung von Differentialgleichungen auskommt.



Abbildung 5.17: Bewegung eines integrablen Systems auf einem 2-dimensionalen Phasenraumtorus.

Wir setzen die durch Vorgabe von Erhaltungsgrößen spezifizierte Bewegungsmannigfaltigkeit M als bekannt voraus. Da M die Geometrie eines f-dimensionalen Torus hat¹¹, existieren f geschlossene Kurven γ_i , die (i) sich nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen lassen und (ii) nicht stetig ineinander überführbar sind (vgl. Fig. 5.17). (Beachten Sie, daß die Wahl der γ_i in keiner Weise eindeutig ist. Jede durch stetige Deformation einer Kurve γ_i gewonnene Kurve γ'_i erfüllt die Kriterien (i) und (ii) genauso gut wie γ_i .)

¹¹Wir erinnern daran, daß M nicht wie ein Torus 'aussehen' muß. Die Bewegungsmannigfaltigkeit ist jedoch zu einem Torus diffeomorph. Anschulich: M kann stetig so deformiert werden, daß sie die Form eines Torus annimmt. Da die Struktur dieser Deformation für alles weitere unerheblich ist, können wir von Anfang an annehmen, daß M einem Torus gleiche.

Wir definieren f Winkelvariable durch

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \sum_{j=1}^f p_j dq_j.$$

Die unter dem Integral auftretenden Größen hängen parametrisch von den f erhaltenen Großen $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_f)$ ab, d.h. die Definition liefert die Winkelvariable gemäß $\mathbf{I} = G(\mathbf{F})$ als eine Funktion der Erhaltungsgrößen. Inversion dieser Beziehung (eine algebraische Operation) liefert $\mathbf{F} = G^{-1}(\mathbf{I})$ also die Erhaltungsgrößen als Funktion der Winkelvariablen. Kritische Leser werden fragen, ob die oben gegebene Definition kanonisch ist, d.h. ob sie von der Wahl der Kurven γ_i abhängt oder nicht. Tatsächlich ist die Wahl der γ_i unerheblich, ein Punkt auf den wir gleich zurückkommen werden. Der nächste Schritt ist die Konstruktion der Erzeugendenfunktion S. Wir wählen ein $\mathbf{x}_0 \in M$ als Referenzpunktpunkt aus und parameterisieren seine Umgebung gemäß $\mathbf{x}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{F}))$ durch die f Variablen \mathbf{q} . (Vgl. die oben in Zusammenhang mit f = 1 gemachten Kommentare zur Möglichkeit einer solchen Parameterisierung.) Der Referenzpunkt selbst ist durch $\mathbf{x}_0(\mathbf{q}_0)$ gegeben. Die Wirkungsfunktion wird nun durch

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{F}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \sum_{j=1}^{f} p_j(\mathbf{q}, \mathbf{F}) dq_j$$

definiert, wobei die Integration sich entlang einer $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{q}_0)$ und $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ verbindenden Kurve τ erstreckt. Die einzige Bedingung, die an τ gestellt wird, ist daß sie sich für $\mathbf{q} \to \mathbf{q}_0$ auf eine Kurve der Länge null zusammenzieht (sich also nicht wie die Kurven γ_i um den Torus herumwindet.)

An dieser Stelle kommen wir nun nicht mehr darum herum zu fragen, ob das so spezifizierte S eine sinnvoll definierte Funktion darstellt, d.h. ob $S(\mathbf{q}, \mathbf{F})$ unabhängig von der Wahl der in die Konstruktion eingehenden Kurve τ ist. Tatsächlich ist die Definition gegenüber der Kurvenwahl invariant (in dem Sinne, daß jede andere \mathbf{x}_0 und \mathbf{x} verbindende Kurve τ' auf den gleichen Wert für S führte.) Um diesen Sachverhalt in einer dem Problem angepassten Weise zu beweisen, wäre ein etwas stärkerer Hintergrund in Differentialgeometrie erforderlich, als wir ihn bislang bereitgestellt haben. (Die relevanten Stichwörter sind 'allgemeiner Stokes'scher Satz' und 'äußeres Produkt von Differentialformen'.) Einen wenig eleganten, aber immerhin tragfähigen Beweis geben wir im folgenden Einschub.

Info: Um zu beweisen, daß die Definition von S gegenüber der Kurvenwahl invariant ist, genügt es zu zeigen, daß

$$\oint_{\gamma} \sum_{j=1}^{J} p_j dq_j = 0$$

wobei γ eine stetig auf Länge Null kontrahierbare Kurve ist. (Kurven mit dieser Eigenschaft heißen **nullhomotop**¹².) Denn für zwei \mathbf{x}_0 und \mathbf{x} verbindende Kurven τ und τ' ist (vgl.

 $^{^{12}}$ Man kann sich diesen Begriff veranschaulichen, indem man sich vorstellt, daß die in Frage kommende geschlossene Kurve eine Seilschlinge sei. Nullhomotopie bedeutet, daß die Schlinge auf

5.5. WINKEL-WIRKUNGSVARIABLE

Fig. 5.18)

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{\tau} \sum_{j=1}^{f} p_j dq_j - \int_{\tau'} \sum_{j=1}^{f} p_j dq_j = \oint_{\gamma} \sum_{j=1}^{f} p_j dq_j,$$

wobei γ die durch Verkettung von τ und τ' gebildete Kurve ist. Die definierenden Eigenschaften von τ und τ' beinhalten, daß γ nullhomotop ist.

Aufgabe: Rekapitulieren Sie die in Kapitel 1 gegebene Definition konservativer Kräfte, insbesondere den Zusammenhang zwischen verschwindenden Kurvenintegralen und der Möglichkeit in kanonischer Weise eine Potentialfunktion zu definieren. Sehen Sie einen Zusammenhang zu der hiesigen Diskussion? Rekapitulieren Sie den Beweis des Stoke'schen Satzes.



Abbildung 5.18: Zur Invarianz der Wirkungsfunktion ${\cal S}$ gegenüber der Wahl der zugrundegelegten Kurven.

Der Fußgängerbeweis dieses Sachverhalts vollzieht sich in zwei gedanklichen Schritten. Zunächsteinmal vereinfachen wir die Fragestellung, indem wir uns klarmachen, daß es hinreichend ist

$$\oint_R \sum_{j=1}^J p_j dq_j = 0,$$

zu zeigen, wobei R ein infinitesimal kleiner Polygonzug (z.B. von der Form eines Rechtecks ist). Der Grund hierfür ist in Fig. 5.19 angedeutet. Eine endliche Kurve kann durch eine große Zahl N kleiner Kurven R_i 'zugepflastert' werden. Für ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{v} ist $\oint_{\gamma} d\mathbf{v} = \lim_{N \to \infty} \sum_i \oint_{R_i} d\mathbf{v}$, wobei \oint_{R_i} für ein im Uhrzeigersinn um R_i durchgeführtes Linienintegral steht. Der Grund ist, daß sich die über die Grenzlinien zwischen benachbarten R_i im Inneren von γ durchgeführten Linienintegrale gegenseitig wegheben (bitte klarmachen). Der einzig unkompensierte Beitrag ist der über die 'Oberfläche' der Ansammlung von R_i 's. Für $N \to \infty$ wird die aus Rechtecken gebildete Oberfläche immer 'glatter' und gleicht sich schließlich der Form von γ an.

