

---

Götz S. Uhrig

# Physik I

---

Version: 9. Februar 2004

Wintersemester 2003/2004

## Vorbemerkungen

Das vorliegende Skript zum theoretischen Teil der Vorlesung *Physik I* ersetzt nicht den regelmässigen Besuch der Vorlesungen. Es ist als Ergänzung gedacht, zum Nacharbeiten oder zur Vorbereitung auf Klausuren und Prüfungen. Deshalb sollten alle Formeln und Aussagen immer kritisch betrachtet werden, es könnten noch Druckfehler enthalten sein!

Wesentlicher Bestandteil der Vorlesung *Physik I* sind die Übungen. Gerade in den ersten Semestern ist es unbedingt erforderlich, den Stoff durch eigenständiges Bearbeiten von Übungsaufgaben zu vertiefen.

Die Vorlesung verfolgt zwei Hauptziele. Zum einen soll das mathematische Handwerkszeug auf einem praxisorientierten Niveau vermittelt werden. Damit wird der experimentelle Teil der Vorlesung unterstützt, da die Mathematik-Vorlesungen die relevanten Inhalte erst wesentlich später im Studium bereitstellen – dann allerdings wesentlich besser fundiert. Zum anderen soll der Theorieteil von Physik I einen Einblick in die Arbeitsweise der theoretischen Physik geben. Ihr Aufbau orientiert sich dabei an physikalischen Fragestellungen.

Für Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar. Sie können auch per Email an mich ([gu@thp.uni-koeln.de](mailto:gu@thp.uni-koeln.de)) geschickt werden. Die jeweils aktuellste Version des Skripts ist im Internet über meine Homepage

<http://www.thp.uni-koeln.de/~gu/zusatzlehre.html>

verfügbar.

Das Skript basiert in seiner vorliegenden Form auf dem Skript von Priv.-Doz. Dr. Andreas Schadschneider.

Götz S. Uhrig

## Literaturempfehlungen

Im folgenden finden Sie eine kommentierte Auswahl der populärsten Lehrbücher. Die Vorlesung orientiert sich nicht speziell an einem Buch. Ich empfehle Ihnen deshalb, sich vor einem eventuellen Kauf zunächst die einzelnen Werke gründlich anzusehen. Die meisten sind in der Studentenbibliothek vorhanden.

- S. Großmann: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (Teubner-Verlag)  
Sehr empfehlenswerte, preiswerte Einführung in die wichtigsten mathematischen Techniken, von einem Physiker für Physiker geschrieben. Kann während des gesamten Studiums verwendet werden, insbesondere als Nachschlagewerk.
- C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, A.C. Helmholz, B.J. Moyer: *Berkeley Physik Kurs 1: Mechanik* (Vieweg)  
Sehr übersichtliches Buch, das den Stoff der Vorlesung weitgehend abdeckt. Die Themen werden ausführlich und auf relativ einfachem Niveau diskutiert.
- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Physik* (Wiley-VCH)  
Viel gelobte aktuelle Übersetzung des englischen Originals; sehr umfassend.
- W. Nolting: *Grundkurs: Theoretische Physik, Band 1: Klassische Mechanik* (Verlag Zimmermann-Neufang)  
Sehr gut strukturiertes Lehrbuch mit einer guten Einführung auch in die mathematischen Techniken. Enthält zahlreiche Aufgaben und Kontrollfragen und deckt zusammen mit Band 2 im Wesentlichen auch den Stoff der Vorlesung Theoretische Physik 1 ab.
- R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynman Vorlesungen über Physik* (Oldenbourg)  
Ein eher ungewöhnliches Lehrbuch! Sehr empfehlenswert als Ergänzung zur Vorlesung, um einen alternativen Zugang kennenzulernen, insbesondere in der zweisprachigen (deutsch-englisch) Ausgabe.
- W. Greiner: *Theoretische Physik, Band 1: Mechanik I; Band 2: Mechanik II* (Harri Deutsch)  
Die ersten beiden Bände einer populären Reihe. Alle Bände enthalten zahlreiche Aufgaben mit Lösungen. Band 1 und 2 decken zusammen allerdings nicht den Inhalt der Vorlesung Theoretische Physik 1 ab.
- C. Gerthsen: *Physik* (Springer-Verlag)  
Mittlerweile vor allem ein Nachschlagewerk, wenn man einen physikalischen Effekt oder Sachverhalt nicht kennt und eine erste Information dazu sucht. Anspruchsvolle Übungsaufgaben, es gibt auch ein spezielles Übungsbuch mit Lösungen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Physikalische und mathematische Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1	Physikalische Größen . . . . .	5
1.2	Vektoren . . . . .	6
1.3	Koordinatensysteme . . . . .	9
1.3.1	Zweidimensionale Koordinatensysteme . . . . .	10
1.3.2	Dreidimensionale Koordinatensysteme . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Kinematik</b>	<b>13</b>
2.1	Funktionen und Differentiation . . . . .	14
2.1.1	Funktionen . . . . .	14
2.1.2	Ableitung . . . . .	14
2.2	Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	17
2.2.1	Bewegung eines Massenpunktes . . . . .	17
2.2.2	Beispiele . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Dynamik eines Massenpunktes, Kräfte</b>	<b>21</b>
3.1	Integration und Differentialgleichungen . . . . .	21
3.1.1	Integration . . . . .	21
3.1.2	Differentialgleichungen . . . . .	24
3.2	Grundlagen der Dynamik, Kräfte . . . . .	26
3.2.1	Newtonsche Gesetze (Axiome) . . . . .	26
3.3	Beispiele für spezielle Kräfte . . . . .	28
3.3.1	Schwerkraft . . . . .	28
3.3.2	Elastische Kräfte . . . . .	28
3.3.3	Zwangskräfte . . . . .	29
3.3.4	Reaktionskräfte, Reibung . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Arbeit und Energie</b>	<b>34</b>
4.1	Vektoranalysis und Wegintegrale . . . . .	34
4.1.1	Vektoranalysis . . . . .	34
4.1.2	Wegintegrale . . . . .	38
4.2	Arbeit und Energie . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Systeme vieler Teilchen: Schwerpunkt und Impuls</b>	<b>49</b>
5.1	Schwerpunkt und Gesamtimpuls . . . . .	50
5.2	Impulssatz . . . . .	51
5.3	Zweikörperproblem . . . . .	51
5.4	Mehrdimensionale Integration . . . . .	53

<b>6</b>	<b>Rotationsbewegung</b>	<b>58</b>
6.1	Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . .	59
6.1.1	Lineare Abbildungen . . . . .	59
6.1.2	Rechnen mit Matrizen . . . . .	60
6.1.3	Drehmatrizen . . . . .	64
6.1.4	Infinitesimale Drehungen . . . . .	66
6.2	Kraftgleichung in rotierenden Koordinatensystemen . . . . .	68
6.3	Rotationsdynamik . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Bewegung eines starren Körpers</b>	<b>70</b>
7.1	Trägheitstensor . . . . .	71
7.2	Trägheitsmoment . . . . .	73
7.3	Tensoren . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Zweikörperproblem</b>	<b>76</b>
<b>9</b>	<b>Schwingungen</b>	<b>84</b>
9.1	Komplexe Zahlen . . . . .	84
9.2	Homogene Lösungen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	88
9.3	Inhomogene Lösungen: Greenfunktionen . . . . .	90
9.4	Schwingungsvorgänge nach Frequenz . . . . .	96

# 1 Physikalische und mathematische Grundlagen

Was ist eigentlich theoretische Physik?

Theoretische Physik ist der experimentellen Physik nachgelagert. Sie hat zwei große Aufgaben. Zum Einen soll sie die experimentellen Daten in Gesetzmäßigkeiten zusammenfassen, um so eine wesentliche Reduktion der Daten zu erreichen. Die sich so ergebenden physikalischen Gesetze beinhalten also ein großes Maß an experimenteller Erfahrung. Die physikalischen Gesetze werden mittels mathematischer Strukturen formuliert; die Mathematik ist für den Physiker also eine Sprache, deren Grammatik die Logik ist.

Zum Anderen bietet ein gutes theoretisches Konzept auch die Möglichkeit, Gesetzmäßigkeiten vorherzusagen. Es können Experimente vorgeschlagen werden und deren Ergebnis kann prognostiziert werden. An Hand solcher Vorhersagen läßt sich eine Theorie experimentell falsifizieren. Besitzen wir zu einer Klasse von Phänomenen einfache Konzepte, die uns erlauben, die Ergebnisse zu berechnen, so würden wir sagen, daß wir diese Phänomene verstehen. Da die Physik aber eine Naturwissenschaft ist, in der wir uns bemühen, die Natur zu beschreiben, müssen wir uns immer bewußt sein, daß jede erfolgreiche Beschreibung, jedes gute theoretische Konzept, durch fortschreitende experimentelle Erkenntnisse überholt werden kann.

## 1.1 Physikalische Größen

Grundlegendes Element der Physik sind physikalische Größen. Jede Größe erfordert eine präzise Meßvorschrift, so daß sie objektiv bestimmt werden kann. Objektiv bedeutet hier unabhängig von der messenden Person, dem Ort oder der Zeit, wo bzw. wann das Experiment durchgeführt wird. Eine physikalische Größe ist gekennzeichnet durch einen Zahlenwert und eine Einheit. Mögliche Dimensionen der Einheit sind z.B. Länge, Masse oder Zeit. Häufig hilft eine Dimensionsanalyse als Probe einer Rechnung und auch bei der Ableitung von Gesetzmäßigkeiten, da die Dimension die Anzahl der möglichen Kombinationen verschiedener Größen stark einschränken. So kann man aus einer Geschwindigkeit (Länge pro Zeit) und einer Zeit nur in einer Art und Weise eine Länge gewinnen, nämlich durch Multiplikation. Division führt zu einer anderen physikalischen Größe.

Einen Satz Basiseinheiten nennen wir ein Maßsystem. Gesetzlich vorgeschrieben sind die SI-Einheiten (SI: système international). Die Einheitlichkeit von Maßsystemen ist ein großer Vorteil, da man sonst immer wieder komplizierte Umrechnungen durchführen muß.

Neben der Dimensionsanalyse spielen Größenordnungen in der Physik eine wichtige Rolle. Die Abschätzung von Größenordnungen erlaubt uns, einen ersten Eindruck zu erhalten, was von was plausiblerweise abhängen kann. Wir können abschätzen, welche Elemente eines Phänomens wichtig sind. Ein einfaches Beispiel ist eine Ameise, die auf die Erde fällt. Wir werden sehen, daß dabei auch die Erde in Richtung Ameise fällt; dennoch ist dieser Effekt doch eher vernachlässigbar.

Wichtige Skalen in der Physik seien an den extremalen Längen und Zeiten illustriert.

- Minimale Länge (Planck-Länge)  $\approx 10^{-35}$  m  
Sie entspricht der Länge, unterhalb der unser bisheriges Verständnis der Raumzeit zusam-

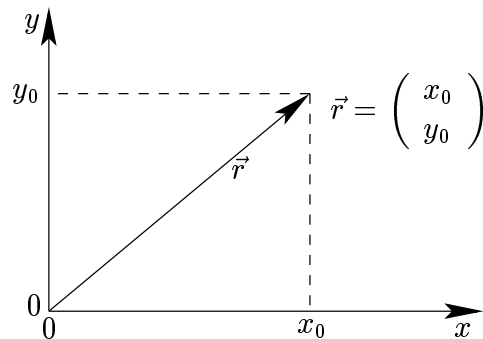


Abbildung 1.1: Ortsvektor als Beispiel für einen Vektor.

menbricht. Auf dieser Skala wird die Quantengravitation wichtig, für die es noch keine akzeptierte Theorie gibt. Allerdings sind wir auch experimentell noch sehr weit von der Planck-Länge entfernt.

- Maximale Länge (Durchmesser des Weltalls)  $> 10$  Milliarden Lichtjahre  $\approx 10^{26}$ m

Wir besitzen also ein großes Betätigungsfeld von ca. 60 Größenordnungen.

Mittels der in der Physik hervorgehobenen Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit  $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s kann man die obigen Längen in Zeiten umrechnen und erhält

- Minimale Zeit (Planck-Zeit)  $\approx 10^{-43}$ s
- Maximale Zeit (Alter des Weltalls)  $> 10$  Milliarden Jahre  $\approx 10^{17}$ s

## 1.2 Vektoren

Bisher haben wir bei physikalischen Größen nur auf Zahlenwert und Einheit geachtet. Häufig ist es aber sinnvoll, gewisse Größen zusammenzufassen, z.B. bei der Angabe eines Ortes als Punkt in einem Koordinatensystem, siehe Abb. 1.1. Es gibt verschiedene Objekte solch zusammengefaßter Informationen, nämlich Vektoren, Matrizen, Tensoren, Vierervektoren usw.. Wir wollen uns hier erst einmal auf die Vektoren beschränken. Vektoren stehen physikalisch für gerichtete Größen, die sich wie Ortsvektoren verhalten bei gewissen Standardtransformationen wie Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen. Eine ungerichtete Größe nennen wir Skalar. Beispiele für Vektoren sind neben dem Ort Verschiebungen oder Geschwindigkeiten. Beispiele für Skalare sind die Zeit, die Masse oder die Energie. Beachte, daß die mathematische Sicht in diesem Punkt ein ganz andere ist, siehe unten.

Typische Notationen für Vektoren sind in der Literatur  $\vec{a}$ ,  $\underline{a}$  oder  $\mathbf{a}$ . In dieser Vorlesung soll die Notation  $\vec{a}$  verwendet werden, da sie uns eindrücklich an den gerichteten Charakter erinnert und auch handschriftlich auszuführen ist.

Die mathematische Definition von Vektoren baut auf folgenden Axiomen auf.

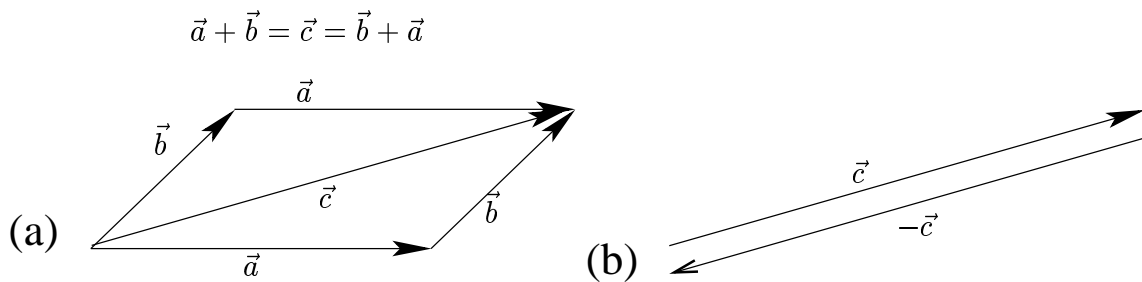


Abbildung 1.2: (a) Addition zweier Vektoren als Ausführung zweier Verschiebungen hintereinander. Man erkennt, daß die Addition kommutativ ist. Das Bild entspricht dem Kräfteparallelogramm, so daß wir erkennen, daß auch Kräfte Vektoren sind. (b) Veranschaulichung des Inversen.

**Definition 1.1 (Vektorraum, Vektor).** Eine Menge von Elementen  $V = \{\vec{a}, \vec{b}, \dots\}$  heißt Vektorraum und  $\vec{a}, \vec{b}, \dots$  Vektoren, wenn  $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots \in V$  gilt:

1. Abgeschlossenheit:  $\vec{a} + \vec{b} \in V$  und  $\lambda \vec{a} \in V \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ; ( $\lambda$  ist ein Skalar)
2. Assoziativität:  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3. Neutrales Element (Nullvektor):  $\exists \vec{0} \in V$  mit  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \forall \vec{a} \in V$
4. Inverse:  $\forall \vec{a} \in V \exists \vec{b} \in V$  mit  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .  $\vec{b}$  ist das zu  $\vec{a}$  inverse Element.  
Man schreibt auch  $-\vec{a}$ .
5. Kommutativität:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
6.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt:
  - (a)  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
  - (b)  $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$
  - (c)  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) + (\lambda\vec{b})$
7.  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Die Addition zweier Vektoren kann man sich als Hintereinanderausführung zweier Verschiebungen veranschaulichen, siehe Abbildung 1.2a. Dabei liest man auch leicht die Kommutativität ab. Ebenso leicht kann man sich das Inverse eines Vektors als den jeweils entgegengesetzt gerichteten Pfeil veranschaulichen, siehe Abbildung 1.2b. Offensichtlich ergibt die Addition von Vektor und seinem Inversen den Nullvektor, das neutrale Element. Die Subtraktion eines Vektors wird definiert als die Addition des Inversen  $\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$ .

**Beispiel 1.1.**

$\mathbb{R}^2$  mit  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , wobei  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$



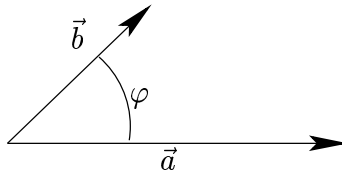


Abbildung 1.3: Zur Anschauung des Skalarprodukts.

mit der Addition und skalaren Multiplikation:  $\vec{a} + \lambda \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda b_1 \\ a_2 + \lambda b_2 \end{pmatrix}$

Verallgemeinerung:  $\mathbb{R}^n$ ,

z.B. beschreibt  $n = 3$  den normalen dreidimensionalen Raum unserer alltäglichen Anschauung.

Für  $n = 1$  erhält man die bekannten Rechenregeln für die reellen Zahlen.

**Definition 1.2 (Betrag eines Vektors).** Den Betrag oder die Länge (mathematisch auch die Norm) eines Vektors  $\vec{a}$  notiert man mit

$$|\vec{a}| = a.$$

Wir werden die Schreibweise  $a$  für den Betrag von  $\vec{a}$  verwenden, sofern keine Verwechslungsgefahr besteht.

Speziell gilt:  $|\vec{0}| = 0$ .

Für das obige Beispiel 1.1 des  $\mathbb{R}^2$  ist die Standarddefinition der Länge nach Pythagoras

$$\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Die Verallgemeinerung auf den  $\mathbb{R}^n$  ist offensichtlich.

Es gibt drei Standardarten der Multiplikation von Vektoren.

**Definition 1.3 (Skalare Multiplikation).**  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$  (Skalar  $\cdot$  Vektor = Vektor)

a)  $\lambda > 0$  :  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind parallel und zeigen in die gleiche Richtung:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$

b)  $\lambda < 0$  :  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind antiparallel, d.h. sie stehen entgegengesetzt.

Die Regeln für die skalare Multiplikation sind durch die Vektorraum-Axiome festgelegt, siehe oben.

**Definition 1.4 (Skalarprodukt (auch: inneres Produkt)).** (Vektor  $\cdot$  Vektor = Skalar)

Definition im  $\mathbb{R}^2$  :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Die Verallgemeinerung auf den  $\mathbb{R}^n$  ist offensichtlich

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Die geometrische Interpretation liefert  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ , wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist, siehe Abb. 1.3. Diese geometrische Deutung impliziert:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm\pi/2 \Leftrightarrow \vec{a}$  senkrecht auf  $\vec{b}$ , wir notieren  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

In höheren Definitionen, wo wir uns nicht auf eine Anschauung stützen können, wird die Beziehung  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$  als Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren verwendet.