Was also läßt sich über ein infinitesimales Kurven
integral über R sagen? Sicher wird das Integral über das Differentia
l $\sum_j p_j dq_j$ nicht für allgemeine geschlossene Kurvenzüge verschwinden

Aufgabe: Geben sie eine geschlossene Kurve γ im Phasenraum an, für die $\oint_{\gamma} \sum_{j} p_{j} dq_{j} \neq 0$.

Länge null zusammenziehbar ist. Eine *nicht* nullhomotope Kurve wäre z.B. eine, die sich einmal um den Torus herumwindet. Die entsprechende Schlinge kann nicht zusammengezogen werden.



Abbildung 5.19: Zur Integration über geschlossene Kurven auf dem Phasenraumtorus.

Das Verschwinden muß also damit zusammenhängen, daß wir es mit Kurven auf einer Mannigfaltigkeit besonderer Geometrie zu tun haben. Die Besonderheit der Geometrie des Phasenraumtorus liegt in der Existenz f unabhängiger Vektorfelder $\mathbf{X}_i \equiv \mathbf{X}_{f_i}$, die den involutorischen Funktionen f_i zugeordnet sind. Es wird daher zweckmäßig sein, die Kurven R so zu wählen, daß sie in direktem Bezug zu den \mathbf{X}_i stehen.



Abbildung 5.20: Zur Konstruktion der Integrationsflächen R über die Vektorfelder \mathbf{X}_{f_i} .

Es sei \mathbf{x} als einer der Eckpunkte der zu konstruierenden infinitesimalen Kurve R festgelegt. Jedem der f Vektoren $\mathbf{X}_i(\mathbf{x})$ ist ein Fluß $\Phi_s(\mathbf{x}) \equiv \Phi(s, \mathbf{x})$ über die Forderung $d_s|_{s=0}\Phi_i(s, \mathbf{x}) = \mathbf{X}_i$ zugeordnet (vgl. Fig. 5.20). Aus der Unabhängigkeit der \mathbf{X}_i folgt – und das ist der entscheidende Punkt – daß die Umgebung von \mathbf{x} durch die f Parameter $\mathbf{s} \equiv (s_1, \ldots, s_f)$ gemäß $\mathbf{x}(\mathbf{s}) = \Phi_f \circ \Phi_{f-1} \circ \ldots \circ \Phi_1(x)$ eindeutig darstellbar ist. Wir definieren uns nun einen kleinen Kurvenzug R als Vereinigungsmenge der vier Teilkurven $\mathbf{x}(u,0) \ \mathbf{x}(\epsilon,v), \ \mathbf{x}(u,\epsilon), \ \mathbf{x}(0,v), u, v \in [0,\epsilon]$ (vgl. Fig. 5.20), wobei die Argumente u und v für die Parameter s_1 und s_2 stehen, alle anderen Parameter s_i auf Null gesetzt sind und ϵ infinitesimal ist. Mittels derart konstruierter Kurvenzüge läßt sich jede geschlossene nullhomotope Kurve auf dem Torus approximieren. Das zu berechnende Integral schreibt sich nun

$$\oint_{R} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint_{R} \sum_{j=1}^{f} \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s_{j}} ds_{j} =$$

5.5. WINKEL-WIRKUNGSVARIABLE

$$= \int_0^{\epsilon} \mathbf{p}(u,0) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}(u,0)}{\partial u} du + \int_0^{\epsilon} \mathbf{p}(\epsilon,u) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}(\epsilon,v)}{\partial v} dv - \int_0^{\epsilon} \mathbf{p}(u,\epsilon) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}(u,\epsilon)}{\partial u} du - \int_0^{\epsilon} \mathbf{p}(0,v) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}(\epsilon,v)}{\partial v} dv.$$

Da ϵ beliebig klein gewählt werden kann, bietet es sich an, die Integrale in führender Ordnung in einer Taylorentwicklung (nach den Variablen ϵ, u, v) zu berechnen. Das Ergebnis dieser Rechnung (Übungsaufgabe!) ist

$$\oint_{R} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \epsilon^{2} \sum_{i=1}^{J} \left(\frac{\partial p_{i}}{\partial v} \cdot \frac{\partial q_{i}}{\partial u} - \frac{\partial p_{i}}{\partial u} \cdot \frac{\partial q_{i}}{\partial v} \right) \Big|_{u=v=0} + O(\epsilon^{3})$$

Nun ist

$$\partial_u q_i(u,0) = \partial_u q_i(\Phi_{1,u}(\mathbf{x})) = \partial_u \Phi_{1,u}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_1^i(\mathbf{x})$$

die *i*-te Komponente des Vektors $\mathbf{X}_1(\mathbf{x})$ und $\partial_v q_i$ die *i*-te Komponente von \mathbf{X}_2 . Aus einem Vergleich mit der in Kapitel 4 gegebenen Definition der symplektischen Bilinearform ω^2 ergibt sich, daß

$$\sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial p_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial u} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) \Big|_{u=v=0} = \sum_{i=1}^{f} (\mathbf{X}_1^i \mathbf{X}_2^{i+f} - \mathbf{X}_1^{i+f} \mathbf{X}_2^i) = \omega^2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = -\{F_1, F_2\} = 0.$$

Damit verschwindet das Kurvenintegral bis auf Korrekturterme, die im Limes $\epsilon \to 0$ vernachlässigbar werden. Das abschließende Ergebnis dieser Analyse ist, daß Integrale $\int_{\gamma} \mathbf{p} d\mathbf{q}$ über nullhomotope Kurven γ verschwinden und damit die Erzeugendenfunktion S wohldefiniert ist.

Aufgabe: Gehen Sie die Argumentationskette nocheinmal durch und begründen Sie, warum die oben gegebene Definition der Wirkungsvariablen unabhängig von der Wahl der Räpresentantenkurven γ_i ist.

Damit ist der wesentliche Teil der Arbeit geleistet. Wie im Fall im Fall f = 1 verwenden wir die Relation $\mathbf{F} = G^{-1}(\mathbf{I})$ und drücken die Erzeugende $S(\mathbf{q}, \mathbf{I}) = S(\mathbf{q}, \mathbf{F}(\mathbf{I}))$ als Funktion der Wirkungsvariablen aus. Die neuen Bewegungsgleichungen

$$\dot{I}_i = -\partial_{\phi_i} H'(\mathbf{I}) = 0,
\dot{\phi}_i = \partial_{I_i} H'(\mathbf{I}) \equiv \omega_i$$

integrieren sich trivial zu

$$I_i = \text{const.}$$

$$\phi_i = \omega_i t + \phi_i(0)$$

Schließlich erhalten wir durch Auflösung der Transformationsformeln

$$\mathbf{p} = \partial_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \mathbf{I}), \qquad \boldsymbol{\phi} = \partial_{\mathbf{I}} S(\mathbf{q}, \mathbf{I})$$

nach $(\mathbf{q}(\boldsymbol{\phi}(t), \mathbf{I}), \mathbf{p}(\boldsymbol{\phi}(t), \mathbf{I}))$ die Lösung des Problems. Wir bemerken nocheinmal, daß keine Differentialgleichungen zu lösen waren. Zusammenfassend haben wir in diesem Abschnitt

- ▷ die Phasenraumgeometrie integrabler Systeme über das Konzept der invarianten Tori beschrieben,
- \triangleright eine auf eine nur von f Wirkungsvariablen abhängende Hamiltonfunktion explizit konstruiert (und damit die Äquivalenz der beiden oben für den Begriff der Integrabilität gegebenen Definitionen gezeigt) und
- ▷ einen Algorithmus für die Lösung der Bewegungsgleichungen gegeben.

Damit haben wir die Eigenschaften integrabler Systeme hinreichend im Griff.

5.6 Störung Integrabler Systeme

Ausgehend von der im vorangegangenen Abschnitt durchgeführten Analyse integrabler Systeme, wollen wir nun die größere Klasse generischer autonomer Systeme, inklusive der nichtintegrablen Systeme untersuchen. Ein naheliegender Zugang zu diesem Problem ist von einem vorgegebenen integrablen System auszugehen, und zu untersuchen, was passiert, wenn es einer kleinen Störung ausgesetzt wird. Diese Vorgehensweise wird uns nicht nur wichtige Einblicke in die Physik nichtintegrabler Systeme ermöglichen, sondern ist auch für sich genommen anwendungsrelevant: Kein in der Natur ablaufender mechanischer Prozess verläuft völlig ungestört. Z.B. sind die in Kapitel 1 unter der Zweikörper Zentralkraftannanhme analysierten integrablen Planetenbewegungen Störungen durch alle möglichen anderen Himmelskörper ausgesetzt. Es ist wichtig, Kriterien zu kennen, die entscheiden, unter welchen Bedingungen eine Störung eine integrable Bewegung nur geringfügig beeinflüßt, bzw. sie in ein Regime der Instabilität treiben. Der Apparat, der die Beantwortung derartiger Fragestellungen ermöglicht, wird in der Physik allgemein (nicht nur der Mechanik) als **Störungstheorie** bezeichnet.

5.6.1 Störungstheorie

Ziel ist es, die Sensibilität eines integrablen Systems gegenüber einer generischen Störung zu analysieren. Wir betrachten hierzu ein durch die Hamiltonfunktion

$$H = H_0 + \epsilon H_1$$

beschriebenens mechanisches System, wobei H_0 Hamiltonfunktion eines integrablen Systems, H_1 eine generische Hamiltonfunktion und ϵ ein kleiner dimensionsloser Parameter ist, über den die Stärke der Ankopplung von H_1 kontrolliert ist.

Nach Voraussetzung existiert für H_0 eine Transformation auf einen Satz von Winkel-Wirkungsvariablen (ϕ_i, I_i). Wir beginnen unsere Untersuchung, indem wir das komplette Problem in diesen Koordinaten darstellen:

$$H(\phi, \mathbf{I}) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\phi, \mathbf{I}),$$

wobei verwendet wurde, daß der integrable Anteil H_0 nur von den Wirkungsvariablen abhängt und H_1 über die neuen Koordianten parameterisiert ist. Wir versuchen nun, das so gestellte Problem zu 'integrieren', d.h. eine kanonische Transformation auf einen neuen Satz von Koordinaten (ϕ'_i, I'_i) zu finden, dergestalt, daß die in neuen Koordinaten ausgedrückte Hamiltonfunktion $H'(\mathbf{I}')$ nur von den *neuen* Wirkungsvariablen abhängt. Die Suche nach einer solchen Transformation gehen wir im Rahmen der im letzten Kapitel formulierten Version der Hamilton-Jacobi Theorie an. Gesucht ist also eine Erzeugende $S(\phi, \mathbf{I})$, die (i) von den alten Koordinaten ϕ_i und den neuen Impulsen I'_i abhängt und (ii) die Hamilton-Jacobi Gleichung

$$H(\phi, \partial_{\phi} S(\phi, \mathbf{I}')) = H'(\mathbf{I}')$$

löst. Es ist in keiner Weise klar, daß eine solche Transformation auffindbar, denn in diesem Fall wäre auch das gestörte Problem integrabel, eine Annahme, die nicht gemacht wurde. Aber zumindest suchen kann man nach einer Lösung S ja.

Bis jetzt haben wir noch nicht verwendet, daß die Störung ϵH_1 als klein vorausgesetzt ist. Da H dicht bei H_0 liegt, wird die gesuchte Transformation S in der Nähe der identischen Transformation

$$S_0(\phi, \mathbf{I}') = \phi \cdot \mathbf{I}'$$

liegen.

Aufgabe: Rekapitulieren Sie, warum S_0 die identische Transformation $\phi = \phi'$, $\mathbf{I} = \mathbf{I}'$ erzeugt.

Wir gehen also von dem Ansatz

$$S(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{I}') = S_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{I}') + \epsilon S_1(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{I}')$$

mit gesuchtem S_1 aus und verwenden die Tatsache, daß ϵ beliebig klein gewählt werden kann, indem wir die Hamilton-Jacobi Gleichung in führende Ordnung nach ϵ entwickeln:

$$H_{0}(\partial_{\phi}(S_{0} + \epsilon S_{1})) + \epsilon H_{1}(\phi, \partial_{\phi}(S_{0} + \epsilon S_{1})) = H'(\mathbf{I}') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{0}(\mathbf{I}') + \epsilon \partial_{\mathbf{I}}\Big|_{\mathbf{I}=\mathbf{I}'} H_{0}(\mathbf{I}) \cdot \partial_{\phi}S_{1} + \epsilon H_{1}(\phi, \mathbf{I}') + O(\epsilon^{2}) = H'(\mathbf{I}')$$

Nun muß diese Gleichung für beliebiges ϵ Gültigkeit haben. Die einzige Möglichkeit, diese Forderung zu erfüllen, besteht darin zu fordern, daß die Koeffizienten jedes Beitrags von der Ordnung ϵ^n , $n = 0, 1, \ldots$ einzeln verschwinden. Im einzelnen:

$$H_0(\mathbf{I}') \stackrel{!}{=} H'(\mathbf{I}')$$
$$\partial_{\mathbf{I}}\Big|_{\mathbf{I}=\mathbf{I}'} H_0(\mathbf{I}) \cdot \partial_{\boldsymbol{\phi}} S_1 \stackrel{!}{=} -H_1(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{I}')$$

Die uns interessierende Gleichung ist die zweite. Wir verwenden, daß nach Konstruktion der Winkel-Wirkungsvariable $\partial_{I_i} H_0 = \omega_i$ den konstanten Vektor der Umlaufsfrequenzen des invarianten Torus liefert. Die zu analysierende Gleichung nimmt damit die Form

$$\omega \cdot \partial_{\phi} S_1(\phi, \mathbf{I}') = -H_1(\phi, \mathbf{I}')$$

an. Nun ist jedes ϕ_i eine winkelartige Variable, d.h. die Koordinaten ϕ_i und $\phi_i + 2\pi$ beschreiben den gleichen Punkt im Phasenraum und können identifiziert werden. Das bedeutet, daß alle in der Gleichung auftretenden Elemente periodische Funktionen der ϕ_i sind und daher in eine Fourierreihe entwickelt werden können.