**Definition 1.5 (Kreuzprodukt (auch: Vektorprodukt, äußeres Produkt)).**

(Vektor  $\times$  Vektor = Vektor)

Im Gegensatz zur skalaren Multiplikation und dem Skalarprodukt ist das Kreuzprodukt  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  zweier Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  nur im  $\mathbb{R}^3$  definiert. Das liegt daran, daß es sich eigentlich um eine verknappte lineare Abbildung handelt und nicht um ein Produkt zwischen Vektoren. Das führt hier aber zu weit.

Die formale Definition ist

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} .$$

Die anschauliche Interpretation ist die folgende:

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  hat den Betrag  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$  und steht senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :  $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$ . Dabei

bilden  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ein sogenanntes Rechtssystem nach der Rechten-Hand-Regel. Daraus folgt sofort  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ , d.h. wir haben hier das Beispiel einer antikommutativen Multiplikation.

Beachten Sie, daß es zwar verschiedene Multiplikationen mit Vektoren gibt. Es gibt aber *keine* Division durch Vektoren (außer im  $\mathbb{R}^1$  natürlich).

### 1.3 Koordinatensysteme

Mathematisch sind Vektoren vollkommen abstrakte Objekte, den den Axiomen des Vektorraums gehorchen. Praktisch hingegen kommen sie doch häufig als einfache  $n$ -Tupel daher. Woran liegt das?

**Definition 1.6 (Basis, Dimension, Koordinatensystem).** Man zeichne eine Menge von Vektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  aus, mit deren Hilfe *alle* anderen Vektoren  $\vec{a} \in V$  als sogenannte Linearkombination

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{e}_j$$

darstellen lassen. Die minimale Anzahl  $n$  von Vektoren, die dies erfüllen, bezeichnet man als Dimension von  $V$  und die zugehörige Menge  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  als Basis von  $V$ . Die  $\lambda_j$  sind die Komponenten oder Koordinaten von  $\vec{a}$  bezüglich der Basis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ . In der Physik nennt man die Basis häufig auch ein Koordinatensystem.

Bemerkung 1: Hat man sich auf eine Basis geeinigt, so ist ein Vektor  $\vec{a}$  durch den  $n$ -Tupel  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  gegeben.

Bemerkung 2:  $n$  kann auch unendlich sein. In diesem Fall spricht man von einem unendlich-dimensionalen Vektorraum.

Bemerkung 3: Eine Menge  $\{\vec{e}_j\}$ , die alle Vektoren darstellen kann, aber nicht minimal ist, heißt *überevollständig* oder linear abhängig. Eine solche Menge stellt ein sogenanntes Erzeugendensystem dar, aber keine Basis. Ein Beispiel erhalten Sie dadurch, daß Sie zu einer beliebigen Basis einen weiteren Vektor hinzunehmen.

### Beispiel 1.2.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ , die sogenannte natürliche Basis.

Allgemein hat der  $\mathbb{R}^n$  die Dimension  $n$ .

Fast ausschließlich arbeitet man in der Physik mit “einfachen” Basisvektoren, die die Länge 1 haben, d.h.  $|\vec{e}_j| = 1$ , und die paarweise senkrecht aufeinander stehen  $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j \forall i \neq j$ . Eine solche Basis heißt Orthonormalbasis von “orthogonal” (senkrecht) und “normiert”. Eine solche Basis verhält sich wie die natürliche Basis im  $\mathbb{R}^n$ .

Eine hilfreiche Kurzschreibweise für die Orthonormalität ist  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ . Dabei haben wir das Kronecker-Symbol verwendet, das wie folgt definiert ist

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \forall i \neq j \\ 1 & \forall i = j \end{cases} .$$

**Definition 1.7 (Einheitsvektor).** Einheitsvektoren sind Vektoren der Länge 1. Zu einem beliebigen Vektor  $\vec{a} \in V$ , der nicht der Nullvektor ist ( $\vec{a} \neq \vec{0}$ ), kann man einen Einheitsvektor gleicher Richtung definieren

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \Rightarrow \quad |\hat{a}| = 1$$

Speziell für die Einheitsvektoren in  $x, y, z$ -Richtung schreibt man  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  oder  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ .

Beachte

Die Wahl einer Basis eines Vektorraumes ist in keiner Weise eindeutig. Man wählt i.allg. die Basis, die für ein gegebenes Problem am zweckmäßigsten erscheint. Im folgenden werden wir die für die Physik wichtigsten Standardbasen (Koordinatensysteme) des  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  vorstellen.

### 1.3.1 Zweidimensionale Koordinatensysteme

#### a) Kartesische Koordinaten

Die einfachste Wahl einer Basis des  $\mathbb{R}^2$  führt auf das *kartesische Koordinatensystem*. Hier wählt man Einheitsvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  in  $x$ - und  $y$ -Richtung, siehe Abb. 1.4, als Basisvektoren und kommt so zu der bekannten Darstellung  $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$  bzw.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ .

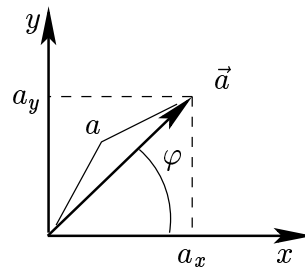


Abbildung 1.4: Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten in zwei Dimensionen

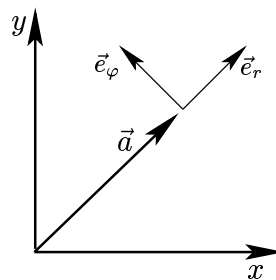


Abbildung 1.5: Orthonormalbasis der Polarkoordinaten

#### b) Polarkoordinaten

Das zweite häufig verwendete Koordinatensystem in zwei Dimensionen sind die (ebenen) Polarkoordinaten  $(|\vec{a}|, \varphi)$ . Die Koordinaten sind hier nicht durch die Projektionen auf die  $x$ - und  $y$ -Achse gegeben sondern durch die Länge  $a$  des Vektors  $\vec{a}$  und den Winkel  $\varphi$ , den er mit der  $x$ -Achse einschließt, wobei der Winkel im mathematisch positiven Drehsinn, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn, gemessen wird, siehe auch Abb. 1.4. Elementare Geometrie der trigonometrischen Funktionen liefert den folgende Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Polarkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a \cos \varphi \\ a_y &= a \sin \varphi \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ \tan \varphi &= \frac{a_y}{a_x} \end{aligned} \right.$$

Als natürliche Basis verwendet man in Polarkoordinaten die folgende Orthonormalbasis, die auch begleitendes Zweibein genannt wird

$$\vec{e}_r = \vec{r}/r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren zeigen jeweils in die Richtung, in die sich  $\vec{r}$  ändert, wenn man  $r$  bzw.  $\varphi$  erhöht, siehe auch Abb. 1.5.

Zur Erinnerung:

Ein Vektor  $\vec{a}$  an sich ist *unabhängig* vom Koordinatensystem. Erst die Komponenten eines Vektors sind von der Wahl des Koordinatensystems abhängig.

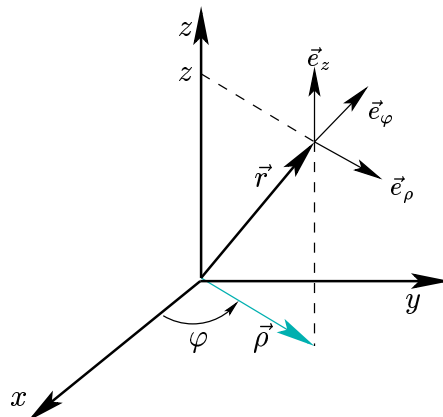


Abbildung 1.6: Zylinderkoordinaten und die zugehörigen Basisvektoren (“begleitendes Dreibein”). Der Vektor  $\vec{\rho}$  entsteht durch senkrechte Projektion von  $\vec{r}$  auf die  $xy$ -Ebene.

### 1.3.2 Dreidimensionale Koordinatensysteme

a) Kartesische Koordinaten

Dies sind genau die Koordinaten, die im Beispiel 1.2 aufgeführt wurden.

b) Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten werden zweidimensionale ebene Polarkoordinaten in der  $xy$ -Ebene mit einer  $z$ -Koordinate kombiniert, siehe Abb. 1.6.  $\vec{\rho} = (x, y, 0)$  ist die Projektion von  $\vec{r}$  auf die  $xy$ -Ebene und  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\vec{\rho}$  und der  $x$ -Achse. Dabei hat man zu beachten, daß das ursprüngliche kartesische Koordinatensystem rechtshändig ist, d.h. die Rechte-Hand-Regel erfüllt<sup>1</sup>. Als Koordinaten erhält man  $\rho = |\vec{\rho}|$ ,  $\varphi$  und  $z$  mit der Umrechnungsvorschrift

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} \\ z = z \end{array} \right.,$$

die wieder aus den Definitionen von  $\sin$  (Gegenkathete durch Hypotenuse) und  $\cos$  (Ankathete durch Hypotenuse) sowie aus dem Satz von Pythagoras folgt.

Die natürlichen Basisvektoren der Zylinderkoordinaten, auch begleitendes Dreibein genannt, sind

$$\vec{e}_\rho = \vec{\rho}/\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Der Daumen zeigt in Richtung der  $x$ -Achse, der Zeigefinger in  $y$ -Richtung und der Mittelfinger in Richtung der  $z$ -Achse.

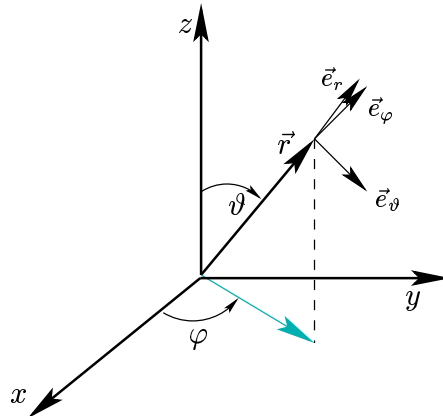


Abbildung 1.7: Kugelkoordinaten und die zugehörigen Basisvektoren (“begleitendes Dreibein”)

### c) Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten benutzt man außer der Länge  $r = |\vec{r}|$  des Vektors  $\vec{r}$  zwei Winkel  $\varphi$ ,  $\vartheta$ , siehe Abb. 1.7. Der Winkel  $\vartheta$  ist dabei der Winkel zwischen der  $z$ -Achse und dem Vektor  $\vec{r}$ . Um von den Zylinderkoordinaten zu Kugelkoordinaten überzugehen, muß man die Projektionen  $\vec{\rho}$  auf die  $xy$ -Ebene und  $z$  auf die  $z$ -Achse durch die Länge  $r$  und den Winkel  $\vartheta$  ausdrücken. Mit  $\rho = r \sin \vartheta$  und  $z = r \cos \vartheta$  ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} x = a \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = a \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = a \cos \vartheta \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{r}| \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} \\ \tan \vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{array} \right.$$

Die natürlichen Basisvektoren der Kugelkoordinaten, auch begleitendes Dreibein genannt, sind

$$\vec{e}_r = \vec{r}/r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Der Vorzug der Kugelkoordinaten ist die Möglichkeit der expliziten Verwendung der Kugelsymmetrie. Funktionen, die die volle Rotationssymmetrie aufweisen, hängen nur vom Abstand ab. Es taucht als Argument also nur  $r$  auf und die Winkel fallen weg. In kartesischen Koordinaten würden dagegen alle drei Koordinaten explizit auftauchen.

## 2 Grundlagen der Kinematik

Zur Begriffsklärung halten wir fest

- Die *Kinematik* beschreibt die Bahn einer Bewegung.

- Die *Dynamik* beschreibt die physikalischen Ursachen einer Bewegung.
- Die *Statik* beschreibt Bedingungen, wann *keine* Bewegung auftritt.

## 2.1 Funktionen und Differentiation

### 2.1.1 Funktionen

**Definition 2.1 (Funktion).** Eine Funktion  $f$  ist eine Abbildung von einem Definitionsbereich  $\mathbb{D}$  in einen Wertebereich  $\mathbb{W}$ . Man schreibt

$$x \in \mathbb{D} \quad f : x \rightarrow y \quad y \in \mathbb{W}$$

kurz auch  $y = f(x)$ . Häufig haben wir in unseren Fällen  $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$ ; Definitions- oder Wertebereich können aber auch mehrdimensional sein, d.h.  $x$  und  $y$  sind dann Vektoren.

In der Physik unterscheidet man selten genau zwischen dem Ergebnis der Funktion ( $y$ ) und der Abbildung ( $f$ ) selber. Man schreibt dann auch  $y = y(x)$ , was die Abhängigkeit von  $y$  von  $x$  dokumentiert.

Eine Funktion heißt *stetig*, wenn ihr Kurvenverlauf ohne Sprung ist. Genauereres hierzu erfahren Sie in der Mathematik. Hier wollen wir nur anschaulich auf die Abbildungen 2.1 bauen.

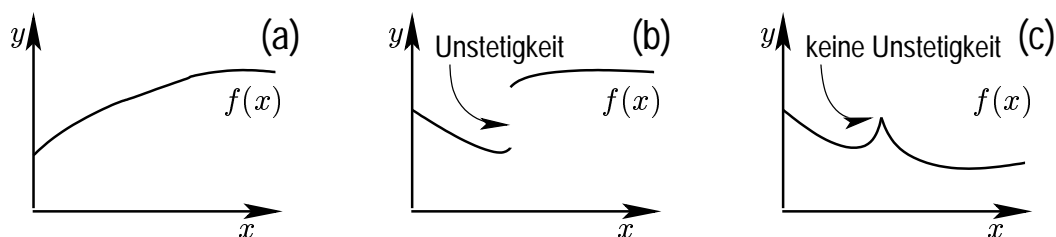


Abbildung 2.1: Beispiele für stetige Funktionen ((a) und (c)) und ein Beispiel für eine Unstetigkeit (Sprung) in (b). Beachte, daß in (c) der Knick zwar stetig ist, aber keine eindeutige Tangente mehr definiert.

### 2.1.2 Ableitung

Wir brauchen noch ein quantitatives Maß dafür, wie stark sich eine Funktion ändert bei kleinen Änderungen seines Arguments. Ein solches Maß liefert uns die Ableitung.

**Definition 2.2 (Ableitung, Differentiation).** Betrachte die Änderung der Funktionswerte relativ zur Änderung des Arguments

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

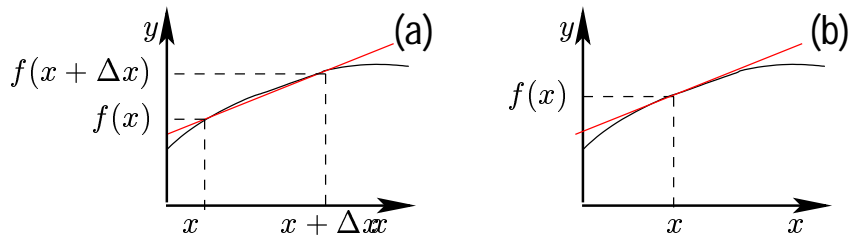


Abbildung 2.2: (a) Sekante an eine Funktion; (b) Tangente an eine Funktion.

Dies ist die Steigung  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  der Sekante in Abb. 2.2a. Die Ableitung einer Funktion ist ihre momentane Veränderung. Dazu geht man von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung  $\frac{dy}{dx}$  über, siehe Abb. 2.2b. Formal ist die Ableitung gegeben durch

$$f'(x) := \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Höhere Ableitungen sind rekursiv definiert  $f'' = (f')' = \frac{dy}{dx}$ ,  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = \frac{d^n y}{dx^n}$ . Beachten Sie bitte die genaue Position der Exponenten.

Bemerkung: Streng genommen ist  $\frac{dy}{dx}$  kein Quotient. Der korrekte Name ist Differentialquotient. Die Herkunft aus dem Grenzwert eines Quotienten erklärt jedoch, warum man häufig doch so tun kann, als handele es sich um einen Quotienten.

### Beispiel 2.1.

$$\begin{aligned} y(x) = x^n &\Rightarrow y'(x) = nx^{n-1} \\ y(x) = \exp(x) &\Rightarrow y'(x) = \exp(x) \end{aligned}$$

**Wichtige Rechenregeln** zu Ableitungen sind

#### 1. Produktregel

$$y(x) = u(x)v(x) \Rightarrow y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

#### 2. Quotientenregel

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

#### 3. Kettenregel

$$y = f(u), u = u(x) \quad \text{also} \quad y(x) = f(u(x))$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$\text{Merkregel "Erweitern": } \frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$$



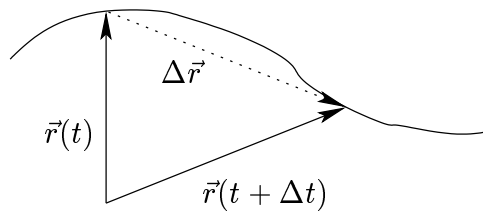


Abbildung 2.3: Differenzen einer vektorwertigen Funktion  $\vec{r}'(t)$ , die von einem Skalar  $t$  abhängt. Die Bahnkurve eines Massepunktes ist ein wichtiges Beispiel für die gezeigte Situation.

#### 4. Ableitung der Umkehrfunktion

$x = f^{-1}(y)$  von  $y = f(x)$ . Dann gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \quad \text{Merkregel} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Ein Beweis nutzt die Kettenregel, da  $f(f^{-1}(y)) = y$ .

$$\frac{dy}{dy} = 1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Man beachte, daß die Ableitung von  $f'$  an der Stelle  $f^{-1}(y)$  genommen werden muß (siehe folgendes Beispiel).

#### Beispiel 2.2.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$  ist bekanntlich der (natürliche) Logarithmus  $f^{-1}(y) = \ln y$ . Da  $f'(x) = e^x$ , erhält man als Ableitung des Logarithmus

$$\frac{d \ln y}{dy} = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

#### Definition 2.3 (Ableitung von Vektoren).

Sei  $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}$  eine gegebene vektorwertige Funktion und  $\vec{a}(t + \Delta t) = \vec{a}(t) + \Delta \vec{a}(t)$  deren Änderung. Dann wird die Ableitung nach  $t$  komponentenweise definiert

$$\frac{d\vec{a}}{dt} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{da_1}{dt} \\ \frac{da_2}{dt} \end{pmatrix}.$$

Darin liegt keinerlei Willkür, denn die Addition und die Subtraktion von Vektoren erfolgt komponentenweise. Somit erfolgt die Bildung einer Differenz komponentenweise und damit auch die Definition des Differentials  $d\vec{a}$ . Eine Illustration liefert die Abbildung 2.3 für den Vektor  $\vec{r}'(t)$ .

**Definition 2.4 (Partielle Ableitungen).** Was ist, wenn wir eine skalare Funktion  $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$  haben, die von einem Vektor abhängt?

Dann definiert man die partielle Ableitung, die die Abhängigkeit von je einer der Komponenten mißt. Man schreibt

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z))$$

und die Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial y}$  und  $\frac{\partial f}{\partial z}$  analog. Manchmal will man betonen, welche Variable festgehalten ist und schreibt

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{y,z},$$

wobei die als konstant angesehenen Variablen tiefgestellt an einen senkrechten Strich notiert werden.

### Beispiel 2.3.

Wir betrachten die Funktion  $f(x, y) = xy^2$  der Variablen  $x$  und  $y$ . Als partielle Ableitungen erhält man dann

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy.$$

*Beachte:* Es gilt sehr allgemein die Schwarzsche Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Die Vertauschbarkeit der Reihenfolge partieller Ableitungen ist sehr praktisch, Rechnungen zu sparen oder zu überprüfen.