Aufgabe: Rekapitulieren Sie die Definition von Fourierreihen. Wie lautet die Fourierreihendarstellung einer Funktion $f(\phi_1, \ldots, \phi_f)$, die in allen Argumenten $\phi_i 2\pi$ -periodisch ist? Wie berechnen sich die Fourierkoeffizienten aus f?

Für eine beliebige Funktion $f(\boldsymbol{\phi}) \operatorname{der} \phi_i$ setzen wir

$$f(\phi) = \sum_{k_1, \dots, k_f = -\infty}^{\infty} f_{k_1, \dots, k_f} e^{i(k_1\phi_1 + \dots + k_f\phi_f)},$$

wobei f_{k_1,\ldots,k_f} die Fourierkoeffizienten der Entwicklung sind. Zur Vereinfachung der Notation definieren wir den *f*-komponentigen Koeffizientenvektor $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_f)$ und schreiben

$$f(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\phi}}.$$

(Behalten Sie im Auge, daß die Koeffizienten des Vektors \mathbf{k} ganze Zahlen sind.) Als unmittelbare Konsequenz dieser Darstellung ergibt sich

$$\partial_{\phi_i} f(\phi_i) = \sum_{\mathbf{k}} i k_i e^{i \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\phi}_i}$$

Anwendung dieser allgemeinen Formeln auf die Elemente der uns interessierenden Gleichung führt auf

$$\sum_{\mathbf{k}} \left(i\omega \cdot \mathbf{k} S_{1,\mathbf{k}}(\mathbf{I}') + H_{1,\mathbf{k}}(\mathbf{I}') \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\phi}} = 0.$$

Nun muß diese Gleichung für beliebiges ϕ gelten, was nur möglich ist, wenn die Koeffizienten einzeln verschwinden¹³: $i\omega \cdot \mathbf{k}S_{1,\mathbf{k}}(\mathbf{I}') + H_{1,\mathbf{k}}(\mathbf{I}') = 0$ bzw.

$$S_{1,\mathbf{k}}(\mathbf{I}') = i \frac{H_{1,\mathbf{k}}(\mathbf{I}')}{\omega \cdot \mathbf{k}}.$$

Damit sind wir am vorläufigen Ziel angelangt: Es ist gelungen, in führender Ordung in ϵ eine explizite Darstellung der erzeugenden Funktion über die als bekannt vorausgesetzte Störung H_1 anzugeben. Fourier-Rücktransformation dieser Gleichung führt auf eine Funktion $S_1(\phi, \mathbf{I}')$ die für kleiner werdendes ϵ eine beliebig akkurate Transformation auf die Lösungskoordinaten des gestörten Problems vermittelt.

Gleichzeitig jedoch, sind wir in eine mathematische Katastrophe gelaufen!: Betrachten wir z.B. den vergleichsweise einfachen Fall eines Systems mit f = 2 Freiheitsgraden. In diesem Fall ist $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ und der im Nenner der Lösung

¹³Dieses Argument drückt einfach die allgemeine Tatsache aus, daß für eine identisch verschwindende Funktion $f(\phi) = 0$ auch die Fourierkoeffizienten $f_{\mathbf{k}} = 0$ identisch verschwinden.

auftretende Ausdruck nimmt die Form $\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2$ an. Nehmen wir nun einmal an, daß das Verhältnis der beiden Umlaufsfrequenzen

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \equiv \frac{n_1}{n_2}$$

rational mit ganzzahligen n_1, n_2 sei. In diesem Fall ist für $k_1 = -n_2$ und $k_2 = n_1$ $\omega \cdot \mathbf{k} = 0$ und die rechte Seite der Gleichung explodiert. Dies ist das berühmte Problem der verschwindenden Nenner.

Seine inhaltliche Bedeutung ist, daß für integrable Systeme mit eingeprägtem rationale, Frequenzverhältnis eine störungstheoretische Behandlung externer störender Einflüsse ausscheidet, da bereits die führenden Beiträge einer Entwicklung nach der Störungsstärke divergieren. Anders herum formuliert: Integrable Probleme mit rationalem Frequenzverhältnissen sind hoch instabil gegenüber externen Einflüssen. Beachten Sie, daß der Einwand, ein rationales Frequenzverhältnis repräsentiere einen Ausnahmefall physikalisch zu kurz greift. Jedes irrationale Frequenzverhältnis läßt sich beliebig gut durch ein rationales approximieren. (Erinnern sie sich daran, daß die rationalen Zahlen dicht in den reellen liegen.) Vom Standpunkt des Physikers aus besteht kein Unterschied zwischen einer irrationalen Zahl und einer rationalen, sofern letztere nur dicht genug an erstere herankommt.

Damit sind wir gezwungen uns mit folgenden zwei Fragestellungen auseinanderzusetzen:

- ▷ Was passiert, wenn ein integrables System mit ω_1/ω_2 dicht bei einer irrationalen Zahl (d.h. ω_1/ω_2 nur durch $n_1(n_2$ mit großen n_1 und n_2 darstellbar) durch ϵH_1 gestört wird?
- ▷ Was passiert tatsächlich, wenn ein System mit generischem rationalen Frequenzverhältnis einer Störung ausgesetzt wird?

5.6.2 KAM-Theorem

Eine Antwort auf die erste der oben gestellten Fragen – die Störungsanfälligkeit eines Torus mit 'fast irrationalem' Frequenzverhältnis – wurde 1954 von Kolmogorov formuliert und in den sechziger Jahren von Arnold und Moser bewiesen. Sowohl die präzise Formulierung als auch der Beweis des Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) Theorems sind kompliziert (siehe z.B. [tabor]). Wir beschränken uns darauf, einen groben Abriß seines inhaltlichen Gehalts zu geben.

Betrachten wir der Einfachheit halber ein Problem mit f = 2 Freiheitsgraden. Neben einer Reihe von anderen technischen Forderungen sei vorausgesetzt, daß die Jacobideterminante

$$\det\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial I_j}\right) \neq 0$$

sei, d.h. daß eine lokal eindeutige Beziehung zwischen Wirkungsvariablen und charakteristischen Frquenzen bestehe. Wir betrachten den Fall eines Frequenzverhältnisses, das 'hinreichend irrational' ist, und zwar in dem Sinne, daß

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{k(\epsilon)}{q^{5/2}},\tag{5.4}$$



Abbildung 5.21: Regionen instabilen Frequenzverhältnisses ω_1/ω_2 .

wobei $k(\epsilon)$ eine Funktion der Störungsstärke mit $k(\epsilon) \searrow 0$ für $\epsilon \searrow 0$ und p, q Primzahlen sind. Inhaltlich besagt die Forderung, daß das Frequenzverhältnis sich von rationalen Zahlen fernhalten soll, wobei der einzuhaltende Abstand mit wachsendem q bzw. kleiner werdender Störungsstärke kleiner werden darf.

Eine solche Forderung kann nur dann physikalische Bedeutung haben, wenn sie von einer Zahlenmenge $\{\omega_1/\omega_2 | \omega_{1,2} \in \mathbb{R}\}$ mit Maß ungleich null erfüllt ist. Anderenfalls nämlich, würden die ausgezeichneten Frequenzverhältnisse wie ein Satz isolierter Punkte auf der Zahlengeraden liegen und bereits eine infinitesimale Änderung der Parameter führte zu einer Verletzung der Bedingung. Tatsächlich wird durch die Bedingung oben eine Menge von Maß ungleich Null definiert, wovon man sich durch folgende einfache Abschätzung überzeugen kann. O.B.d.A. sei $\omega_2 \geq \omega_1$, d.h. wir können uns auf die Betrachtung des Intervalls [0, 1] beschränken. Betrachten wir zunächst ein festes q. Für jedes q gibt es O(q) (Prim)zahlen p mit $p/q \in [0, 1]$. Jede dieser O(q) rationalen Zahlen induziert eine 'no-go-Zone' der Ausdehnung $k(\epsilon)/q^{5/2}$. Die Gesamtausdehnung des verbotenen Gebiets läßt sich durch Summation über alle q zu

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{k(\epsilon)}{q^{5/2}} q = k(\epsilon) \sum_{q=1}^{\infty} q^{-3/2} = \text{const.} \cdot k(\epsilon) \stackrel{\epsilon \to 0}{\to} 0.$$

Die verbotene Zone der Frequenzverhältnisse nimmt also in ihrem Gesamtumfang für kleiner werdende ϵ immer mehr ab. Jede rationale Zahl induziert ein kleines verbotenes Gebiet, man kann sich die gesamt verbotene Zone also als eine fragmentierte Untermenge des Intervalls [0, 1], vorstellen, wobei die Komplementärmenge Maß echt größer Null hat.

Das KAM-Theorem besagt, daß Tori mit Frequenzen, die die Bedingung (5.4) erfüllen, für kleine ϵ unter Störungen ϵH_1 stabil bleiben. Ein Torus mit einem solchen robusten Frequenzverhältnis wird bei Anwesenheit einer Störung in einen leicht geänderten Torus deformiert. Das beinflußte System ist nach wie vor integrabel. Für wachsende Störungsstärke ϵ fallen mehr und mehr Tori aus dem Stabilitätskriterium heraus. Ab einem gewissen Grenzwert ϵ_0 sind keine Tori mehr vorhanden, und das Problem hat nichts mehr mit der integrablen Ausgangssituation gemein.

Im folgenden Abschnitt wollen wir konstruktiv untersuchen, wie sich ein solcher Übergang von integrablem zu nicht-integrablem Verhalten vollziehen kann.

5.7 Nichtintegrable Systeme

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns zunächst mit der Frage, wie sich der Ubergang von integrablem zu nichtintegrablem Verhalten konstruktiv beschreiben läßt. Wie oben auch verwenden wir als Ausgangsbasis unserer Untersuchungen ein beliebig vorgegebenes integrables System – beschrieben durch eine Hamiltonfunktion $H(\mathbf{I})$ und einen Satz von Winkel-Wirkungsvariablen (ϕ, \mathbf{I}) – und fragen nach den Auswirkungen einer kleinen Störung $\epsilon H_1(\phi, \mathbf{I})$.

Um diese Frage in effizienter Weise untersuchen zu können, bedarf es einer Methode, die Bewegung auf invarianten Tori in etwas konkreter Weise zu beschreiben, als wir es bislang getan haben. Eine sehr effiziente Beschreibungsmöglichkeit besteht in den sogenannten 'Twist Maps'.

5.7.1 Twist Maps

Die sogennanten Twist Maps erlauben eine einfache Beschreibung wesentlicher Elemente der Bewegung mechanischer Systeme auf Phasenraumtori. Vor der eigentlichen Definition dieser Abbildungen fassen wir noch einmal die oben abgeleiteten wesentlichen Grundelemente der Bewegung integrabler Systeme zusammen:

- ▷ Die Bewegung integrabler Systeme im Phasenraum spielt sich auf invarianten Tori ab.
- ▷ Jeder Torus ist durch einen Satz konstanter Wirkungsvariable (I_1, \ldots, I_f) charakterisiert.
- ▷ Die charakteristischen Umlauffrequenzen ω_i der Wirkungsvariable ϕ_i hängen gemäß $\omega_i = \partial_{I_i} H(\mathbf{I})$ von den Wirkungsvariablen ab.

Bei einer twist map handelt es sich nun im wesentlichen um eine durch einen Phasenraumtorus hindurchgelegte surface of section (vgl. Seite 166f). Die Grundidee ist in Figure 5.22 für ein System mit zwei Freiheitsgraden angedeutet.



Abbildung 5.22: Zur Definition einer twist map für ein System mit zwei Freiheitsgraden.

Als surface of section sei die linke der beiden abgebildeten Schnittflächen gewählt. Die verschiedenen in dieser Ebene abgetragenen Kreise deuten die Schnittlinien der Fläche mit durch verschiedene Werte der Wirkungsvariablen I_1 charakterisierten Tori an. Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß die Umlaufsfrequenzen $\omega_1 = \partial_{I_1} H$ für zunehmendes I_1 (entsprechend zunehmendem Radius r der Schnittkreise) zunehmen.