## 2.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

### 2.2.1 Bewegung eines Massenpunktes

Wir verwenden hier das Konzept eines Massepunktes, d.h. eines mathematischen Punktes, der eine Masse besitzt. Offensichtlich handelt es sich um eine theoretische Idealisierung, die sich aber als sehr nützlich erwiesen hat.

Sei  $\vec{r}(t)$  der Ortsvektor eines Massenpunktes zur Zeit  $t$ . Die Funktion  $\vec{r}(t)$  ist die *Bahnkurve* des Massenpunktes. Mit Hilfe der vorhin eingeführten Differenzen- und Differentialquotienten können wir nun Geschwindigkeiten und Beschleunigungen definieren.

**Definition 2.5 (Geschwindigkeit, Beschleunigung).** Die *mittlere Geschwindigkeit* zwischen  $t$  und  $t + \Delta t$ , siehe auch Abb. 2.3, ist gegeben durch

$$\vec{v}_{\text{mitt}} := \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Als *momentane Geschwindigkeit* bei  $t$  definiert man nun naheliegenderweise

$$\vec{v}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} =: \dot{\vec{r}}(t).$$

Die *momentante Beschleunigung* ist die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit:

$$\vec{a}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} =: \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t).$$

Die Zeitableitung wird üblicherweise auch durch einen Punkt gekennzeichnet, um sie von anderen Ableitungen zu unterscheiden.

### 2.2.2 Beispiele

**Eindimensionale Bewegung mit konstanter Beschleunigung** Wir betrachten zunächst eine eindimensionale Bewegung mit konstanter Beschleunigung  $a = a_x = \text{const.}$  Dann folgt:

$$\dot{v} = a \quad \Rightarrow \quad v(t) = at + v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

Dabei bezeichnen  $v_0$  und  $x_0$  die Werte von  $v$  und  $x$  zur Zeit  $t = 0$ . Diese Werte müssen zusätzlich bekannt sein, da die Kenntnis der Ableitungen das System nicht vollständig bestimmt. Man muß noch wissen, von welchen Startwerten aus die bekannten Änderungen gelten.

Mathematisch tauchen diese Größen auf, weil wir hier zweimal integriert und somit jedesmal eine Integrationskonstante erhalten haben (siehe Kap. 3.1). Ohne Kenntnisse der Integration erkennt man die Richtigkeit der obigen Gleichung durch Ableitung der rechten Seiten; man hat also auf jeden Fall richtige Lösungen "geraten".

Anwendung: Freier Fall

Die Erdoberfläche sei die  $xy$ -Ebene. Die Höhe des Massepunktes sei  $z(t) = h(t)$  mit dem Anfangswert  $h_0 = h(0) > 0$ . Die Erdbeschleunigung ist

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad g = 9,81 \text{m/s}^2.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit sei  $v(0) = v_0 = 0$ . Dann gilt nach unseren vorigen Überlegungen

$$\begin{aligned} h(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2, \\ v(t) = \dot{h} &= \dot{h}(t) = -gt, \\ a(t) = \ddot{h} &= -g. \end{aligned}$$

Der Aufschlagszeitpunkt  $t_A$  ist durch  $h(t_A) = 0$  definiert. Man erhält

$$t_A = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Der Betrag der Aufschlagsgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$v_A = -v(t_A) = gt_A = \sqrt{2gh_0}.$$

**Kreisbewegung (zweidimensional)** Wir betrachten nun einen Körper, der sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $R$  bewegt, siehe Abb. 2.4. Hier ist es sinnvoll Polarkoordinaten zu verwenden. Die Bahnkurve ist gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $r = |\vec{r}| = R$ . Die zeitliche Änderung des Winkels  $\phi(t)$  bezeichnet man als Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}(t).$$

In kartesischen Koordinaten messen wir die Geschwindigkeiten

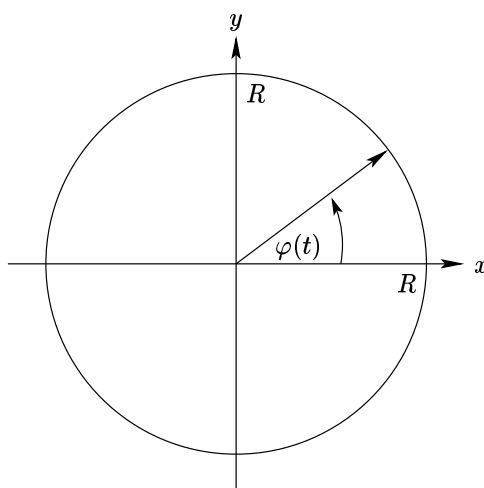


Abbildung 2.4: Bahn einer Kreisbewegung

$$v_x = \dot{x} = -R \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi} = -\omega y,$$

$$v_y = \dot{y} = R \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi} = \omega x.$$

Also gilt

$$\vec{v}(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = R\omega \vec{e}_\varphi,$$

$$v = |\vec{v}| = R|\omega|.$$

Beachte, daß zu jedem Zeitpunkt gilt  $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$ .

Sehr interessant ist auch die Beschleunigung

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= R\dot{\omega}\vec{e}_\varphi + R\omega^2 \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= R(\dot{\omega}\vec{e}_\varphi - \omega^2\vec{e}_r) \\ \Rightarrow a = |\vec{a}| &= R\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} = R\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}. \end{aligned}$$

Betrachten wir speziell die  $g$  gleichmäßige Kreisbewegung, d.h.  $\dot{\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = \text{const} \Leftrightarrow \varphi(t) = \omega t$ , wenn wir  $\varphi(t = 0) = 0$  vereinbaren. Es gilt dann zusammengefaßt

$$\begin{aligned} \vec{r} &= R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} &= R\vec{e}_r & r &= R \\ \vec{v} &= R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} &= R\omega\vec{e}_\varphi & v &= r|\omega| = \text{const} \\ \vec{a} &= -R\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} &= -R\omega^2\vec{e}_r & a &= R\omega^2 = \frac{v^2}{R}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\vec{a}$  parallel zu  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  senkrecht dazu, siehe Abb. 2.5. Die Beschleunigung  $\vec{a}$  heißt Zentripetalbeschleunigung, weil es sich um eine Beschleunigung in Richtung der Kreismitte, des Zentrums, handelt. Zur Klärung sei bemerkt, daß es sich *nicht* um die Zentrifugalbeschleunigung handelt. Die Zentrifugalbeschleunigung ist eine Beschleunigung, die man in einem beschleunigten Bezugssystem annehmen muß, um die Beobachtungen erklären zu können. Es handelt sich um einen Scheineffekt, der daher rührt, daß man nicht in einem Inertialsystem arbeitet. Natürlich sind Zentrifugal- und Zentripetalbeschleunigung verwandt; sie sind auch vom Betrag her gleich.

Besonders zu betonen ist, daß die Kreisbewegung eine *beschleunigte* Bewegung ist, da  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , obwohl der Betrag der Geschwindigkeit  $|\vec{v}| = v$  konstant ist. Es handelt sich um ein eindrucksvolles Beispiel für die Wichtigkeit des Vektorcharakters der Geschwindigkeit.

Durch die Verwendung der passenden mathematischen Struktur, hier Vektorrechnung und Differentialrechnung, haben wir ohne großen Aufwand elementare Tatsachen wie die Zentripetalbeschleunigung ermittelt.

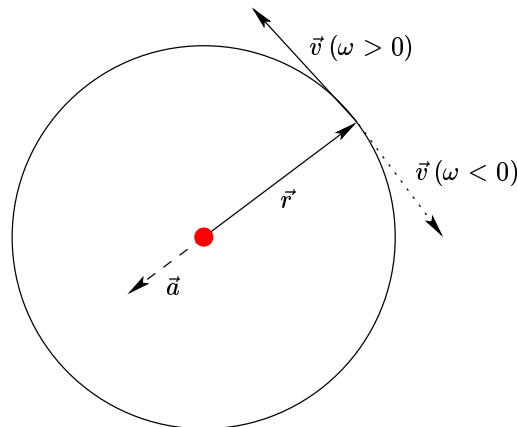


Abbildung 2.5: Richtung von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung bei der gleichmäßigen Kreisbewegung.

### 3 Dynamik eines Massenpunktes, Kräfte

#### 3.1 Integration und Differentialgleichungen

##### 3.1.1 Integration

Eine häufig zu lösende Aufgabe ist die Bestimmung von  $x(t)$  aus gegebenem  $v(t) = \frac{dx}{dt}$ . Die Lösung besteht in der Umkehrung der Ableitung, der Integration. Ein weiterer Grund für Integrale sind Flächenberechnungen.

Man unterscheidet bestimmte und unbestimmte Integrale.

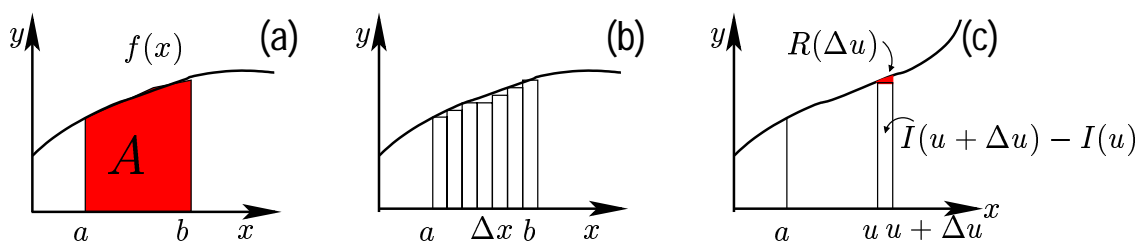


Abbildung 3.1: (a) Bestimmtes Integral als Fläche unter einer Kurve. (b) Berechnung der Fläche durch Summation der Fläche von schmalen Balken. (c) Zunahme eines bestimmten Integrals  $I(u)$  bei Erhöhung der Obergrenze von  $u$  auf  $u + \Delta u$ .

Bestimmte Integrale kann man als Flächenberechnung unter einer Kurve verstehen, siehe auch Abb. 3.1a. Wir notieren

$$A = \int_a^b f(x) dx .$$

Wir erinnern uns, daß man Integrale als Grenzfalle der Summation infinitesimal schmaler Balken verstehen kann, wie es in Abb. 3.1b gezeigt ist. Man rechnet

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} f(a + i * \Delta x) \Delta x ,$$

wobei  $\Delta x = (b - a)/N$  gilt.

Unbestimmte Integrale berechnen zu einer Funktion  $f(x)$  eine Stammfunktion  $F(x) = \int f(x) dx$  mit der Eigenschaft  $F'(x) = f(x)$ . Diese Definition macht aus der unbestimmten Integration die Umkehrung der Ableitung. Stammfunktionen sind offensichtlich immer nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Ist  $F(x)$  eine Stammfunktion zu  $f(x)$ , so auch  $\tilde{F}(x) = F(x) + C$ , da  $\tilde{F}'(x) = f(x)$  gilt.

Wesentlich ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der die Verbindung zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen herstellt

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Erst diese Beziehung motiviert die Notation mit dem Integralzeichen für die Stammfunktionen. Zur Ableitung des Hauptsatzes definieren wir  $I(u) := \int_a^u f(x)dx$ . Zu zeigen ist nun  $I'(u) = f(u)$ . Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta u} (I(u + \Delta u) - I(u)) &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta u} (f(u)\Delta u + R(\Delta u)) \\ &= f(u), \end{aligned}$$

da die kleine Restfläche  $R(\Delta u)$  ungefähr quadratisch mit  $\Delta u$  gegen 0 geht, siehe Abb. 3.1c. Zum Beispiel ist  $R(\Delta u)$  sicher kleiner als die Fläche eines Rechtecks mit den Kanten  $\Delta u$  und  $\Delta f^2$ .

Damit wissen wir, daß  $I(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  ist. Sie erfüllt offensichtlich die Aussage des Hauptsatzes und es ist offensichtlich wegen der Differenz auf der rechten Seite des Hauptsatzes, daß eine additive Konstante daran nichts ändert.

Eine häufig verwendete Notation für den Hauptsatz ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b.$$

### Beispiel 3.1.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Funktion  $x^n$ . Das unbestimmte Integral ist gegeben durch

$$F(x) = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Das bestimmte Integral zwischen  $a$  und  $b$  ist

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Speziell für  $a = 1$  und  $b = 2$  ergibt sich

$$\int_1^2 x^n dx = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

In der Praxis muß man eine gewisse Menge elementarer (unbestimmter) Integrale auswendig können. Aus diesen kann man sich durch Anwendung geeigneter Regeln viele weitere Integrale herleiten. Im folgenden wollen wir zwei wichtige Regeln vorstellen.

---

<sup>2</sup>Diese Argumentation gilt für differenzierbare Funktionen  $f(x)$ . Genaueres zu den Voraussetzungen, damit eine Funktion integrierbar ist, wird die Mathematikvorlesung klären.

- *Partielle Integration:* (Produktregel rückwärts)

Sei  $f(x) = u'(x)v(x)$ . Da  $\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$  folgt

$$\int f(x)dx = \int \left[ \frac{d}{dx}(uv) - uv' \right] dx = uv - \int uv' dx$$

Der Nutzen dieser Regel liegt darin, daß manchmal das Integral  $\int uv' dx$  einfacher auszurechnen ist als  $\int u'v dx$ .

- *Substitutionsregel:* (Kettenregel rückwärts)

Sei  $F(u) = \int f(u)du$  und  $u = u(x)$ ,  $u' = \frac{du}{dx}$ . Aus der Kettenregel wissen wir

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = f(u(x))u'(x).$$

Also gilt

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) = \int f(u)du.$$

Je nach Problem vereinfacht die Substitutionsregel von links nach rechts oder umgekehrt.

*Beachte:* Bei bestimmten Integralen sind die Integrationsgrenzen mitzutransformieren:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

### Beispiel 3.2.

1. (Kettenregel)

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^u du = e^u = e^{\sin x},$$

wobei  $u = \sin(x)$  und  $u' = \cos(x)$  verwendet wurde.

2. (Kettenregel)

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln |u(x)|.$$

Hier ist es als Merkgel sehr suggestiv  $du = u' dx$  zu verwenden.

3. (Produktregel)

$$\int x \exp(x) dx = x \exp(x) - \int \exp(x) dx = x \exp(x) - \exp(x),$$

wobei  $x$  als abzuleitende Funktion und  $\exp(x)$  als zu integrierende Funktion gewählt wurde.



### 3.1.2 Differentialgleichungen

Die Integration löst das Problem, von  $y'(x) = f(x)$  auf  $y(x)$  zu schließen. Einnoch schwierigeres Problem liegt vor, wenn wir von

$$\begin{array}{ll} y'(x) = f(x, y) & \text{Differentialgleichung 1. Ordnung} \\ y''(x) = f(x, y, y') & \text{Differentialgleichung 2. Ordnung} \\ \text{usw.} & \end{array}$$

auf  $y(x)$  schließen müssen. Solche Probleme heißen Differentialgleichungen (DGL). Wir wollen hier nur ein paar einfachere Fälle, die in der Physik weit verbreitet sind, ansprechen.

#### Beispiel 3.3.

1. Der einfachste Fall einer DGL 1. Ordnung ist  $y' = f(x)$ . Die allgemeine Lösung dieser DGL ist  $y(x) = \int f(x)dx$ , d.h. dieser Fall entspricht gerade der Integration.
2. Wir betrachten eine DGL der Form

$$y' = g(x)h(y)$$

Dann hilft die sogenannte *Trennung der Variablen*, die die Substitutionsregel nutzt. Es läßt sich ein allgemeines Lösungsverfahren angeben<sup>3</sup>. Division durch  $h(y)$  und Integration nach  $x$  liefert

$$\int \frac{dy}{dx} \frac{1}{h(y)} dx = \int g(x) dx = G(x) .$$

Auf der linken Seite hilft die Substitutionsregel

$$\tilde{H}(y) := \int \frac{1}{h(y)} dy = G(x) .$$

Die Lösung der DGL reduziert sich also im Wesentlichen auf zwei Integrationen. Kennen wir zusätzlich die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$ , so gilt

$$\tilde{H}(y) - \tilde{H}(y_0) = G(x) - G(x_0) ,$$

was man dann noch nach  $y$  auflösen muß, um  $y(x)$  zu gewinnen.

Beachte, daß man wie bei der Integration noch eine Zusatzinformation benötigt. Hier ist das die Integrationskonstante  $C := \tilde{H}(y_0) - G(x_0)$ .

#### Beispiel 3.4.

Wir betrachten als Beispiel folgende DGL mit getrennten Variablen:  $y'(x) = -2xy^2(x)$ .

Wir haben

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (-2)x dx = -2x^2 + C$$

---

<sup>3</sup>Das ist nur für die wenigsten DGL-Typen möglich!

und die Integration links liefert

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y(x)} = x^2 + C \quad \curvearrowright \quad y(x) = \frac{1}{x^2 + C}$$

Mit Anfangsbedingung  $y(1) = 1$  ergibt sich die Integrationskonstante zu  $C = 0$  und man erhält die Lösung  $y(x) = \frac{1}{x^2}$ . Das dies tatsächlich eine Lösung der DGL  $y'(x) = -2xy^2(x)$  überprüft man leicht durch Einsetzen und Differenzieren.

*Bemerkung:* Wie wir gesehen haben, enthalten Lösungen von Differentialgleichungen 1. Ordnung *eine* offene Konstante, mit der man die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  erfüllen kann. Bei Differentialgleichungen 2. Ordnung treten entsprechend immer zwei Konstanten auf, die durch zwei Anfangsbedingungen festgelegt werden, z.B.  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = v_0$ .

Damit Sie die Begriffe zu anderen weit verbreiteten Differentialgleichungen schon einmal gesehen haben, folgt nun noch eine unvollständige Liste dazu, die teilweise in den Übungen untermauert werden wird.

1. homogene lineare DGL  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

wobei die  $\lambda_j$  die Nullstellen des sogenannten charakteristischen Polynoms sind, das man durch Einsetzen des Ansatzes  $y(x) = e^{\lambda x}$  in die DGL erhält

$$a_2 \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

2. inhomogene lineare DGL  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = h(x) \quad \Longrightarrow \quad y_{\text{allg}}(x) = y_{\text{spez}}(x) + y_{\text{hom}}(x)$$

Verfügt man über *eine* spezielle Lösung  $y_{\text{spez}}(x)$  der inhomogenen DGL, so erhält man die allgemeine Lösung  $y_{\text{allg}}(x)$  durch Addition einer beliebigen homogenen Lösung

$$y_{\text{allg}} = y_{\text{spez}}(x) + C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Die spezielle Lösung muß man raten, wobei das physikalische Verständnis häufig hilft. Insbesondere gilt für  $h(x) = b = \text{const}$ , daß  $y_{\text{spez}} = b/a_0$  eine Lösung ist.