Wir betrachten nun die Durchstoßpunkte einer durch festgehaltenes (I_1, I_2) eingeschränkten Phasenraumtrajektorie mit der Schnittfläche. Klar ist, daß alle diese Punkte $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...)$ auf einem Schnittkreis liegen müssen (vgl. Fig.5.22) unten. Aufgrund der einfachen Struktur der in Winkel-Wirkungsvariablen formulierten kanonischen Gleichungen lassen sich aber noch wesentlich weitergehende Aussagen machen. Für ein System mit f = 2 ist die explizite Lösung der Gleichungen durch

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \omega_1 t, \\ \phi_2(t) &= \omega_2 t \end{aligned}$$

gegeben¹⁴. Die surface of section ist durch einen festen Wert der Winkelvariablen $\phi_2 \equiv \phi_0 \ definiert$. Ohne Einschränkung setzen wir auch $\phi_0 = 0$. Diese Fläche wird zu jeder Zeit $t_i \equiv 2\pi i/\omega_2 \ (\Rightarrow \phi_2(t) = 2\pi i)$ durchstoßen. Der Wert der Winkelvariablen ϕ_1 zu diesen Zeiten ist durch

$$\phi_1(t_i) \equiv \phi_i = 2\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2} \equiv 2\pi i \alpha$$

gegeben, wobei wir die vereinfachte Notation $\phi_i \equiv \phi_1(t_i)$ und die sogenannte **Rota**tionszahl

$$\alpha \equiv \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

eingeführt haben. Dieser Parameter hängt gemäß $\alpha(r) = \alpha(I_1(r))$ von dem über die Wirkungsvariable I_1 spezifizierten Radius des Umlaufkreises ab. (Beachten Sie, daß aufgrund unserer Vereinbarung einer mit wachsendem r zunehmenden Frequenz ω_1 die Funktion $\alpha(r)$ monoton wachsend ist.) Das vorläufige Ergebnis dieser Untersuchung ist, daß die Koordinaten $\mathbf{x}_i \equiv (r_i, \phi_i)$ der Durchstoßpunkte in der surface of section durch $(r_i = r, \phi_i = 2\pi i\alpha)$ gegeben sind. Für alles weitere ist es sinnvoll, diesen Sachverhalt noch etwas anders zu formulieren: Wir erklären durch

$$T: \mathbb{R}^+ \times \begin{bmatrix} 0, 2\pi \end{bmatrix} \to \mathbb{R}^+ \times \begin{bmatrix} 0, 2\pi \end{bmatrix}$$
$$(r, \phi) \mapsto (r, \phi + 2\pi\alpha(r))$$

eine auf der gesamten surface of section definierte Abbildung, die sogenannte **twist** map. Mit dieser Definition erhalten wir den i + 1-ten Durchstoßpunkt \mathbf{x}_{i+1} gemäß $\mathbf{x}_{i+1} = T(\mathbf{x}_i)$ als Bild des *i*-ten Punktes unter der twist map.

Die twist map bildet Kreise festen Radius I in sich ab. Ihr Name erklärt sich daraus, daß eine Linie festen *Winkels* ϕ aufgrund der Tatsache monoton wachsendenden $\alpha(I)$'s durch diese Abbildung verdreht ('twisted') wird (vgl. Fig.5.23).

Wir bemerken noch, eine Tatsache, die weiter unten wichtig werden wird, daß die twist map eine flächenerhaltende Abbildung ist. 'Flächenerhaltend' bedeutet hier,

¹⁴Ohne Einschränkung haben wir die Anfangswerte $\phi_i(0)$ auf Null gesetzt.



Abbildung 5.23: Zur Namensgebung 'twist map': Linien L konstanten Winkels werden durch die Abbildung T im Gegenuhrzeigersinn verdreht.

daß sich eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ der surface of section mit Fläche

$$F_A \equiv \int_A r dr d\phi$$

unter der twist map auf eine Menge T(A) gleicher Fläche abbildet. (Die Notation $\int_A r dr d\phi$ deutet an, daß über alle in A gelegenen Flächenelemente $r dr d\phi$ zu integrieren ist.) Beweis: Es ist

$$F_{T(A)} = \int_{T(A)} r dr d\phi = \int_{A} r(T(r,\phi)) \left| \frac{\partial T(r,\phi)}{\partial (r,\phi)} \right| dr d\phi = \int_{A} r dr d\phi = F_{A}.$$

Hier beruht das zweite Gleichheitszeichen auf der allgemeinen Formel

$$\int_{F(M)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_M f(\mathbf{y}(\mathbf{x})) \left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right| d\mathbf{x}$$

für den Variablenwechsel in mehrdimensionalen Integralen. $(\left|\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right|$ bezeichnet die Jacobi-Determinante.) Im dritten Gleichheitszeichen haben wir $r(T(r, \phi)) = r$ und die elementar nachprüfbare Tatsache

$$\left|\frac{\partial T(r,\phi)}{\partial(r,\phi)}\right| = 1$$

verwendet.

Die so defnierte twist map bildet nun eine gute Ausgangsbasis zur Untersuchung der Phänomene, die beim Übergang von integrablem zu nichtintegrablem Verhalten auftreten.

5.7.2 Poincaré-Birkhoff Fixpunkt Theorem

Wir kommen zurück zur zweiten oben in Zusammenhang mit der Störung invarianter Tori aufgeworfenen Fragen: Was ist das Schicksal von Tori mit rationalen Frequenzverhältnissen bei Anwesenheit von Störungen ϵH_1 . Die Lehre aus der oben geführten Diskussion ist, daß sich dieses Fragestellung sicher nicht im Rahmen einer störungstheoretischen, d.h. einer auf einer expliziten Entwicklung im Parameter ϵ basierenden Analyse wird behandeln lassen. In diesem Abschnitt werden wir das Problem lösen und zwar im Rahmen einer Vorgehensweise, die auf einem kombinierten Einsatz der twist map und elementargeometrischer Argumente basiert. Wir werden dabei in einem zwei-Stufen Programm vorgehen. In einem ersten Schritt werden wir uns einen Überblick über die Fixpunkte des gestörten Systems verschaffen. Im Anschluß werden wir uns im Rahmen einer Stabilitätsanalyse überlegen, wie die Dynamik des Systems in der Umgebung dieser Punkte aussieht. Nach dem, was in Abschnitt 5.2 gesagt wurde, steht zu erwarten, daß dieses Programm einen wesentlichen Teil der Information über die Dynamik des gestörten Systems als ganzes liefern wird.

Wie üblich gehen wir von einem durch eine Hamiltonfunktion $H_0(\mathbf{I})$ beschriebenen integrablen System (der Einfachheit halber mit f = 2) und seinem System invarianter Tori aus (Fig. 5.22.) Wir betrachten die wie oben erklärte twist map, und ganz besonders die Wirkung der twist map auf dem Schnittkreis eines Torus rationaler Rotationszahl

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$$

mit dem Transversalschnitt. Dieser Kreis ist in Figur 5.24 mit S bezeichnet. Eine besondere Eigenschaft dieses Kreises ist, daß jeder der auf ihm liegenden Punkte Fixpunkt der q-fach angewendeten Twist map

$$\underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{q \text{ Faktoren}} \equiv T^q$$

ist. Der Grund ist, daß q-fache Iteration der Abbildung

$$T: (r, \phi) \in S \mapsto (r, \phi + 2\pi\alpha) = \left(r, \phi + 2\pi\frac{p}{q}\right) \in S$$

auf

$$T^q: (r,\phi) \mapsto (r,\phi+2\pi p) = (r,\phi)$$

führt (wobei das letzte Gleichheitszeichen besagt, daß der Winkel ϕ nur modulo 2π definiert ist.) Unter T^q bleiben alle Punkte des Kreises S also fest.