3. Variation der Konstanten

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x).$$

Zuerst löst man die homogene DGL ( $h(x) = 0$ ) und ersetzt dann die auftretende Integrationskonstante  $C$  durch eine Funktion  $C(x)$ . Diesen Ansatz setzt man in die inhomogene

DGL ( $h(x) \neq 0$ ) ein, um  $C(x)$  durch direkte Integration zu bestimmen. Zusammengefaßt kann man diese Schritte auch so durchführen, daß zuerst obige Gleichung mit  $e^{G(x)}$  multipliziert wird, wobei  $G(x)$  die Stammfunktion von  $g(x)$  ist. Produktregel lehrt

$$e^G y' + g e^G y = \frac{d}{dx}(y e^G) = h e^G ,$$

wobei das Argument  $x$  zur Erleichterung der Notation weggelassen wurde. Integration liefert nun

$$y(x) e^{G(x)} = \int_0^x h(\tilde{x}) e^{G(\tilde{x})} d\tilde{x} + y(0) e^{G(0)}$$

woraus sich ergibt

$$y(x) = e^{-G(x)} \int_0^x h(\tilde{x}) e^{G(\tilde{x})} d\tilde{x} + y(0) e^{G(0)-G(x)} .$$

## 3.2 Grundlagen der Dynamik, Kräfte

### 3.2.1 Newtonsche Gesetze (Axiome)

In seiner “Philosophiae naturalis principia mathematica” hat Newton 1687 drei Axiome formuliert, die die Grundlage der (nichtrelativistischen) Mechanik bilden. Diese Axiome sind aus Beobachtungen abgeleitete Erfahrungstatsachen, die nicht weiter begründet werden können. Wir werden die Axiome formulieren und nachträglich feststellen, daß sie tatsächlich sehr gut unsere Naturbeobachtungen zusammenfassen.

Man mache sich klar, welche Abstraktionsleistung hinter der Formulierung dieser Axiome steht. So setzen sie Dinge voraus (z.B. Kräftefreiheit), die sich experimentell im 17. Jahrhundert nur sehr unvollständig realisieren ließen.

- **1. Newtonsches Gesetz: Trägheitsgesetz**

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung (keine Beschleunigung), falls keine äußeren Kräfte auf ihn wirken:

$$\boxed{\vec{a} = 0 \quad \text{falls} \quad \vec{F} = 0}$$

Bemerkung: Die gleichförmige Bewegung entspricht also dem natürlichen Bewegungszustand eines Körpers.

Heutiger Erfahrung, die schon Satelliten und Weltallsonden kennt, liegt dieses Axiom sehr nahe. Aristoteles hingegen war noch überzeugt, daß eine Kraft nötig ist, um Geschwindigkeit zu erzeugen. Ohne Kraft verharrte jeder Körper in Ruhe. Probleme bereitet allerdings schon ein Steinwurf. Was läßt den Stein durch die Luft fliegen, nachdem er die Hand verlassen hat? Aristoteles dachte, daß es die hinter dem Stein zusammenschlagende Luft sei! Heute wissen wir, daß die Luft eher ein Hindernis bei der Beobachtung des physikalischen Grundgesetzes ist.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Dieses Beispiel illustriert sehr schön das Dilemma des Forschers: Was ist wesentlich für das beobachtete Phänomen, was ist nebensächlich oder gar störend? Das ist a priori nie klar.

- **2. Newtonsches Gesetz:** Bewegungsgleichung

Greift an einem Körper der Masse  $m$  eine äußere Kraft  $\vec{F}$  an, so wird er beschleunigt

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Das Produkt  $\vec{p} := m\vec{v}$  bezeichnet man als den *Impuls* des Körpers.

*Bemerkung:* Die obige Gleichung ist Definition und Gesetz zugleich. Sie definiert, was wir unter einer dynamischen Kraft verstehen wollen. Andererseits klärt sie, daß die Kraft nicht z.B. quadratisch vom Impuls und seinen Ableitungen abhängt. Außerdem zeigt sich, daß der oben definierte Kraftbegriff mit unserer Vorstellung gut übereinstimmt und sich einfache Zusammenhänge zur Kraft schwerer Körper und zu Federkräften ergeben, siehe unten.

- **3. Newtonsches Gesetz:** Wechselwirkungsgesetz

Wechselwirken zwei Körper miteinander, so ist die Kraft  $\vec{F}_{21}$ , die Körper 1 auf Körper 2 ausübt, entgegengesetzt gleich der Kraft  $\vec{F}_{12}$ , die Körper 2 auf Körper 1 ausübt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (\text{actio=reactio})$$

- **4. Axiom:** Superpositionsprinzip

Wirken auf einen Massenpunkt gleichzeitig mehrere Kräfte  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ , so ist ihre Gesamtwirkung durch

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

gegeben.

*Bemerkung:* Dieses Axiom ist so nicht als Gesetz von Newton formuliert worden. Nach moderner Lesart muß man diese Tatsache aber der Vollständigkeit halber als Axiom hinzufügen.

**Definition 3.1 (Inertialsystem).** Ein Bezugssystem (Koordinatensystem), in dem die obigen Axiome gelten, nennen wir ein *Inertialsystem*. Inertialsysteme sind somit ausgezeichnete Bezugssysteme, in denen die physikalischen Gesetze in ihrer einfachen Form gelten.

Wichtig sind die impliziten Annahmen, die der Newtonmechanik zugrundeliegen.

- **Absolute Zeit:** Die Zeit ist in allen Inertialsystemen gleich, d.h. invariant  $\Delta t = \Delta t'$ . Die Zeitnullpunkte können natürlich differieren, so daß Gleichheit nur für Zeitdifferenzen festgestellt werden kann.

*Bemerkung:* Die Bestimmung der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse ist möglich, da unendliche Signalggeschwindigkeit erlaubt ist.

- **Absoluter Raum:** Es gibt einen absoluten Raum, in dem Sinn, daß Längen, Abstände und Winkel unabhängig vom Bezugssystem festliegen. Jedoch ist *kein* Inertialsystem ausgezeichnet, das angibt, was “in Ruhe” absolut bedeutet. Jedes Bezugssystem, daß sich bezüglich eines Inertialsystems mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist selbst ein Inertialsystem; es gilt das klassische Relativitätsprinzip. Die auf einen Körper wirkende Kraft ist in allen Inertialsystemen gleich. Das gilt aber *nicht* für die Geschwindigkeit.

### 3.3 Beispiele für spezielle Kräfte

#### 3.3.1 Schwerkraft

Die Erdanziehungskraft, d.h. die Gravitationskraft an der Erdoberfläche, auf einen Körper der Masse  $m_s$  ist bekanntlich

$$\vec{G} = m_s \vec{g} = -m_s(0, 0, g) .$$

Hierbei taucht die *schwere* Masse  $m_s$  auf. In der Bewegungsgleichung  $\vec{F} = m_t \vec{a}$  tritt hingegen die *träge* Masse  $m_t$  in Erscheinung. Es hat sich keine Notwendigkeit ergeben, diese zu unterscheiden, so daß wir immer von  $m_s = m_t$  ausgehen und fernerhin nur von der Masse  $m$  sprechen. Damit fällt die Masse in der Bewegungsgleichung wieder raus und wir erhalten  $\vec{a} = \vec{g}$ . Als Lösung der Bewegungsgleichung ergibt sich dann

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0 .$$

wie wir bereits in Kap. 2.2.2 diskutiert haben.

#### 3.3.2 Elastische Kräfte

Elastische Kräfte werden nach dem Hookeschen Gesetz idealisiert, d.h. sie sind proportional zu einer Auslenkung

$$\vec{F}_{\text{elast}} = \vec{F}_{\text{elast}}(\vec{r}) = -D\vec{r}$$

bei geeignet gewähltem Ursprung, so daß bei  $\vec{r} = 0$  keine Kraft wirkt. Ein wichtiges Beispiel für eine elastische Kraft ist die Rückstellkraft einer Feder.

In einer Dimension ergibt sich die sehr universelle Bewegungsgleichung  $m\ddot{x} = -Dx$ . Parametrisiert man  $D = m\omega_0^2$ , so ergibt sich

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

als homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Es handelt sich um eine sogenannte Schwingungsgleichung, da sie bei allen Schwingungsphänomenen auftritt. Als DGL 2. Ordnung gibt es zwei homogene Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(\omega_0 t) && (\text{denn: } \dot{x}_1 = -\omega_0 \sin(\omega_0 t), \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)), \\ x_2 &= \sin(\omega_0 t) && (\text{denn: } \dot{x}_2 = \omega_0 \cos(\omega_0 t), \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)). \end{aligned}$$

Beiden Lösungen ist gemein, daß sie ein oszillatorisches Verhalten beschreiben mit der *Kreisfrequenz*  $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ . Sie entspricht einer Periodendauer  $T_0$  von  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Je härter die Feder und je kleiner die schwingende Masse desto größer ist die Frequenz bzw. desto kleiner ist die Periodendauer  $T_0$ .

Die allgemeine Lösung lautet<sup>5</sup>

$$x(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

mit den beiden Integrationskonstanten  $A, B$ . Eine alternative Darstellung dieser Lösung ist

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \varphi_0),$$

mit den Integrationskonstanten  $C$  und  $\varphi_0$ . Das trigonometrische Additionstheorem liefert den Zusammenhang

$$C \cos(\omega_0 t - \varphi_0) = C \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi_0) + C \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi_0).$$

Hieraus folgt

$$\left. \begin{array}{l} A = C \sin \varphi_0 \\ A = C \cos \varphi_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C^2 = A^2 + B^2 \\ \tan \varphi_0 = \frac{A}{B} \end{array} \right.$$

Wie üblich legen die Anfangsbedingungen  $x(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}(t=0) = v_0$  die Integrationskonstanten fest

$$\begin{aligned} x_0 = x(t=0) &\quad \curvearrowright \quad B = x_0 \\ v_0 = \dot{x}(t=0) &= \omega_0 [A \cos \omega_0 t - B \sin \omega_0 t]_{t=0} = \omega_0 A \quad \curvearrowright \quad A = \frac{v_0}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösung

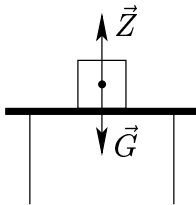
$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \quad \left( \text{mit } \tan \varphi_0 = \frac{v_0}{\omega_0 x_0} \right). \end{aligned}$$

### 3.3.3 Zwangskräfte

Zwangskräfte treten auf, wenn gewisse geometrische Bedingungen, die sogenannten Zwangsbedingungen, erfüllt werden. Ein schwerer Körper auf einem Tisch spürt zwar die Erdanziehungskraft. Trotzdem bewegt er sich nicht. Also muß nach Newton die Gesamtkraft, die auf ihn wirkt, verschwinden. Offenbar übt der Tisch auf den Körper eine Kraft aus, die gerade so groß ist, daß sie die Erdanziehung kompensiert. Eine solche Kraft heißt Zwangskraft, weil sie die aus der Zwangsbedingung "Körper liegt auf dem Tisch" resultiert. Das ist in Beispiel (i) illustriert.

<sup>5</sup>Statt  $\sin(\omega_0 t)$  schreibt man häufig auch  $\sin \omega_0 t$ . Aus dem Zusammenhang muß klar sein, daß damit nicht  $t \sin \omega_0$  gemeint ist, da z.B. das Argument des Sinus dimensionslos sein muß.

(i):



$$\vec{0} = m\vec{a} = \vec{F}_{\text{ges}} = \vec{G} + \vec{Z}$$

$$\Rightarrow \vec{Z} = -\vec{G}$$

Wir interessieren uns hier nicht für die mikroskopischen Ursachen der Zwangskräfte wie die Wechselwirkung der Moleküle des Körpers mit denen des Tisches.

(ii): Das zweite Beispiel sind zwei Massen, die über einen straffen Faden miteinander verbunden sind, siehe Abb. 3.2. Welche Kräfte wirken auf die beiden Massen? Sie sind

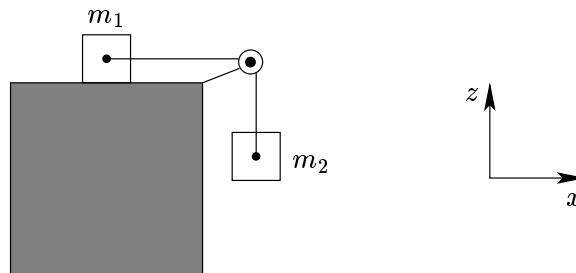


Abbildung 3.2: Zwei über einen straffen Faden gekoppelte Massen.

in Abb. 3.3 dargestellt:  $\vec{Z}$  ist die Zwangskraft des Tisches und  $T$  die im Faden wirkende Zugspannung, die immer in Richtung des Fadens wirkt. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$Z = m_1 g$$

$$T = m_1 \ddot{x}_1 \quad (1)$$

$$T - m_2 g = m_2 \ddot{z}_2 \quad (2)$$

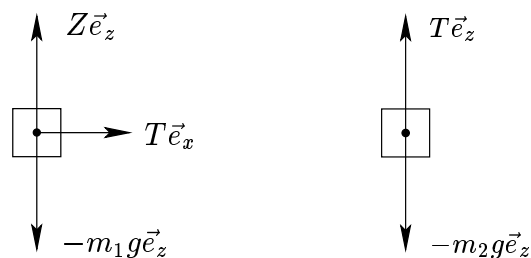


Abbildung 3.3: Kräftebilanzen für die beiden Massen.

Da der Faden immer straff sein soll, gilt  $\dot{x}_1 = -\dot{z}_2$  und daraus  $\ddot{x}_1 = -\ddot{z}_2$ . Einsetzen von (1) in (2) liefert

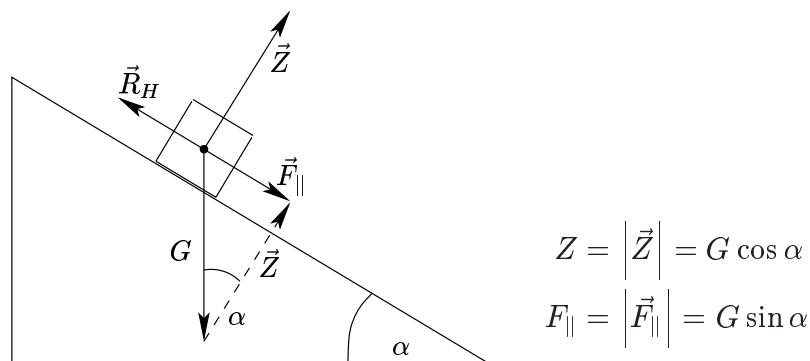
$$\begin{aligned} -m_2 g + m_1 \underbrace{\ddot{x}_1}_{=-\ddot{z}_2} &= m_2 \ddot{z}_2 \\ \Rightarrow -m_2 g &= (m_1 + m_2) \ddot{z}_2 \\ \Rightarrow \ddot{z}_2 &= -g \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ \Rightarrow |\ddot{z}_2| &< g. \end{aligned}$$

Die beiden Körper erfahren also eine Beschleunigung, die kleiner ist als die Erdbeschleunigung. Das ist auch plausibel, da im skizzierten Aufbau die schwere Masse  $m_2$  die größere träge Masse  $m_1 + m_2$  beschleunigen muß.

### 3.3.4 Reaktionskräfte, Reibung

Reaktionskräfte sind die Antwort auf äußere Einflüsse wie den Kontakt zweier Körper oder die Bewegung zweier Körper relativ zu einander.

(i): **Haftreibung:** Körper bewegt sich nicht



Die Beträge der Kräfte resultieren aus einfacher Trigonometrie, wenn man sich klar gemacht hat, daß der Winkel  $\alpha$  auch an der Spitze des Vektors  $\vec{G}$  auftritt (Zwei Winkel sind gleich, wenn ihre Schenkel senkrecht aufeinander stehen.).

Solange sich der Körper nicht bewegt, wird die Hangabtriebskraft  $\vec{F}_{\parallel}$ , die den Körper die schiefe Ebene hinunter treiben will, durch die Haftreibungskraft  $\vec{R}_H$  exakt kompensiert

$$\vec{R}_H = -\vec{F}_{\parallel} \quad \text{falls } F_{\parallel} < \mu_H N .$$

Die Haftreibungskraft ist immer parallel zur Kontaktfläche der sich berührenden Körper. Die maximale Haftreibung ist proportional zum Betrag des Andrucks  $\vec{N} = -\vec{Z}$ , der natürlich gleich dem Betrag der Zwangskraft ist. Die Proportionalitätskonstante  $\mu_H$  heißt



*Haftreibungskoeffizient* und ist eine Materialkonstante. Sie hängt von den beiden sich berührenden Oberflächen ab. Typischerweise gilt  $\mu_H \lesssim 1$ , obwohl spezielle Oberfläche, z.B. mit gummiartigem Bezug, auch Haftreibungskoeffizienten größer als 1 haben können. Wird  $F_{\parallel} > \mu_H N$ , beginnt der Körper zu rutschen (siehe (ii)). Durch Messung des maximalen Winkels  $\alpha_c$ , bei dem sich die Masse noch nicht bewegt, kann man  $\mu_H$  experimentell bestimmen.

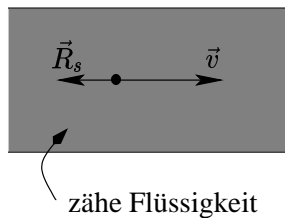
(ii): **Gleitreibung:** Körper bewegt sich

Auf den rutschenden Körper wirkt die Gleitreibungskraft

$$\vec{R}_G = -\mu_G N \hat{v}$$

Die Gleitreibungskraft ist ebenfalls immer parallel zur Kontaktfläche und der Geschwindigkeit entgegengesetzt. Ihr Betrag ist wiederum durch eine Materialkonstante, den *Gleitreibungskoeffizienten*  $\mu_G$ , und den Andruck festgelegt. Es muß gelten  $\mu_G < \mu_H$ , da sonst der Körper losrutschen könnte, aber nicht weiterrutschen, was einen Widerspruch darstellt. Anschaulich "verhaken" sich die beiden Körper weniger gut, wenn sie sich relativ zueinander bewegen, als wenn sie in Ruhe sind.

(iii): **Stokessche Reibung:** Widerstand bei Bewegung durch ein zähes Medium



Aus Erfahrung weiß man, daß die Reibungskraft  $\vec{R}_S$ , die ein Körper erfährt, der sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  durch ein zähes Medium bewegt, proportional zur Geschwindigkeit ist <sup>6</sup>:  $R_S \propto v$  und dieser im Allgemeinen genau entgegengesetzt ist. Dieses Gesetz gilt, solange  $v$  nicht zu groß und nicht zu klein wird. In vektorieller Form geschrieben gilt

$$\vec{R}_s = -\gamma \vec{v},$$

wobei  $\gamma$  der Reibungskoeffizient ist, der von der Form des Körpers abhängt als auch proportional zur Viskosität des zähen Mediums ist.

Speziell in einer Dimension erhält man für ein Teilchen der Masse  $m$ , auf das sonst keine weitere Kraft wirkt, die Bewegungsgleichung

$$m\dot{v} = -\gamma v \quad \text{bzw.} \quad \dot{v} = -\frac{1}{\tau} v \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}.$$

---

<sup>6</sup> $f(x, y, \dots) \propto x$  bedeutet "f ist proportional zu x"

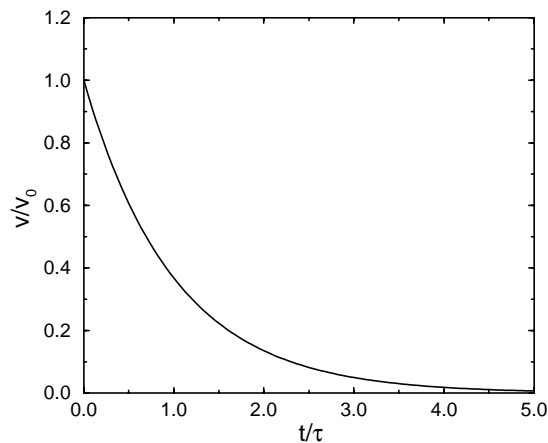


Abbildung 3.4: Relaxationsverhalten.