Wie oben nehmen wir an, daß die Rotationszahl α mit zunehmendem Schnittkreisradius wächst und betrachten zusätzlich zu S zwei weitere Schnittkreise S^- und S^+ mit Radius kleiner bzw. größer als S. Es sei vorausgesetzt, daß die diesen Kreisen zugeordneten Tori irrationale Umlaufzahlen haben. Generell bleiben Punkte mit rgrößer (kleiner) als der Radius des 'Fixkreises' S unter T^q nicht fest, sondern werden in Richtung des Gegenuhrzeigersinns (Uhrzeigersinns) abgebildet. Unter T^q bewegt sich der außen (innen) liegende Kreis S^+ (S^-) daher wie in Fig. 5.24, links abgebildet.

Ausgehend von dieser Situation legen wir nun eine kleine Störung ϵH_1 an. Es ergibt sich dann folgendes Bild. Der außen (innen) liegende Kreis sind nach Voraussetzung invarianten Tori irrationaler Umlaufszahl zugeordnet. Setzen wir voraus, daß

5.7. NICHTINTEGRABLE SYSTEME



Abbildung 5.24: Links: Die aus drei invarianten Tori durch Bildung eines Transversalschnitts herausprojizierten Schnittkreise. Der mittlere Kreis ist einem Torus mit rationaler Rotationszahl zugeordnet. Rechts: Die äußere und innerste Kurve sind die aus dem äußeren und inneren Torus (beide irrationales Frequenzverhältnis) hervorgehenden Transversalschnitte für das leicht gestörte System. Zur mitteleren Kurve, siehe Text.

die Störung hinreichend klein ist, werden diese Tori nicht zerstört, sondern bilden sich auf Mannigfaltigkeiten (möglicherweise leicht geänderter Geometrie) ab (KAM-Theorem). In anderen Worten, für Anfangsbedingungen, die auf dem äußeren bzw. inneren Torus liegen, hat die Bewegungsmannigfaltigkeit des gestörten Systems nach wie vor die Topologie eines Torus, kann aber aufgrund der Störung gegenüber dem Torus des ungestörten Systems leicht geändert aussehen. Die Schnittkurven dieser Torusartigen Mannigfaltigkeiten mit dem Transversalschnitt sind in Fig.5.24 mit S_{ϵ}^{\pm} bezeichnet.

Was mit dem Torus rationaler Umlaufszahl passiert, wissen wir noch nicht (Die '???' in Fig.5.24.) Um uns an diese Frage heranzutasten, untersuchen wir zunächst die twist map T_{ϵ} des gestörten Systems. Was beschreibt diese Abbildung? Ein im Transversalschnitt liegender Punkt $\mathbf{x} = (r, \phi)$ wird sich entlang der Phasenraumtrajektorie des gestörten Systems entwickeln und nach einer gewissen Zeit bei einer Koordinate $\mathbf{x}' = (r', \phi')$ den Transversalschnitt wieder durchstoßen. Per Definition liefert die Abbildung $T_{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$ für jeden Punkt des Transversalschnitts den darauffolgenden Durchstoßpunkt. (Für $\epsilon = 0$ erhalten wir natürlich die oben definierte twist map zurück.) Wie die Abbildung T_{ϵ} genau aussieht, wissen wir nicht. Klar ist nur, daß (i) r' im allgemeinen nicht mehr gleich r sein wird (denn wir haben es ja nicht mehr mit exakten Tori als Bewegungsmannigfaltigkeiten zu tun) aber auch (ii) daß für kleines ϵ , T_{ϵ} nicht stark von der Abbildung T des ungestörten Systems abweichen kann¹⁵. Ein allgemeiner Ansatz für die Struktur der Abbildung T_{ϵ} sieht daher wie folgt aus:

$$\begin{aligned} T_{\epsilon} : \mathbb{R}^{+} \times \begin{bmatrix} 0, 2\pi \end{bmatrix} & \to & \mathbb{R}^{+} \times \begin{bmatrix} 0, 2\pi \end{bmatrix} \\ (r, \phi) & \mapsto & (r + \epsilon f(r, \phi), \phi + 2\pi\alpha(r) + \epsilon g(r, \phi)), \end{aligned}$$

¹⁵Wie wir im Abschnitt 5.6.1 gesehen haben, gilt diese Argumentationskette nur für die 'gutartigen' Schnittkreise mit irrationaler Umlauffrequenz (also nicht für S.) Für die Formulierung userer Argumentationskette ist diese Einschränkung jedoch unerheblich.

wobei die Funktionen f und g unbekannt sind. Auch wenn wir diese Funktionen und damit die genaue Wirkung der Abbildung nicht kennen, lassen sich doch eine Reihe von Aussagen machen. Zunächsteinmal bildet T_{ϵ} per Definition die deformierten Schnittkurven S_{ϵ}^{\pm} in sich ab (bitte überlegen). Zweitens werden, sofern ϵ nur klein genug ist, die Punkte dieser Kurven bei Anwendung der q-fach iterierten Abbildung T_{ϵ}^{q} immer noch im Gegenuhrzeigersinn (S_{ϵ}^{+}) bzw. Uhrzeigersinn (S_{ϵ}^{-}) abgebildet. (Denn diese Eigenschaft galt ja für die nicht deformierten Ausgangskurven S^{\pm} und wird für hinreichend kleines ϵ erhalten bleiben.)



Abbildung 5.25: Zur Konstruktion einer Kurve mit unter T_{ϵ} erhaltener Radialkoordinate.

Daraus lassen sich Rückschlüsse auch für das Gebiet zwischen S_{ϵ}^{-} und S_{ϵ}^{+} ziehen. Wir betrachten dazu eine Linie festen Winkels ϕ (gestrichelte Linie in Figur 5.25.) Für große (kleine) Werte der Radialkoordinate werden die Punkte dieser Linie von T_{ϵ}^{q} im Gegenuhrzeigersinn (Uhrzeigersinn) abgebildet. Aus Stetigkeitsgründen muß es daher einen Wert $r_{X}(\phi)$ geben für den sich die Winkelkoordinate bei Anwendung von T_{ϵ}^{q} nicht ändert: $T_{\epsilon}^{q}(r_{X}(\phi), \phi) = (r', \phi)$. (Beachten Sie, daß sich die Radialkoordinate sehr wohl ändern kann. Lediglich die Winkelkoordinate bleibt fest.) Durch Vereinigung aller dieser ausgezeichneten Punkte erhalten wir eine geschlossene Linie

$$X \equiv \{(r_X(\phi), \phi) | \phi \in [0, 2\pi]\}$$

Von dieser Linie wissen wir folgendes: (i) Sie existiert und (ii) alle ihre Punkte bilden sich bei Anwendung von T_{ϵ}^q in radialer Richtung nach außen oder innen ab.