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Wie besprochen funktioniert der einfache Ansatz  $v = A \exp(\lambda t)$

$$\dot{v} = \lambda A e^{\lambda t} = \lambda v \stackrel{!}{=} -\frac{1}{\tau} v,$$

woraus  $\lambda = -1/\tau$  folgt. Die allgemeine Lösung lautet also

$$v = A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Für die Anfangsbedingung  $v(t = 0) = v_0$  erhält man dann

$$v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Diese Lösung beschreibt ein sogenanntes *Relaxationsverhalten*. Die relaxierende Größe nähert sich exponentiell an ihren Grenzwert, hier  $v = 0$ , an, siehe Abb. 3.4. Die *Relaxationszeit*, innerhalb derer ein Abfall um den Faktor  $e$  erreicht wird, beträgt  $\tau$ . Für Zeiten deutlich größer als  $\tau$  spielen die Newtonschen Trägheitskräfte proportional zur Beschleunigung keine Rolle mehr.

Wenn die Stokesche Reibung  $\gamma$  groß ist, wird die Bewegung vollkommen durch sie dominiert. Konkret bedeutet das, daß sich äußere Kräfte langsam verändern. Langsam bedeutet auf einer Zeitskala deutlich größer als die gerade eingeführte Relaxationszeit  $\tau$ . Dann kann man den Newtonschen Beschleunigungsterm weglassen und erhält vereinfacht die Bewegungsgleichung

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \gamma \vec{v}.$$

In dieser Gleichung ist tatsächlich die Kraft direkt die Ursache der Geschwindigkeit und ohne Kraft gibt es keine Bewegung. Das ist der Grenzfall, in dem Aristoteles recht hat mit

seiner Vorstellung der Bewegung.

Sie sehen an diesem Beispiel, dass Theoriebildung nicht eindeutig ist und man immer in viele Richtungen idealisieren kann. Natürlich hat es sich empirisch erwiesen, daß der Newtonsche Ansatz (Beschleunigungskraft ist fundamental, Reibung ein sekundärer Effekt) fundamentaler ist als der aristotelische Ansatz (Reibung ist fundamental, Beschleunigung ein sekundärer Effekt).

## 4 Arbeit und Energie

### 4.1 Vektoranalysis und Wegintegrale

#### 4.1.1 Vektoranalysis

Zu Beginn sei noch einmal an die Definition der partiellen Ableitung (siehe Kap. 2.1) erinnert

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = \frac{d}{dx} f(x_1 = x, x_2 = \text{const.}) \quad \text{etc..}$$

und die Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} := \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

**Definition 4.1 (Skalares Feld).** Skalares Feld  $f(x, y, z)$

Jedem Raumpunkt  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  wird ein Skalar (Zahlenwert)  $f(\vec{r})$  zugeordnet.

**Definition 4.2 (Vektorfeld).** Vektorfeld  $\vec{F}(\vec{r})$

Jedem Raumpunkt  $\vec{r}$  wird ein Vektor ( $n$ -Tupel)  $\vec{F}(\vec{r})$  zugeordnet.

Betrachten wir eine Funktion  $f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$ . Hierbei kann  $t$  z.B. die Zeit sein und  $x(t), y(t), z(t)$  die Koordinaten eines Massenpunktes zur Zeit  $t$ . Der Wert von  $f$  könnte irgendeine raumabhängige Größe sein, z.B. eine Temperatur oder eine Spannung. Offensichtlich kann man eine zeitabhängige Funktion  $f(t)$  definieren gemäß

$$f : t \rightarrow \vec{r}(t) \rightarrow f(\vec{r}(t)).$$

Die infinitesimale Gesamtänderung  $df$  der Funktion  $f(t)$  ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} df &= f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \end{aligned}$$

Die Größe  $df$  bezeichnet man als *totales Differential*. Die Gesamtänderung setzt sich aus den Teiländerungen in den jeweiligen Richtungen zusammen. Kombinationen aus verschiedenen Änderungen der Gestalt  $dx dy$  tragen nicht bei, da sie quadratisch klein sind, d.h., das Produkt zweier infinitesimaler Größen sind. Die Ableitung von  $f$  nach dem Parameter  $t$  bestimmt sich damit gemäß

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

was man sich durch Division durch  $dt$  abgeleitet vorstellen kann.

Um den obenstehenden Ausdruck kompakter notieren zu können, definieren wir uns den

**Definition 4.3 (Gradient).** eines skalaren Feldes

Zu einem skalaren Feld  $f(\vec{r})$  sei

$$\text{grad } f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Diese Größe heißt der Gradient von  $f$ ; er ist ein Vektorfeld.

Das totale Differential von  $f$  läßt sich nun als formales Skalarprodukt schreiben

$$df = (\text{grad } f) \cdot d\vec{r} \quad \text{mit} \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Um den Vektorcharakter des Gradienten besser notieren zu können, definieren wir uns einen vektorartigen Ableitungsoperator, den

**Definition 4.4 (Nabla-Operator).** Der sogenannte Nabla-Operator  $\vec{\nabla}$  ist definiert als

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Er stellt einen Vektoroperator dar; genauer ist es ein vektorartiger Differentialoperator. Er wirkt auf verschiedene Felder (siehe unten). Angewendet auf sie berechnet er deren Ableitungen.

Mit Hilfe des Nabla-Operators kann man den Gradienten von  $f$  kompakt schreiben als

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f.$$

Der Gradient  $\vec{\nabla} f$  eines skalaren Feldes  $f$  hat eine ganz anschauliche Bedeutung. Er zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von  $f$ . Formaler gilt

(i)  $\vec{\nabla} f$  steht senkrecht auf den Flächen, auf denen  $f(\vec{r})$  konstant ist, siehe Abb. 4.1. Solche Flächen heißen Äquipotentialflächen; bekannte Beispiele in zwei Dimensionen sind Höhenlinien.

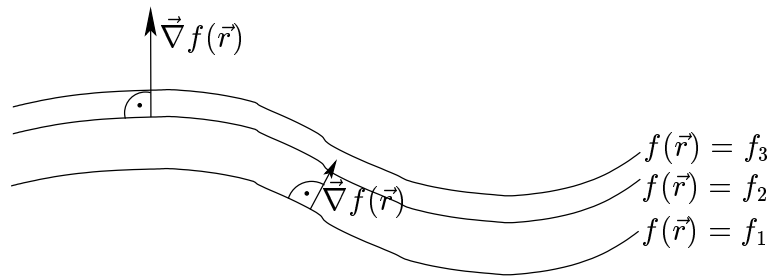


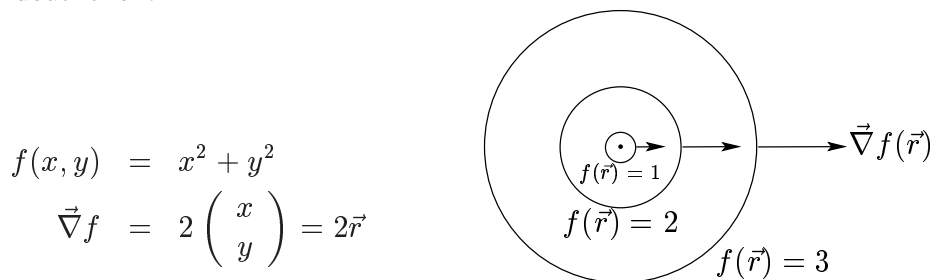
Abbildung 4.1:  $\vec{\nabla} f$  steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen  $f(\vec{r}) = \text{const}$ . In der Abbildung gilt  $f_3 > f_2 > f_1$ , wobei  $f_3 - f_2 = f_2 - f_1$  sein soll, so daß man einen Eindruck von der Stärke der Änderung von  $f(\vec{r})$  bekommen kann.

Die Äquipotentialflächen sind formal durch  $df = 0$  gekennzeichnet. Das entspricht  $(\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r} = 0$  und legt fest, in welche Richtung eine infinitesimale Verschiebung  $d\vec{r}$  nur gehen kann, wenn sie entlang einer Äquipotentialfläche erfolgen soll. Es folgt unmittelbar, daß  $\vec{\nabla} f$  und  $d\vec{r}$  senkrecht aufeinander stehen.

(ii) Nach  $df = (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r}$  ist der stärkste Anstieg von  $f$  gegeben, wenn  $d\vec{r}$  parallel zu  $\vec{\nabla} f$  steht. Also zeigt  $\vec{\nabla} f$  in Richtung des stärksten Anstiegs bei gegebener Länge der Verschiebung  $d\vec{r}$ .

#### Beispiel 4.1.

Die beiden oben genannten Eigenschaften kann man sich an folgendem zweidimensionalen Beispiel verdeutlichen.



Die Kurven  $f(\vec{r}) = f_i = \text{const}$  sind hier Kreise vom Radius  $R = \sqrt{f_i}$ . Das Vektorfeld des Gradienten zeigt radial nach außen und steht senkrecht auf den Äquipotentiallinien<sup>7</sup>.

Es gibt auch Differentialoperatoren für Vektorfelder. Sehr wichtig sind die folgenden zwei.

**Definition 4.5 (Divergenz).** Die Divergenz eines Vektorfeldes  $\vec{F}(\vec{r})$  ist

$$\text{div } \vec{F} := \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x}(\vec{r}) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(\vec{r}) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(\vec{r}).$$

<sup>7</sup>Die Äquipotentialbedingung  $f(\vec{r}) = \text{const}$  schränkt den Raum, auf dem das Skalarfeld definiert ist, immer um genau eine Dimension ein. In drei Dimensionen resultieren also Äquipotentialflächen; in zwei Dimensionen Äquipotentiallinien, auch Höhenlinien genannt; in  $n$  Dimensionen resultieren  $n - 1$  dimensionale Hyperflächen. Bei der allgemeinen Beschreibung ist also eine gewisse sprachliche Flexibilität vonnöten.

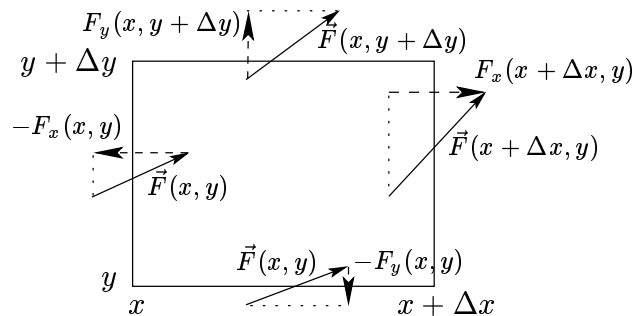


Abbildung 4.2: Zur Berechnung der Divergenz in zwei Dimensionen wird ein rechteckiges Probenvolumen in zwei Dimensionen betrachtet. Flußbeiträge nach außen werden positiv gezählt.

Formal kann die Divergenz geschrieben werden als das Skalarprodukt des Nabla-Operators und des Vektorfelds  $\vec{F}$ :  $\text{div } \vec{F} := \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ . Das unterstreicht die Nützlichkeit des Nabla-Operators. Beachte aber, daß es beim Nabla-Operator anders als bei gewöhnlichen Vektoren immer auf die Reihenfolge ankommt: erst der Operator, dann das Vektorfeld.

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Skalarfeld.

Die Divergenz gibt Auskunft über die Quellen und Senken eines Feldes. Sie mißt die Quellstärke eines Vektorfeldes, indem sie Bilanz zieht zwischen dem Fluß eines Vektorfeldes *aus* einem infinitesimalen Probenvolumen heraus und dem Fluß eines Vektorfeldes *in* dieses Probenvolumen hinein. Abb. 4.2 zeigt das am Beispiel eines infinitesimalen Rechtecks in zwei Dimensionen. Die Flußbilanz beträgt

$$\Delta\phi = \Delta y (F_x(x + \Delta x, y) - F_x(x, y)) + \Delta x (F_y(x, y + \Delta y) - F_y(x, y))$$

Dabei ist der Fluß durch eine Seite proportional zu deren Länge und zur Vektorkomponente *senkrecht* auf der Seite. Positiv wird der Fluß heraus gezählt. Jeweils zwei gegenüberliegende Seiten ergeben eine Klammer. Führen wir nun den Grenzwert für den Fluß pro Fläche (in drei Dimensionen pro Volumen)  $\Delta\phi/\Delta V$  mit  $\Delta V = \Delta x \Delta y$  durch, so erhalten wir die Divergenz

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta F_x}{\Delta x} + \frac{\Delta F_y}{\Delta y} \right) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}.$$

Gradient und Divergenz lassen sich offensichtlich für alle Dimensionen verallgemeinern. Speziell in drei Dimensionen gibt es noch einen wichtigen Differentialoperator, der die Wirbelstärke eines Vektorfeldes mißt. Es ist die

**Definition 4.6 (Rotation).**

Die Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{F}(\vec{r})$  ist durch

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

definiert. Formal ergibt sie sich aus dem Kreuzprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld  $\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ . Die Rotation eines Vektorfeldes ist wieder ein Vektorfeld.

Anschaulich gibt die Rotation an, wie stark ein Vektorfeld Wirbel hat, d.h. im Kreis entlang zeigt. Die  $z$ -Komponente mißt Wirbel in der  $xy$ -Ebene. Aus Abb. 4.3 liest man ab

$$\Delta W = \Delta x(F_x(x, y) - F_x(x, y + \Delta y)) + \Delta y(F_y(x + \Delta x, y) - F_y(x, y)).$$

Das Flächenelement hat die Größe  $\Delta A = \Delta x \Delta y$  und man erhält durch den Grenzprozeß die  $z$ -Komponente der Rotation

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta A} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta F_x}{\Delta y} + \frac{\Delta F_y}{\Delta x} \right) = -\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x} = \left( \vec{\nabla} \times \vec{F} \right)_z.$$

Die anderen Beiträge in  $x$  und  $y$  Richtung folgen analog durch einmalige und zweimalige Anwendung zyklischer Vertauschung der Achsen  $x \rightarrow y; y \rightarrow z; z \rightarrow x$ .

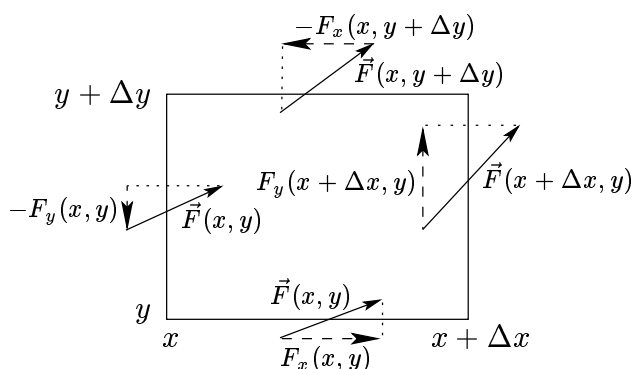


Abbildung 4.3: Zur Berechnung der Rotation in  $z$ -Richtung wird eine kleine Probenfläche in der  $xy$ -Ebene betrachtet. Die Beiträge werden gemäß mathematisch positivem Drehsinn addiert, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn.

## 4.1.2 Wegintegrale

**Definition 4.7 (Wegintegral).** Das Integral eines Vektorfeldes  $\vec{F}(\vec{r})$  längs eines Weges vom Punkt  $\vec{P}$  zum Punkt  $\vec{Q}$  ist definiert durch

$$\int_P^Q \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i F(\vec{r}_i) \Delta r_i \cos \varphi_i,$$

mit  $\Delta \vec{r}_i := \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$ . Es wird also nur die Komponente entlang des Weges aufsummiert, siehe Abb. 4.4. Beachte, daß das Wegintegral sowohl von  $\vec{F}(\vec{r})$  als auch vom Weg  $\gamma$  abhängt.

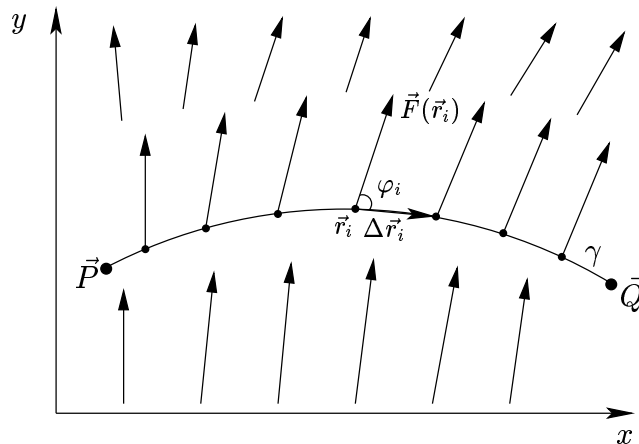


Abbildung 4.4: Wegintegral als Grenzfall der Summation des Vektorfelds entlang diskreter gerader Wegstücke.

Mathematisch wird ein Weg über eine sogenannte Parametrisierung definiert. Sie erleichtert praktisch auch die tatsächliche Durchführung von Wegintegralen, weil sie das mehrdimensionale Gebilde auf ein eindimensionales Integral zurückführt.

**Definition 4.8 (Parametrisierung).** Eine Parametrisierung des Wegs  $\gamma$  besteht in einer Abbildung

$$t \in [a, b] \rightarrow \vec{\gamma}(t) \quad \text{mit} \quad \gamma(a) = \vec{P}, \quad \gamma(b) = \vec{Q}$$

so daß  $\gamma$  die Bahnkurve von  $\gamma(t)$  ist. Beachte, daß es zu einem Weg beliebig viele verschiedene Parametrisierungen gibt; die Parametrisierung ist nicht eindeutig.

Mit Hilfe der Parametrisierung läßt sich der Grenzprozeß des Wegintegrals wie folgt fassen

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i &= \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}(\vec{\gamma}(t_i)) \cdot \Delta \vec{\gamma}(t_i) \\ &= \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}(\vec{\gamma}(t_i)) \cdot \frac{\Delta \vec{\gamma}(t_i)}{\Delta t_i} \Delta t_i = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt . \end{aligned}$$

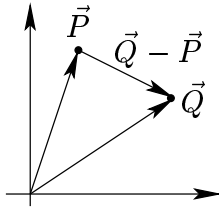
Da der Ausdruck  $\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \Delta \vec{\gamma}'(t)$  eine skalare Funktion von  $t$  darstellt, handelt es sich hierbei um ein bekanntes eindimensionales bestimmtes Integral. Man kann die Umrechnung des Wegintegrals auf ein Integral über das Definitionsintervall der Parametrisierung als Substitutionsregel auffassen. Das Wegintegral wird nicht geändert, wenn eine andere Parametrisierung gewählt wird<sup>8</sup>

Wichtige Parametrisierungen sind die folgenden.

<sup>8</sup>Sei  $\tilde{t} \in [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \vec{\beta}(\tilde{t})$  eine alternative Parametrisierung, die denselben Weg beschreibt. Dann gibt es eine Funktion  $f : t \in [a, b] \rightarrow \gamma(t) = \beta(\tilde{t}) \rightarrow \tilde{t} \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$ , die die ursprüngliche Laufvariable  $t$  auf die alternative



**Beispiel 4.2.** 1. Gerade von  $\vec{P}$  nach  $\vec{Q}$

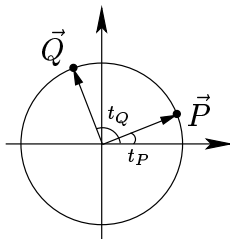


$$\vec{\gamma}(t) = \vec{P} + (\vec{Q} - \vec{P})t$$

$$(t \in [0, 1])$$

Offensichtlich beschreibt dies eine Gerade mit  $\vec{\gamma}(0) = \vec{P}$  und  $\vec{\gamma}(1) = \vec{Q}$ .

2. Kreisbogen



$$\vec{\gamma}(t) = R(\cos t, \sin t)$$

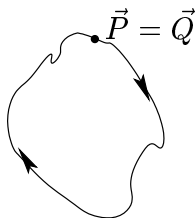
$$\text{mit } R = |\vec{P}| = |\vec{Q}| \text{ und } t \in [t_P, t_Q]$$

Dabei sind  $t_P$  und  $t_Q$  die Winkel, die die Ortsvektoren  $\vec{P}$  und  $\vec{Q}$  mit der  $x$ -Achse bilden, und  $R$  der Radius des Kreisbogens. Für einen solchen Weg müssen natürlich  $\vec{P}$  und  $\vec{Q}$  den gleichen Abstand  $R = |\vec{P}| = |\vec{Q}|$  vom Ursprung haben.

Eine besondere Bedeutung haben sogenannte geschlossene Wege.

**Definition 4.9 (Geschlossener Weg).**

Sind Anfangs- und Endpunkt identisch  $\vec{P} = \vec{Q}$ , so nennt man den Weg geschlossen. Für die zugehörigen Wegintegrale gibt es ein spezielles Symbol.



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Im Allgemeinen wird  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$  verschieden von Null sein.

**Beispiel 4.3.** Geschlossenes Wegintegral

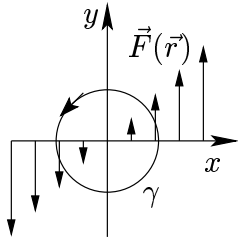
Betrachten wir das zweidimensionale Vektorfeld  $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ . Es zeigt in  $y$ -Richtung, hängt

Laufvariable  $\tilde{t}$  abbildet. Damit rechnet man mit Hilfe der Substitutionsregel nach

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{\beta}(\tilde{t})) \cdot \vec{\beta}'(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\beta}(f(t))) \cdot \frac{d\vec{\beta}}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{dt} dt,$$

wobei  $\frac{d\tilde{t}}{dt} = f'(t)$  ist.

aber nicht von  $y$  ab, siehe Skizze. Das Wegintegral über den kreisförmigen Weg  $\gamma$  mit der nahe-  
liegenden Parametrisierung  $\gamma(t) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  wird berechnet.



$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2 t dt = \pi R^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Eine sehr wichtige Frage in der Physik der Kraftfelder, also von Vektorfeldern, ist die Frage, ob ein gegebenes Vektorfeld  $\vec{F}$  als Gradient eines Skalarfelds geschrieben werden kann  $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} f(\vec{r})$ . Ohne weitere Details ist zu erkennen, daß eine solche Schreibweise sehr praktisch ist, da sie die Menge an Information, die man explizit kennen muß, vermindert wird. Ein Skalarfeld erfordert nur einen Zahlenwert pro Raumpunkt, ein Vektorfeld in drei Dimensionen hingegen drei. Damit ist auch schon offensichtlich, daß es nicht für alle Vektorfelder ein Potential geben kann. Sonst ließe sich die dreifache Information immer auf eine einfache reduzieren.

**Definition 4.10 (Potential).**

Existiert zu einem Vektorfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  ein Skalarfeld  $f$  mit  $\vec{F} = -\text{grad} f$ , so heißt  $f$  ein *Potential* von  $\vec{F}$ .

Analog zur Integration ist ein Potential  $f$  nicht eindeutig bestimmt, da mit  $f$  auch  $f + c$  mit einer beliebigen Konstanten  $c$  ein Potential ist.

*Bemerkung:* In einer Dimension hat jedes Vektorfeld  $F_x(x)$  ein Potential, nämlich die negative Stammfunktion<sup>9</sup>. Das ist kein Widerspruch zu den vorherigen Bemerkungen über Information, da in einer Dimension keinerlei Information gespart wird beim Übergang von  $F_x(x)$  zu  $f(x)$ . Wir wollen nun einige Beobachtungen zu den Zusammenhängen zwischen der Existenz eines Potentials, Wegintegralen und der Rotation machen. Diese Punkte werden letztlich in einem mathematischen Satz zusammengefaßt.

1. Gibt es ein Potential zu  $\vec{F}$ , so gilt für ein beliebiges Wegintegral

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} &= - \int_a^b \underbrace{\vec{\nabla} f(\vec{\gamma}(t)) \vec{\gamma}'(t)}_{df/dt} dt \\ &= f(\vec{\gamma}(a)) - f(\vec{\gamma}(b)) = f(\vec{P}) - f(\vec{Q}). \end{aligned}$$

Das heißt, daß bei Existenz eines Potentials die Wegintegrale *doch* unabhängig vom genauen Weg sind. Es kommt nur auf den Anfangs- und den Endpunkt an. Speziell verschwinden die Wegintegrale geschlossener Wege.

---

<sup>9</sup>Wir betrachten hier nicht die Möglichkeit, daß eine Funktion nicht integrierbar ist.

2. Wenn wir zur Definition und Herleitung der Rotation 4.6 zurückgehen, erkennen wir, daß die Rotation nichts anderes ist als das Wegintegral um ein infinitesimales Flächenelement. Wenn aber alle geschlossenen Wegintegrale verschwinden, dann verschwindet auch die Rotation. Tatsächlich kann man auch ganz elementar nachrechnen, daß

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

gilt, für beliebiges Potential.

3. Umgekehrt kann man aus dem Verschwinden der Rotation eines Vektorfeldes auf das Verschwinden jedes geschlossenen Wegintegrals schließen, siehe Abb. 4.5. Diese Tatsache, die wir hier natürlich nur plausibel machen, firmiert in der Mathematik unter dem Satz von Stokes.

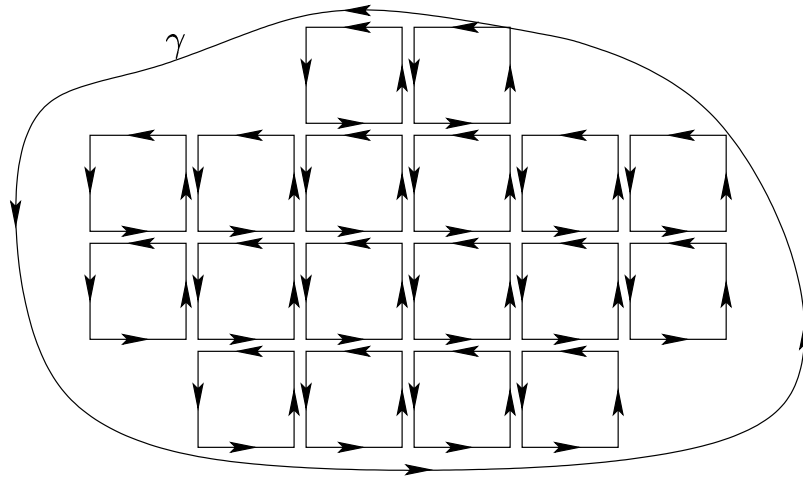


Abbildung 4.5: Füllt man einen beliebigen geschlossenen Weg mit kleinen Flächenelementen wie dargestellt aus, so erkennt man, daß die Wegintegrale zweier sich berührender Seiten sich immer wegheben. Nur am Rand, also auf dem Weg  $\gamma$ , bleiben die Beiträge übrig. Hierfür betrachten wir gedanklich infinitesimal kleine Flächenelemente. Das bedeutet, daß man das Wegintegral berechnen kann durch die Summation aller infinitesimaler Wegintegrale um die Flächenelemente. Deren Wert ist aber gerade durch die Rotation gegeben. Verschwindet also  $\vec{\nabla} \vec{F}(\vec{r})$  überall, d.h. für alle  $\vec{r}$ , so verschwindet auch jedes geschlossene Wegintegral.

4. Verschwinden alle Wegintegrale über geschlossene Wege  $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$ , dann hängen alle Wegintegrale nur von Anfangs- und Endpunkt ab. Das kann man sich an der Abbildung 4.6 verdeutlichen. Man konstruiert aus zwei verschiedenen Wegen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  von  $\vec{P}$  nach  $\vec{Q}$  einen geschlossenen Weg  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , wobei man  $\gamma_1$  für den Hinweg und  $\gamma_2$  für den Rückweg nutzt. Eine einfache Rechnung zeigt

$$0 = \oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{r},$$

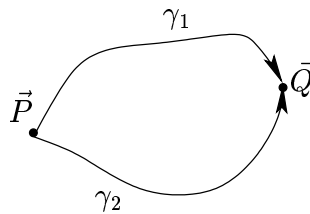


Abbildung 4.6: Verschwinden alle Wegintegrale über geschlossene Wege, so hängen die Wegintegrale nur von Anfangs- und Endpunkt ab. Dazu betrachtet man den Weg  $\gamma$ , der mit  $\gamma_1$  von  $\vec{P}$  nach  $\vec{Q}$  führt und mit  $\gamma_2$  wieder von  $\vec{Q}$  nach  $\vec{P}$ .

woraus die Gleichheit der beiden Wegintegrale entlang  $\gamma_1$  und entlang  $\gamma_2$  folgt.

5. Ist die Unabhängigkeit vom Weg gegeben, dann ergibt der folgende Ausdruck für ein Potential Sinn, da nur Anfangs- und Endpunkt relevant sind

$$f(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}'.$$

Tatsächlich erfüllt er die Bedingung  $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} f(\vec{r})$ .

Fassen wir die obigen Beobachtungen zusammen, ergibt sich der folgende Satz

**Satz 4.1.** Folgende vier Aussagen sind äquivalent:

- 1)  $\int_{\vec{P}}^{\vec{Q}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ist wegunabhängig
- 2)  $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  für alle geschlossenen Wege  $\gamma$ .
- 3) Es existiert ein Potential  $f$  von  $\vec{F}$ , d.h.  $\vec{F} = -\vec{\nabla} f$
- 4)  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  und der Definitionsbereich von  $\vec{F}$  ist einfach zusammenhängend.

Bei der letzten Bedingung, der Rotationsfreiheit, benötigt man noch die Eigenschaft des einfachen Zusammenhangs. Der Vollständigkeit sei dieser angegeben.

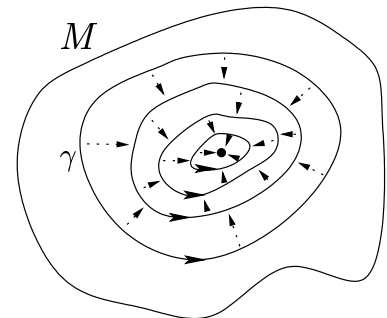
**Definition 4.11 (einfach zusammenhängend).**

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jeder geschlossene Weg  $\gamma$  durch kontinuierliche Deformation ganz auf einen Punkte aus  $M$  zusammenziehen läßt.

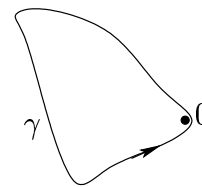
Diese Definition wird an drei Beispielen illustriert.

**Beispiel 4.4.**

1. Die skizzierte Menge ist einfach zusammenhängend, da sich jeder Weg auf einen Punkt reduzieren läßt. Stellen Sie sich dazu den Weg als beliebig elastisches Gummiband vor.



2. Sei  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , also die  $xy$ -Ebene ohne den Ursprung. Betrachten wir einen geschlossenen Weg, der den Ursprung umschließt, z.B. einen Kreis vom Radius  $R$ . Dieser läßt sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen, da man beim Zusammenziehen immer am Ursprung  $0$  hängenbleibt, der nicht zu  $M$  gehört.  $M$  ist also nicht einfach zusammenhängend.



3. Sei  $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , also der dreidimensionale Raum ohne den Ursprung. Hier lassen sich die im vorigen Beispiel betrachteten Wege auf einen Punkt zusammenziehen, da man sie zunächst aus der  $xy$ -Ebene anheben kann. In drei Dimensionen muß man typischerweise eindimensionale Gebiete, z.B. Geraden, entfernen, damit der einfache Zusammenhang verloren geht.

Der einfache Zusammenhang wird für den Satz 4.1 benötigt, da man sonst aus dem Verschwinden der Rotation nicht immer auf das Verschwinden jedes geschlossenen Wegintegrals schließen kann.

## 4.2 Arbeit und Energie

Wir wollen hier generell annehmen, daß die Masse  $m$  zeitlich konstant ist und daß die Kräfte durch Vektorfelder  $\vec{F}(\vec{r})$  unabhängig von der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und der Zeit  $t$  gegeben sind. Was ist Arbeit?

Es ist *keine* Arbeit, einen Massepunkt *senkrecht* zu einer Kraft zu bewegen. Beispiel sei der Schrank auf reibungsfreiem Parkettboden, der verschoben wird.

Hingegen ist Arbeit zu leisten, wenn man *entgegen* einer Kraft verschiebt bzw. man kann Arbeit gewinnen, wenn man *mit* einer Kraft verschiebt. Beispiel für ersteres ist das Heben eines Gewichts entgegen der Erdschwerkraft. Beispiel für letzteres ist Fahrradfahren bei Rückenwind. Diese und ähnliche Überlegungen führen uns zur

**Definition 4.12 (Arbeit längs eines Weges).**

Die Kraft  $\vec{F}(\vec{r})$  bewirkt eine Verschiebung  $d\vec{r}$  eines Massenpunktes. Die dabei von der Kraft am

Massepunkt verrichtete Arbeit beträgt  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Die Arbeit, die von der Kraft  $\vec{F}(\vec{r})$  bei endlicher Verschiebung längs eines Weges  $\gamma$  geleistet wird, ist dann die Summe aller infinitesimaler Beiträge  $dA$

$$A = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Hier taucht also in natürlicher Art und Weise das Wegintegral auf. Man beachte, daß die Arbeit im Allgemeinen von der expliziten Wahl des Weges abhängt. Eine eng verwandte Größe ist die momentane Leistung, der Arbeit pro Zeit

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (4.1)$$

Im Lichte unserer Untersuchungen zu Vektorfeldern, deren Wegintegrale nur von Anfangs- und Endpunkt abhängen, stellt sich die Frage, ob es Kräfte gibt, für die die geleistete Arbeit *nicht* wegababhängig ist. Das führt uns zur

**Definition 4.13 (konservative Kräfte).**

Eine Kraft  $\vec{F}(\vec{r})$  heißt konservativ (erhaltend), wenn die geleistete Arbeit bei Verschiebung von einem beliebigen Punkt  $\vec{P}$  zu einem beliebigen Punkt  $\vec{Q}$  unabhängig vom Weg zwischen  $\vec{P}$  und  $\vec{Q}$  ist.

Aus Kap. 4.1.2 wissen wir, daß zu einer konservativen Kraft ein Potential  $V(\vec{r})$  mit  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$  existiert<sup>10</sup>. Für die geleistete Arbeit ergibt sich in diesem Fall

$$A = \int_{\vec{P}}^{\vec{Q}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{P}}^{\vec{Q}} \underbrace{\vec{\nabla}V \cdot d\vec{r}}_{=dV} = V(\vec{P}) - V(\vec{Q}).$$

Es ist also nur die *Potentialdifferenz* relevant. Beachte, daß additive Konstanten im Potential für die geleistete Arbeit keine Rolle spielen. Die Arbeit konservativer Kräfte verschwindet auf geschlossenen Wegen. Diese Überlegungen führen uns für konservative Kräfte zur

**Definition 4.14 (Potentielle Energie).** Wirken auf einen Massenpunkt nur konservative Kräfte, so daß diesen ein Potential  $V(\vec{r})$  zugeordnet werden kann, so nennen wir

$$E_{\text{pot}} = V(\vec{r})$$

die potentielle Energie des Massenpunkts. Die von den konservativen Kräften geleistete Arbeit entlang eines Weges  $\gamma$  von  $\vec{P}$  nach  $\vec{Q}$  ist das Negative der Potentialdifferenz  $\Delta V = V(\vec{Q}) - V(\vec{P})$ .

Nun wollen wir noch die kinetische Energie  $T$  definieren, also die Energie die in der Bewegung steckt. Zur Ableitung überlegen wir uns, daß die von externen Kräften am Massenpunkt verrichtete Arbeit in die Energie fließen muß, die in der Bewegung steckt

$$dT = dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

---

<sup>10</sup>In der Physik ist es üblich, Potentiale mit  $U$  oder  $V$  zu bezeichnen.

Pro Zeitintervall  $dt$  gilt

$$\frac{dT}{dt} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d(m\vec{v}^2)}{dt} .$$

Daraus folgt unmittelbar  $T = m\vec{v}^2/2 + C$  mit einer Integrationskonstante  $C$ . Diese Konstante ist im Prinzip frei wählbar. Jedoch ist es natürlich sinnvoll, dem Ruhezustand  $\vec{v} = \vec{0}$  die kinetische Energie 0 zuzuordnen. Daher

**Definition 4.15 (Kinetische Energie).** Bewegt sich ein Massenpunkt mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , so birgt diese Bewegung die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 .$$

Betrachten wir nun die beiden Energieformen zusammen, so gilt

$$\left. \begin{array}{l} dA = -dV \\ dA = dT \end{array} \right\} \Rightarrow d(T + V) = 0 .$$

Das bedeutet, daß die Größe  $T + V$  konstant ist. Daher liegt folgende Definition nahe

**Definition 4.16 (Gesamtenergie).** Die Gesamtenergie  $E_{\text{tot}}$  eines Massenpunkts in einem konservativen Kraftfeld ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie

$$E_{\text{tot}} = T(\vec{v}) + V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + V(\vec{r}) .$$

Es gilt der wichtige **Energieerhaltungssatz** bei konservativen Kräften

$E_{\text{tot}}$ ist zeitlich konstant.
---

Diese Erhaltung motiviert die Bezeichnung konservative, d.h. erhaltende, Kräfte.

Beachten Sie die bei der Ableitung benutzten Voraussetzungen:

- 1) Newtonsche Gesetze (mit  $m = \text{const}$ ),
- 2)  $\vec{F}$  konservativ.

Allgemein spielen Erhaltungssätze in der Physik eine sehr wichtige Rolle.

Erhaltungssätze

- sind von Einzelheiten der Teilchenbahn unabhängig, oft auch von Einzelheiten der wirkenden Kräfte, d.h. sie sind Ausdruck sehr allgemeiner Folgerungen aus den Bewegungsgleichungen.
- helfen zu klassifizieren, was überhaupt möglich ist, auch ohne Detailkenntnisse der Vorgänge.

- sind eng mit Invarianzen und Symmetrien verknüpft. Beispiel sei die Energieerhaltung, die aus der Invarianz bezüglich zeitlicher Verschiebung  $t \rightarrow t + t_0$  folgt. Das wird in den Theorievorlesungen genauer ausgeführt.
- erleichtern explizite Rechnungen, da die Bewegungsgleichung Differentialgleichungen 2. Ordnung ( $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ ) sind, der Energiesatz jedoch nur noch einfache Ableitungen enthält.

Die folgenden Beispiele illustrieren die obigen Aussagen.