Wir wenden uns nun wieder unserem ersten Etappenziel, der Bestimmung der Fixpunkte von T_{ϵ}^q zu. Eine notwendige Bedingung, die ein solcher Fixpunkt erfüllen muß, ist $\phi(T_{\epsilon}^q(r, \phi)) = \phi$, wobei $\phi(\mathbf{r})$ die ϕ -Komponente des Punktes \mathbf{r} bezeichnet. Aus dieser Beobachtung folgt schon einmal, daß alle Fixpunkte auf unserer ausgezeichneten Linie X liegen müssen. Natürlich wird nicht jeder Punkt von X Fixpunkt sein, denn im allgemeinen ändert die Anwendung von T_{ϵ}^q ja die Radialkomponente. Auf die Existenz einer endlichen Zahl von Punkten für die Azimuthal *und* Radialkomponente ungeändert bleiben läßt sich aber mittels über folgendes einfaches Argument schließen. Wir betrachten das mit $T_{\epsilon}^q(X)$ bezeichnete Bild der Linie X unter T_{ϵ}^q . Die von dieser Linie eingeschlossene Fläche gleicht der von X eingeschlossenen Fläche. Dies folgt aus der (hier ohne Beweis zitierten Tatsache (siehe z.B.



Abbildung 5.26: Zur Struktur der Fixpunkte eines schwach gestörten integrablen Systems.

[tabor])), daß die gestörte twist map T_{ϵ} mit der ungestörten Abbildung T die Eigenschaft der Flächenerhaltung gemein hat. Hieraus folgt (vgl. Fig. 5.26), daß $T_{\epsilon}^{q}(X)$ die Kurve X in einer endlichen geraden Anzahl von Punkten schneiden muß (bitte überlegen). Tatsächlich können wir über die Anzahl der Fixpunkte eine noch weiter gehende Aussage treffen: für einen gegebenen Schnittpunkt \mathbf{r}_{0} betrachten wir die Sequenz von q Punkten $\mathbf{r}_{0}, T_{\epsilon}^{2}(\mathbf{r}_{0}), \dots, T_{\epsilon}^{q-1}(\mathbf{r}_{0})$. Alle diese Punkte sind Fixpunkte von T_{ϵ}^{q} (warum?). Jeder Fixpunkt ist daher Mitglied einer Sequenz von qweiteren Fixpunkten, was bedeutet, daß die Gesamtanzahl von Fixpunkten 2kq ein geradzahliges Vielfaches von q sein muß. Dies ist der Inhalt des berühmten Poincaré-Birkhoff Fixpunkt Theorems: Die Störung eines integrablen Systems führt dazu, daß die durch den Transversalschnitt eines Torus' rationalen Umlaufzahlverhältnisses entstehenden Linie von Fixpunkten der Abbildung T^{q} zu einer diskreten Anzahl von Fixpunkten (der gestörten Abbildung T_{ϵ}^{q}) kollabiert.

Warum ist dies eine wichtige Aussage? Wir betrachten hierzu den durch die Abbildung T_{ϵ}^q erzeugten Fluß in der Umgebung der Fixpunkte. (Der Fluß kann man sich so entstanden denken, daß man für jeden Punkt der Umgebung des Fixpunkts die Richtung abträgt, in die er unter T_{ϵ}^q abgebildet wird.) Eine gleichfalls elementargeometrische Überlegung zeigt, daß die Flüsse aufeinanderfolgender Fixpunkte, die in Fig. 5.26 angedeutete Struktur haben. Vergleich mit der in Abschnitt 5.2 besprochenen allgemeinen Struktur von Abbildungen in Fixpunktumgebung ergibt, daß die Fixpunkte abwechselnd von elliptischen (oberer Einschub in Figur 5.26) und hyperbolischen (unterer Einschub in Figur 5.26) Typ sind. Diese zunächst rein formal erscheinende Aussage enthält einen Gutteil der Antwort auf die oben aufgeworfene Frage zum Übergang von integrablem zu irregulär/chaotischem Verhalten. Insbesondere erklärt sie das in Abschnitt 5.1 diskutierte Phänomen des Erscheinens von Hierarchien immer kleiner werdender geschlossener Kurven in Transversalschnitten von Systemen beim Übergang von integrabler zu irregulärer Dynamik:

Wir betrachten den sich in der Umgebung eines elliptischen Fixpunktes ergebenden Fluß der gestörten Abbildung T_{ϵ}^q . Elliptizität bedeutet, daß der Fluß die Form

geschlossener Bahnen hat. (Diese geschlossenen Bahnen lassen sich als die kleinen geschlossenen Kurven interpretieren, die in den in Abschnitt 5.1 gezeigten Transversalschnitten in der Nähe größerer geschlossener Bahnen auftauchten.) Von diesen Kurven werden einige ein rationales Umlaufzahlverhältnis haben, also Fixpunkte der Abbildung T_{ϵ}^r für ein gewisses ganzzahliges r sein. Der springende Punkt ist nun, daß wir die oben durchgeführte Argumentationskette iterieren können: Die rationalen Bahnen sind entsprechend der obigen Analyse instabil und brechen zu einer geradzahligen Menge von Fixpunkten auf. Die Hälfte dieser Fixpunkte ist elliptisch, und von geschlossenen Bahnen umgeben. Die rationalen Vertreter dieser Bahnen sind wiederum instabil und brechen ... Das Gesamtresultat dieser Überlegung ist, daß der Transversalschnitt des gestörten Systems eine sich auf allen Längenskalen wiederholende Struktur von abwechselnd elliptischen und hyperbolischen Fixpunkten hat. Ganz allgemein bezeichnet man ein solches iteratives Gebilde als eine Struktur mit Selbstähnlichkeit. 'Selbstähnlich', da eine Betrachtung der Struktur unter einem Vergrößerungsglas wieder auf die Struktur selbst zurückführte. Die Morphologie des selbstähnlichen Transversalschnittes ist in Fig.5.27 angedeutet, wobei die Kreuzungspunkte hyperbolische Fixpunkte und die konzentrischen Linien stabile Bahnen irrationalen Frequenzverhältnisses andeuten. Diese Bahnen sind von selbstähnlichen Hierarchien hyperbolisch/elliptischer Fixpunktsequenzen umgeben.



Abbildung 5.27: Zur Ausbildung selbstähnlicher Strukturen beim Übergang von integrabler zu nichtintegrabler Dynamik.

Literaturverzeichnis

- [1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, second edition, Springer Verlag, 1989.
- [2] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, second edition, Addison Wesley Publishing, 1980 (Übers.: *Klassische Mechanik*, Aula Verlag, 1985.)
- [3] S. Grossmann, Mathematischer Einführungskurs für die Physik, Teubner 1984.
- [4] R.J. Jellito, Theoretische Physik 1: Mechanik 1 & 2, Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden, 1982.
- [5] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, *Vol.1*, Butterworth Heinemann, 1999.
- [6] F.Scheck, *Mechanik*, 5. Auflage, Springer Verlag, 1996.
- [7] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos*, Physik Verlag, 1984.

[tabor] M. Tabor, Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics, Wiley, 1989