#### Beispiel 4.5.

Elastische Kraft  $F(x) = -Dx$  in einer Dimension (Feder)

Hier können wir durch Integration schnell ein Potential bestimmen

$$V(x) = V(x_0) - \int_{x_0}^x F(x) dx = V(x_0) + \frac{1}{2}D(x^2 - x_0^2).$$

Wählen wir speziell die Nebenbedingung  $V(x_0 = 0) = 0$ , so ergibt sich

$$V(x) = \frac{1}{2}Dx^2$$

und damit für die Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2.$$

Das Potential ist in Abb. 4.7a dargestellt. Da die kinetische Energie  $T = \frac{m}{2}v^2 \geq 0$  ist, folgt  $V(x) \leq E$ , was die maximal mögliche potentielle Energie festlegt. Diese ergibt sich bei maximaler Auslenkung  $\pm x_{\max}$  und  $v = 0$ . Die Punkte maximaler Auslenkung sind gleichzeitig die Umkehrpunkte der Bewegung, an denen die Geschwindigkeit  $v$  ihr Vorzeichen wechselt, also 0 wird. Aus  $V(x_{\max}) = E$  folgt unmittelbar  $x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{D}}$ .

Es ist offensichtlich, daß die genaue Form für die qualitativen Aussagen wie die Existenz von Umkehrpunkten gar nicht notwendig ist. In einem allgemeinen Potential wie in Abb. 4.7b können wir ebenfalls mit Hilfe des Energiesatzes leicht die Umkehrpunkte bestimmen und verschiedene Formen der Bewegung klassifizieren, siehe unten.

Eine wichtige Art von Kräften muß noch erwähnt werden.

**Definition 4.17 (Zentralkraft).** Eine (radiale) Zentralkraft hängt nur vom Abstand  $r$  ab, d.h. nicht von der Richtung  $\vec{r}$ , und zwar gemäß

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}.$$

Diese Zentralkraft ist konservativ, man kann leicht das zugehörige Potential angeben

$$V(\vec{r}) = - \int_{r_0}^r f(\tilde{r}) d\tilde{r}.$$



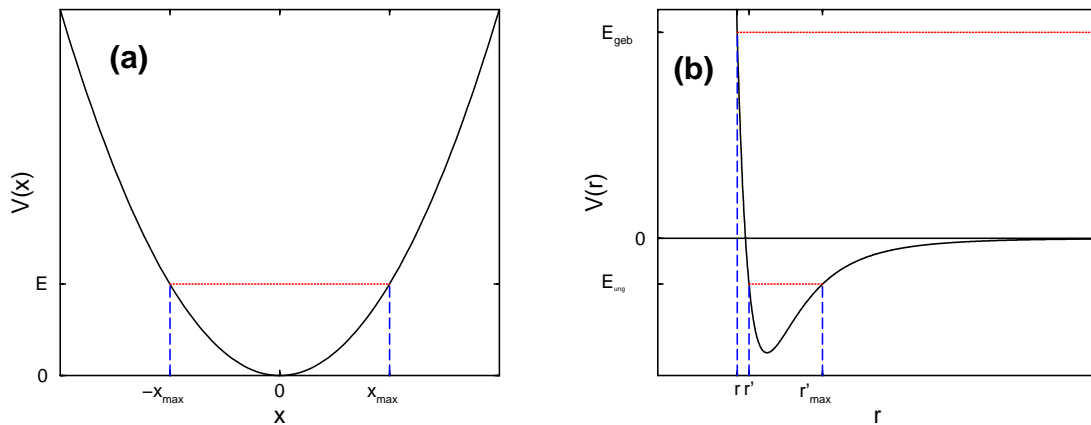


Abbildung 4.7: (a) Potential einer elastischen Feder mit Gesamtenergie  $E$ . Die Umkehrpunkte  $\pm x_{\max}$  ergeben sich schon aus dem Energiesatz. (b) Allgemeineres Potential mit zwei Typen der Bewegung, ungebundener für  $E > V(\infty)$  und gebundener für  $E < V(\infty)$ . Aus dem Energiesatz ergibt sich ein Umkehrpunkt  $r = r_{\min}$  bei ungebundener Bewegung und es ergeben sich zwei Umkehrpunkte  $r' = r_{\min}$  und  $r_{\max}$  bei gebundener Bewegung.

Die Probe ergibt nach der Kettenregel  $\partial_x V = -f(r)\partial_x r$  und die Ableitung des Betrags  $r$  des Ortsvektors beträgt  $\partial_x r = \partial_x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x/r$  und für  $y$  und  $z$  analog, so daß wir uns fürderhin merken (!)  $\vec{\nabla} r = \vec{r}/r = \hat{r}$ . Damit ist obiges Potential als Potential der Zentralkraft  $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$  bestätigt.

#### Beispiel 4.6.

Ein Beispiel für eine Zentralkraft ist die Wechselwirkung zwischen zwei Molekülen oder neutralen Edelgasatomen. Bei großen Abständen ergibt sich auf Grund der van-der-Waals- Wechselwirkung eine Anziehung; bei kleinen Abständen spüren die Teilchen, daß sie nicht ineinander dringen können und stoßen sich ab. Das zugehörige Potential ist schematisch in Abb. 4.7b gezeigt. Es kann meist gut durch ein sogenanntes Lennard-Jones-Potential

$$V(r) = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$

beschrieben werden.

Das in Abb. 4.7b gezeigte Lennard-Jones-Potential zeigt uns ein weiteres wichtiges Phänomen. Es weist eine Mulde auf, die zu sogenannte *gebundener* Bewegung führt. Für eine Gesamtenergie  $E < V(\infty) = 0$  können die zwei Moleküle nicht voneinander loskommen und bleiben aneinander gebunden. Ist die Gesamtenergie jedoch höher  $E > V(\infty) = 0$ , gibt es nur einen Umkehrpunkt und es liegt sogenannte *ungebundene* Bewegung vor. Die beiden Moleküle sind nur kurzzeitig nahe beisammen.

Wir erkennen am obigen Beispiel, wie die Energieerhaltung es uns ermöglicht, in einfacher Form qualitativ verschiedene Bewegungen zu unterscheiden.

Zum Abschluß soll noch diskutiert werden, daß die Energieerhaltung bei der Integration der Bewegungsgleichungen hilft. Da in der kinetischen Energie nur noch die Geschwindigkeiten und nicht mehr die Beschleunigung auftaucht, stellt die Gesamtenergie eine erste Integration der Newtongleichungen dar. So wurde die Gesamtenergie hergeleitet. Besonders weit kommt man mit dieser Idee in einer Dimension, wo man die Bewegungsgleichungen formal (!) vollständig lösen kann. Aus dem Energieerhaltungssatz

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

folgt durch Auflösen nach  $v = \dot{x}$ :

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}.$$

Das unbestimmte Vorzeichen rührt daher, daß die kinetische Energie nur den Betrag der Geschwindigkeit festlegt. Da das Vorzeichen aber auf Grund der Differenzierbarkeit, anschaulich Glattheit, der Bahnkurven  $x(t)$  nicht hin und herspringt, stellt diese Unbestimmtheit in einer Dimension kein Problem dar. Man muß sich die Bahnkurve abschnittsweise verschaffen, siehe unten.

In höheren Dimensionen  $d \geq 2$  klappt das natürlich nicht mehr, da dann die gesamte Richtungsabhängigkeit fehlt. Daher sind wir hier auf eine Dimension beschränkt.

Trennung der Variablen liefert

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))/m}}.$$

und die formale Integration dann

$$t - t_0 = (\pm) \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))/m}},$$

was uns explizit den Zusammenhang zwischen Ort und Zeit zwischen zwei Umkehrpunkten, d.h. für ein Vorzeichen Plus *oder* Minus, gibt. Für die Bahnkurve  $x(t)$  muß die obige Gleichung nur noch invertiert werden und verschiedene Stücke für die Intervalle, die jeweils die Bewegung zwischen zwei Umkehrpunkten beschreiben, zusammengesetzt werden.

Damit haben wir die allgemeine Lösung des eindimensionalen Newtonproblems konservativer Kräfte in der klassischen Mechanik gelöst.

## 5 Systeme vieler Teilchen: Schwerpunkt und Impuls

Bisher haben wir ein einzelnes Teilchen unter dem Einfluß äußerer Kräfte  $\vec{F}^{\text{ext}}$  studiert. Das Teilchen hat einen Impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$  und die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

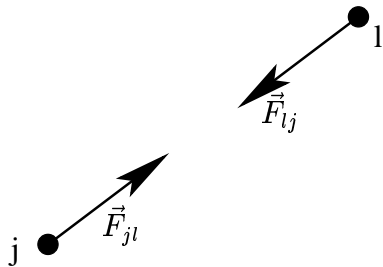
$$\vec{F}^{\text{ext}} = \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}.$$

Ohne äußere Kräfte gilt offensichtlich  $\vec{r} = \text{const.}$

Nun wollen wir viele, nämlich  $n$ , Teilchen studieren, die miteinander wechselwirken *und* äußeren Kräften unterworfen sind.

## 5.1 Schwerpunkt und Gesamtimpuls

Gegeben seien  $n$  Teilchen mit Massen  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ; den Koordinaten  $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_n(t)$  und den Impulsen  $\vec{p}_j = m_j \vec{v}_j$  für  $j = 1, \dots, n$ .



Die Teilchen üben innere Kräfte aufeinander aus, wobei die Kraft  $\vec{F}_{jl}$  von Teilchen  $l$  auf Teilchen  $j$  wirkt und entsprechend  $\vec{F}_{lj}$  von Teilchen  $j$  auf Teilchen  $l$ . Nach dem dritten Newtonschen Gesetz (“actio=reactio”) gilt  $\vec{F}_{jl} = -\vec{F}_{lj}$ .

Die äußeren Kräfte notieren wir mit  $\vec{F}_j^{\text{ext}}$ . Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{p}}_j = \vec{F}_j^{\text{ges}} = \vec{F}_j^{\text{ext}} + \sum_{l=1; l \neq j}^n \vec{F}_{jl} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Die Summation in dieser Gleichung über die inneren Kräfte ist ein bißchen schwerfällig, da wir explizit die Selbstwechselwirkung, die für  $l = j$  auftreten würde, von der Summation ausnehmen müssen. Um die Notation zu erleichtern, wollen wir verabreden, daß

$$\vec{F}_{jj} := \vec{0}$$

definiert sei. Beachte, daß immer noch gilt  $\vec{F}_{jl} = -\vec{F}_{lj}$  für alle möglich  $j$  und  $l$ . Mit dieser Verabredung (Konvention) können wir auch  $\dot{\vec{p}}_j = \vec{F}_j^{\text{ges}} = \vec{F}_j^{\text{ext}} + \sum_{l=1}^n \vec{F}_{jl}$  schreiben. Sehr praktisch sind die folgenden Festlegungen.

**Definition 5.1 (Schwerpunkt und Gesamtimpuls).** Die Gesamtmasse  $M$  ist definiert nach

$$M := \sum_{j=1}^n m_j.$$

Der Gesamtimpuls ist definiert nach

$$\vec{P} := \sum_{j=1}^n \vec{p}_j.$$

Nun ist es sinnvoll, eine Schwerpunktskoordinate  $\vec{R}$  einzuführen, so daß gilt

$$M \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{P}}.$$

Das gelingt durch den Schwerpunkt

$$M \vec{R} := \sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R} := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j.$$

Die Schwerpunktschwindigkeit  $\vec{V}$  ergibt sich aus  $M^{-1} \dot{\vec{P}}$ .

## 5.2 Impulssatz

Wir untersuchen, wie sich der Gesamtimpuls ändert. Nach der Definition ergibt sich durch Ableitung nach der Zeit

$$\dot{\vec{P}} = \sum_j \dot{\vec{p}}_j = \sum_j \vec{F}_j^{\text{ges}} = \sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \vec{F}_{jl}}_{\vartheta} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{\text{ext}}, \quad (5.1)$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß die Summe  $\vartheta$  verschwindet  $\vartheta = 0$ . Physikalisch-anschaulich ist das klar, da in der Summation zu jeder actio auch die reactio enthalten ist, die sich gegenseitig wegheben. Formal kann man das dadurch zeigen, daß man in der Doppelsumme von  $\vartheta$  die Indizes umdreht ( $\vec{F}_{jl} = -\vec{F}_{lj}$ ), so daß ein Minuszeichen auftaucht. Da die Namen der Indizes völlig unerheblich sind, benennt man dann einfach um  $l \leftrightarrow j$ , so daß die Summation bis auf das Minuszeichen wie vorher aussieht. Somit ergibt sich  $\vartheta = -\vartheta$ , woraus zwingend  $\vartheta = 0$  folgt.

Was bedeutet Gleichung (5.1) physikalisch?

Der Schwerpunkt  $\vec{R}$  eines Systemes bewegt sich wie die in ihm vereinigte Gesamtmasse  $M$  unter dem Einfluß der Summe aller äußeren Kräfte  $\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}}$ . Kurz gesagt gilt

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{\text{ext}}.$$

Es gilt der

### Satz 5.1 (Impulserhaltungssatz).

Verschwindet die Summe der äußeren Kräfte  $\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}} = 0$ , so ist der Gesamtimpuls  $\vec{P} = \sum_j \vec{p}_j$  erhalten:

$$\dot{\vec{P}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}(t) = \vec{P}_0.$$

Neben der Energieerhaltung haben wir nun die Impulserhaltung kennengelernt. Wie dort gilt hier, daß der Erhaltungssatz vieles vereinfacht. Tatsächlich hilft uns die Erhaltung des Gesamtimpulses, Probleme mit genau zwei Teilchen,  $n = 2$ , so zu vereinfachen, daß wir nur noch ein Problem mit einem Teilchen,  $n = 1$ , lösen müssen.

## 5.3 Zweikörperproblem

Es ist  $n = 2$ , so daß  $M = m_1 + m_2$  usw. gilt. Ohne äußere Kraft ist der Gesamtimpuls  $\vec{P} = \vec{P}_0$  konstant. Somit ist die Bewegung des Schwerpunkts gelöst

$$\vec{P}_0 = M\vec{V}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0.$$

Der Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig.

Da wir es nur mit zwei Körpern, Massenpunkten, zu tun haben, genügt neben der Schwerpunktskoordinate  $\vec{R}$  eine weitere Koordinate, um das System vollständig zu beschreiben. Praktisch ist die sogenannte *Relativkoordinate*

$$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Kennt man die Bewegung der Schwerpunkts- und der Relativkoordinate, kennt man auch die Bewegung der einzelnen Massenpunkte. Zum Beispiel gilt

$$M\vec{r}_2 = (m_1 + m_2)\vec{r}_2 = m_2\vec{r}_2 + m_1\vec{r}_1 + m_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = M\vec{R} + m_1\vec{r},$$

so daß sich der Koordinate des zweiten Massenpunkt wie  $\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M}\vec{r}$  aus der Schwerpunkts- und der Relativkoordinate ergibt.

Die Bewegungsgleichung der Relativkoordinate bei Abwesenheit äußerer Kräfte berechnen wir aus  $\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}/m_1$  und  $\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}/m_2$ . Subtraktion liefert

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} - \underbrace{\frac{\vec{F}_{12}}{m_2}}_{-\vec{F}_{21}/m_2} = \vec{F}_{21} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right).$$

Das legt die Definition einer neuen Masse  $\mu$  nahe.

**Definition 5.2 (Reduzierte Masse).** Beim Zweikörperproblem definiert

$$\frac{1}{\mu} := \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M}$$

die reduzierte Masse.

Mit der reduzierten Masse genügt die Relativkoordinate der Newtonschen Bewegungsgleichung eines Massenpunkts in einem äußeren Kraftfeld  $\vec{F}_{21}$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}.$$

Damit haben wir das Zweikörperproblem erheblich vereinfacht, was wir uns später noch zunutze machen wollen.

Die Vereinfachung gilt auch für die kinetische Energie

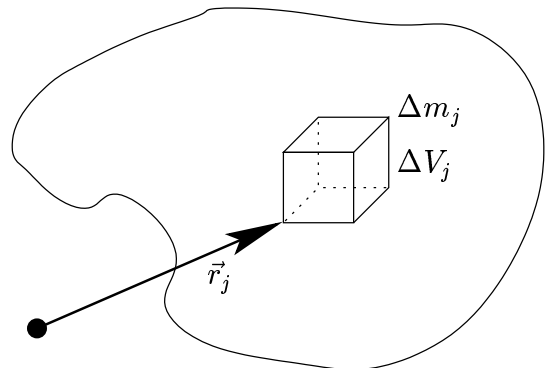
$$T = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2,$$

wobei  $\vec{v} := \dot{\vec{r}}$  ist. Diese Additivität der kinetischen Energie der Schwerpunkts- und der Relativkoordinate folgt aus  $(M\vec{V})^2 = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)^2$  und

$$\begin{aligned} 2MT &= Mm_1\vec{v}_1^2 + Mm_2\vec{v}_2^2 \stackrel{\text{zu zeigen}}{=} (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)^2 + m_1m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \\ &= (m_1^2 + m_1m_2)\vec{v}_1^2 + (m_2^2 + m_1m_2)\vec{v}_2^2 + \underbrace{(2m_1m_2 - 2m_1m_2)}_0 \vec{v}_1\vec{v}_2. \end{aligned}$$

Nun wollen wir noch von Ansammlungen diskreter Massenpunkte zu kontinuierlichen Körpern übergehen.

Möchte man ausgedehnte Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung beschreiben, so stellt man sich diesen am besten aus vielen kleinen Volumenelementen  $\Delta V_j$  zusammengesetzt vor. Jedes dieser Elemente hat eine gewisse Masse  $\Delta m_j$ . Letztlich beschreiben wir das Kontinuum durch den Grenzübergang zu infinitesimalen Elementen.



Die Gesamtmasse ergibt sich zu

$$M = \sum_j \Delta m_j \quad \rightarrow \quad \int_V dm = \int_V \frac{dm}{dV} dV = \int_V \rho(\vec{r}) dV ,$$

wobei wir die kontinuierliche Massendichte

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

eingeführt haben. Mit diesen Begriffen ergibt sich der Schwerpunkt aus

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_j \vec{r}_j \Delta m_j \quad \rightarrow \quad \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV .$$

Mathematisch haben wir bei den obigen Gleichungen stillschweigend die Existenz von Integralen über Volumina (und analog über Flächen) vorausgesetzt. Mit diesen mehrdimensionalen Integralen befassen wir uns nun.

## 5.4 Mehrdimensionale Integration

### Definition 5.3 (Mehrdimensionale Integrale).

*Mehrdimensionale Integrale* sind durch den Grenzübergang zu infinitesimalen Volumenelementen (oder analog zu Flächenelementen) definiert

$$\int_{\text{Volumen}} f(\vec{r}) dV = \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \sum_j f(\vec{r}_j) \Delta V_j .$$

Wie rechnet man praktisch solche Integrale aus?

Das Volumenelement  $dV = dx dy dz$  in kartesischen Koordinaten legt nahe, daß man sukzessive eindimensionale Integrationen auszuführen hat

$$\iiint_{\text{Volumen}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_0}^{z_1} \left[ \int_{y_0(z)}^{y_1(z)} \left\{ \int_{x_0(y,z)}^{x_1(y,z)} f(x, y, z) dx \right\} dy \right] dz .$$

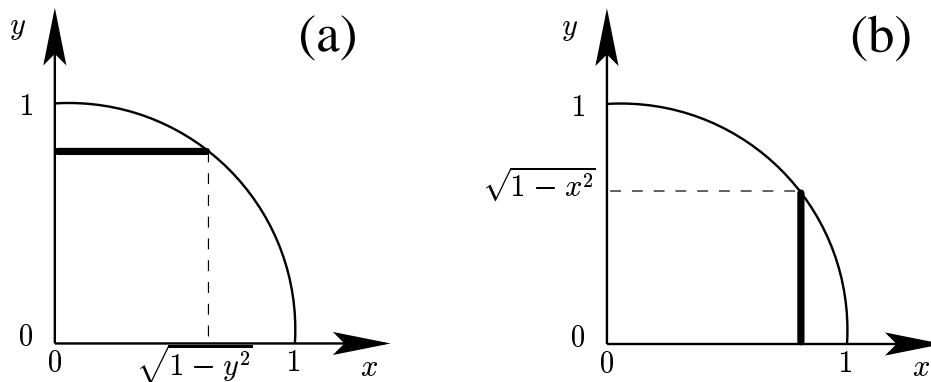


Abbildung 5.1: Veranschaulichung der Integration über einen Viertelkreis für verschiedene Integrationsreihenfolgen. (a) Bei einem allgemeinen festen  $y$  wird zuerst die  $x$ -Integration durchgeführt. Sie gibt an, welchen Beitrag der markierte Streifen der Dicke  $dy$  hat. Man liest ab, daß die  $x$ -Integration von 0 bis  $\sqrt{1-y^2}$  läuft. (b) Bei einem allgemeinen festen  $x$  wird zuerst die  $y$ -Integration durchgeführt. Sie gibt an, welchen Beitrag der markierte Streifen der Dicke  $dx$  hat. Man liest ab, daß die  $y$ -Integration von 0 bis  $\sqrt{1-x^2}$  läuft.

Wichtig ist hierbei die Variablenabhängigkeit der Integrationsgrenzen. Die Reihenfolge der Integrationen ist unwichtig für genügend glatte Funktionen. Allerdings muß man beachten, wie die Integrationsgrenzen zu wählen sind. Sie hängen von der Form des Integrationsgebiets ab. Am besten studieren wir das an Beispielen.

### Beispiel 5.1 (Viertelkreis in zwei Dimensionen).

Als Beispiel wollen wir das Integral der Funktion  $f(x, y) = x$  über einen Viertelkreis integrieren. Dabei wollen wir verschiedene Integrationsreihenfolgen betrachten.

a) Erst  $x$ -, dann  $y$ -Integration, siehe Abb. 5.1a

$$\begin{aligned} \int_{\text{Viertelkreis}} x \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \right] dy = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} \right] dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (1-y^2) \, dy = \frac{1}{2} \left( y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Die innere  $x$ -Integration wird bei festem, aber allgemeinem,  $y$  durchgeführt. Da die Punkte auf dem Viertelkreis mit Radius 1 den Pythagoras  $x^2 + y^2 = 1$  erfüllen, läuft die  $x$ -Integration von 0 bis  $\sqrt{1-y^2}$ .

a) Erst  $y$ -, dann  $x$ -Integration, siehe Abb. 5.1b

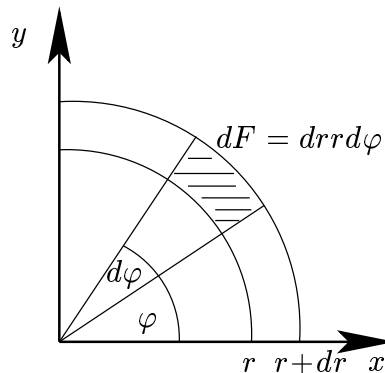


Abbildung 5.2: Flächenelement in ebenen Polarkoordinaten. Wird die Winkeländerung  $d\varphi$  und die Radiusänderung  $dr$  infinitesimal, so ergibt sich die Fläche des schraffierten Rechtecks zu  $dF = dr r d\varphi$ .

$$\begin{aligned} \int_{\text{Viertelkreis}} x \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[ x \cdot y \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\ &= \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Die innere  $y$ -Integration wird bei festem, aber allgemeinem,  $x$  durchgeführt. Da die Punkte auf dem Viertelkreis mit Radius 1 den Pythagoras  $x^2 + y^2 = 1$  erfüllen, läuft die  $y$ -Integration von 0 bis  $\sqrt{1-x^2}$ .

Wenn die letzte Integration nicht unmittelbar einleuchtet, führe sie mittels Substitutionsregel durch, wobei  $u = x^2$  und  $du = 2x \, dx$  zu wählen ist.

Durch sukzessive Integration können auf komplizierten Flächen und Volumina Integrationen durchgeführt werden. Häufig führt aber auch der Wechsel des Koordinatensystems auf einfacherem Wege zum Ziel. So ist eine Viertelkreis gut in Polarkoordinaten darstellbar. Voraussetzung ist allerdings, daß wir die jeweiligen Flächen- bzw. Volumenelemente kennen.

In kartesischen Koordinaten findet eine Zerlegung eines zweidimensionalen Integrationsgebiets in infinitesimale Rechtecke der Fläche  $dx \, dy$  statt. In Polarkoordinaten liest man aus Abb. 5.2 ab, daß eine infinitesimale Fläche durch  $dF = dr r d\varphi$  gegeben ist.

**Beispiel 5.2.** Unsere Beispielintegration vereinfacht sich damit. Zusätzlich mit  $x = r \cos(\varphi)$  ergibt sich

$$\int_{\text{Viertelkreis}} r \cos \varphi \, r \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \varphi \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} dr = \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



Das Ergebnis stimmt natürlich mit dem in kartesischen Koordinaten überein. Der große Vorteil bei der obigen Integration ist, daß sich das Integrationsgebiet in Polarkoordinaten sehr einfach beschreiben läßt. In Radius und Winkel beschrieben, ist der Viertelkreis ein einfaches Rechteck und die Integrationsgrenzen sind somit variablenunabhängig. Eine Besonderheit ist, daß auch der Integrand faktorisiert, d.h. in ein Produkt einer Funktion von  $r$  und einer von  $\varphi$  zerfällt. Dadurch kann die gesamte zweidimensionale Integration auf das Produkt zweier eindimensionaler Integrale zurückgeführt werden

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \varphi \, d\varphi \, dr = \left[ \int_0^1 r^2 \, dr \right] \left[ \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \right].$$

Um ganz allgemein in höheren Dimensionen einen Koordinatenwechsel durchführen zu können, geben wir die wichtige mehrdimensionale Substitutionsregel an. Sie stellt die Verallgemeinerung der einfachen Substitutionsregel in Abschnitt 3.1.1 dar.

**Satz 5.2 (Substitution für mehrere Variablen).** Gegeben sei eine allgemeine Koordinatentransformation  $(x, y, z) \leftrightarrow (u, v, w)$  mit den Abhängigkeiten

$$\begin{array}{ll} x(u, v, w) & \text{beziehungsweise} \quad u(x, y, z) \\ y(u, v, w) & \quad \quad \quad \quad \quad v(x, y, z) \\ z(u, v, w) & \quad \quad \quad \quad \quad w(x, y, z). \end{array}$$

Dann gilt für ein Volumenintegral

$$\int_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\tilde{V}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \det \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right) \right| \, du \, dv \, dw.$$

Dabei erscheint die sogenannte Jacobimatrix

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

und deren Determinante  $\det \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right)$ , die auch Funktionaldeterminante oder Jacobdeterminante genannt wird. Eine Determinante gibt allgemein an, wie sich ein Volumenelement unter einer linearen Abbildung ändert. Die Jacobimatrix gibt gerade die lineare Abbildung an, die die Substitution für infinitesimale Änderungen beschreibt.

Da das Volumen in den Variablen  $u, v, w$  anders beschrieben wird als in  $x, y, z$ , notieren wir  $\tilde{V}$  statt  $V$ <sup>11</sup>.

<sup>11</sup>Zum Beispiel war der komplizierte kartesische Viertelkreis in Polarkoordinaten ein einfaches Rechteck mit  $r \in [0, 1]$  und  $\varphi \in [0, \pi/2]$ .

Die Substitutionsregel lehrt uns, daß das transformierte Volumenelement durch

$$dV = dx dy dz = \left| \det \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right) \right| du dv dw$$

gegeben ist.

Um den obigen Satz praktisch anwendbar zu machen, geben wir die folgende Rechenvorschrift für die Determinanten in einer, zwei und drei Dimensionen an.

### Rechenvorschrift

$$\det(a_{11}) := a_{11}, \quad (5.2a)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (5.2b)$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ &:= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \end{aligned} \quad (5.2c)$$

Es werden in  $d$  Dimensionen Produkte von je  $d$  Matrixelementen gebildet, wobei jeder Index in jedem Produkt bei genau zwei Faktoren vorkommt. Eine genauere allgemeine Definition folgt später.

Beachte, daß in zwei Dimensionen das Produkt entlang der Diagonalen (oben links nach rechts unten) positiv, das entlang der Gegendiagonalen (unten links nach rechts oben) negativ genommen wird. In drei Dimensionen hilft es, die ersten zwei Spalten zusätzlich zu notieren, da man dann genauso verfahren kann: drei positive Diagonalprodukte und drei negative Gegendiagonalprodukte ergeben die komplette Determinante.

Wir wollen uns am Beispiel der ebenen Polarkoordinaten davon überzeugen, daß das transformierte Flächenelement tatsächlich genau die Form hat, die wir vorher schon anschaulich aus Abb. 5.2 abgeleitet haben.

### Beispiel 5.3 (Ebene Polarkoordinaten).

Mit  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  folgt für die Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \end{aligned}$$

und damit

$$dF = \det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) dr d\varphi = r dr d\varphi,$$

was die Gültigkeit der Substitutionsregel in diesem Fall bestätigt.

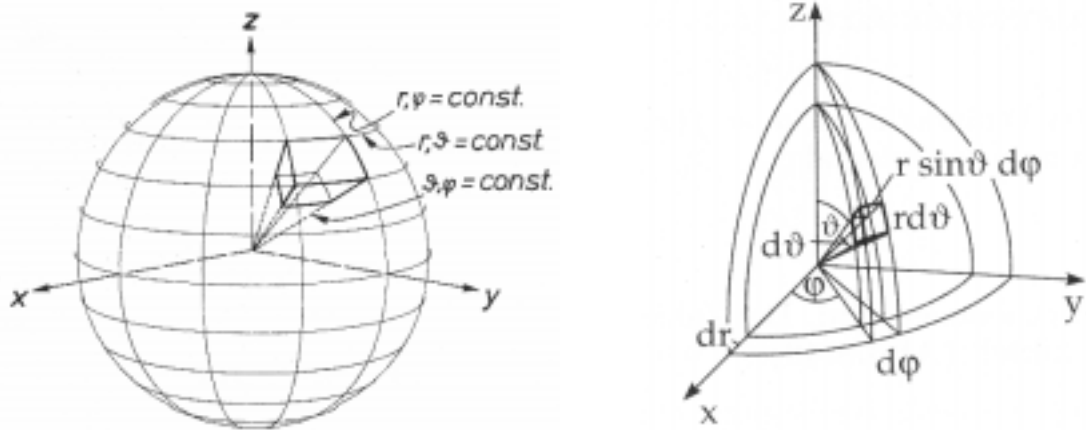


Abbildung 5.3: Infinitesimales Volumenelement in Kugelkoordinaten.

In einfachen Fällen mag die anschauliche Herleitung klarer erscheinen. Für komplizierte Koordinaten wird man jedoch nicht auf die Anschauung vertrauen können. Hier ist die Substitutionsregel die zuverlässigere Vorschrift.

Speziell für die bereits bekannten Koordinatensysteme ergibt sich

Kartesisch:	$dV = dx dy dz$	$\Rightarrow \int f(x, y, z) dx dy dz$
Ebene Polarkoordinaten:	$dF = r dr d\varphi$	$\Rightarrow \int f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$
Zylinderkoordinaten:	$dV = r dr d\varphi dz$	$\Rightarrow \int f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$
Kugelkoordinaten:	$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta$	$\Rightarrow \int \tilde{f}(r, \varphi, \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta,$

wobei  $\tilde{f}(r, \varphi, \vartheta) = f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$  gilt.

Die Form des infinitesimalen Volumenelements in Zylinderkoordinaten kann man sich leicht vorstellen, indem man das Flächenelement ebener Polarkoordinaten in die dritte Dimension um eine Strecke  $dz$  fortsetzt und so einen kleinen Quader erhält. Das infinitesimale Volumenelement in Kugelkoordinaten ist schwerer vorzustellen. Es ist in Abb. 5.3 dargestellt.

## 6 Rotationsbewegung

Wie wir sehen werden, sind Koordinatentransformationen, z.B. Drehungen, Spezialfälle sogenannter linearer Abbildungen. Daher interessieren wir uns für lineare Abbildungen. Sie werden als Matrizen dargestellt.

## 6.1 Lineare Abbildungen und Matrizen

### 6.1.1 Lineare Abbildungen

Wann ist eine Abbildung linear?

**Definition 6.1 (Linearität).** Eine Abbildung  $A$  von einem Vektorraum  $V_1$  in einen Vektorraum  $V_2$  heißt *linear*, wenn für alle Vektoren  $\vec{v}, \vec{u} \in V_1$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt

$$A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{u}) = \lambda A(\vec{v}) + \mu A(\vec{u}).$$

Wir betrachten hier nur endlich dimensionale Vektorräume, z.B.  $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^3$ . Dann können wir alle auftretenden Vektoren mit Hilfe von Basen als  $n$ -Tupel notieren. Konkret sei  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  eine Basis von  $V_1$  und  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_m\}$  eine Basis von  $V_2$ . Im Speziellfall könnten die Vektorräume und auch die Basen gleich sein. Wir wollen erst aber allgemein fortfahren. Die Abbildung  $A$  kann dann als Matrix  $\underline{A}$  dargestellt werden

$$\underline{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Der Vektor  $\vec{a}_j$  ist das sogenannte Bild des Einheitsvektors  $\vec{e}_j$ , d.h.  $\vec{a}_j = A(\vec{e}_j)$ . Seine Komponenten bezüglich der Basis  $\{\vec{e}'_i\}$  von  $V_2$  ergeben gerade die Matrixelemente  $a_{ij}$

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{e}'_1 + a_{2j}\vec{e}'_2 + \dots + a_{mj}\vec{e}'_m.$$

Offenbar ist die Matrix  $\underline{A}$  vollständig festgelegt durch die lineare Abbildung  $A$  und die beiden Basen  $\{\vec{e}_j\}$  von  $V_1$  und  $\{\vec{e}'_i\}$  von  $V_2$ .

Wesentlich ist nun, daß bei fester Wahl der Basen auch umgekehrt  $\underline{A}$  vollständig die lineare Abbildung  $A$  festlegt. Ist  $\vec{b}$  ein beliebiger Vektor aus  $V_1$ , dann kann er dargestellt werden als  $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + \dots + b_n\vec{e}_n$ . Mit Hilfe der Linearität von  $A$  erhält man

$$A(\vec{b}) = b_1 \underbrace{A(\vec{e}_1)}_{\vec{a}_1} + \dots + b_n \underbrace{A(\vec{e}_n)}_{\vec{a}_n} = \sum_{j=1}^n b_j \vec{a}_j.$$

Einsetzen der Entwicklung der  $\vec{a}_j$  liefert

$$A(\vec{b}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_j a_{ij} \vec{e}'_i = \sum_{i=1}^n \vec{e}'_i \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j. \quad (6.1)$$

Wir erkennen, daß wir tatsächlich nur die Information aus der Matrix  $\underline{A}$ , nämlich die Matrixelemente  $a_{ij}$  benötigen. Da die lineare Abbildung die Matrix und die Matrix die lineare Abbildung festlegt, kann man getrost explizit mit Matrizen arbeiten, ohne über die linearen Abbildungen nachzudenken. Allerdings sind gewisse Sachverhalte für Abbildungen nahezu trivial, während sie für Matrizen nicht direkt eingesehen werden können. Beispiele folgen weiter unten. Hier erst einmal die Rechenregeln für Matrizen.

### 6.1.2 Rechnen mit Matrizen

Seien

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\tilde{A}}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ -Matrizen und

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

eine  $n \times p$ -Matrix. Dann erfolgt die Addition zweier Matrizen elementweise, was erfordert, daß sie beide von der selben Form sind

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{\tilde{A}}} = \begin{pmatrix} a_{11} + \tilde{a}_{11} & \cdots & a_{1n} + \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + \tilde{a}_{m1} & \cdots & a_{mn} + \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{\tilde{A}}})_{jl} = a_{jl} + \tilde{a}_{jl} .$$

Die Schreibweise  $(\underline{\underline{C}})_{jl}$  bezeichne dabei allgemein das  $jl$ -Matrixelement der Matrix  $\underline{\underline{C}}$ .

Die Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist durch

$$\lambda \underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda \underline{\underline{A}})_{jl} = \lambda a_{jl}$$

gegeben.

Die Multiplikation zweier Matrizen  $\underline{\underline{A}}$  und  $\underline{\underline{B}}$  ergibt die Matrix  $\underline{\underline{C}}$ , die zur Verknüpfung  $C = A \circ B$  der Abbildungen  $A$  und  $B$  gehört. Verknüpfung heißt hier einfach Hintereinander-ausführen. Konkret gilt  $B : V_1 \rightarrow V_2$  und  $A : V_2 \rightarrow V_3$ . Die Abbildung  $C$  gehe direkt vom ersten in den dritten Vektorraum  $C : V_1 \rightarrow V_3$ . Dann bedeutet die Verknüpfung

$$C = A \circ B \quad \Leftrightarrow \quad C(\vec{v}) = A(B(\vec{v})) \quad \forall \vec{v} \in V_1 .$$

Da die lineare Abbildung  $C$  die zugehörige Matrix festlegt und die Matrizen  $\underline{\underline{A}}$  und  $\underline{\underline{B}}$  die Abbildungen  $A$  und  $B$ , ist klar, daß man die Matrix  $\underline{\underline{C}}$  aus  $\underline{\underline{A}}$  und  $\underline{\underline{B}}$  berechnen kann. Explizites Nachrechnen ergibt

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj} . \quad (6.2)$$

Beachten Sie, daß der summierte Index in den Matrixelementen benachbart steht. Das ist eine hilfreiche Merkregel. Anschaulich bedeutet die obige Formel, daß man jeweils die  $i$ -te Zeile von  $\underline{\underline{A}}$  mit der  $j$ -Spalte von  $\underline{\underline{B}}$  skalarmultipliziert, um das Element  $c_{ij}$  zu erhalten. Klarerweise muß die Spaltenanzahl von  $\underline{\underline{A}}$  der Zeilenanzahl von  $\underline{\underline{B}}$  entsprechen. Ist  $\underline{\underline{A}}$  eine  $m \times n$ -Matrix und  $\underline{\underline{B}}$  eine  $n \times p$ -Matrix, ergibt sich  $\underline{\underline{C}}$  als  $m \times p$ -Matrix. Die Gleichheit der Spaltenanzahl von  $\underline{\underline{A}}$  der Zeilenanzahl von  $\underline{\underline{B}}$  drückt aus, daß man die Verknüpfung  $A \circ B$  nur dann bilden kann, wenn  $B$  in den Definitionsbereich von  $A$  abbildet.

**Beispiel 6.1.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Nun hat das obenstehende Beispiel viele Nullen. Daher noch ein anderes

**Beispiel 6.2.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+(-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Beachte, daß hier die Struktur des Ergebnisses einfacher ist, als die Faktoren.

Bisweilen wird bei der Notation der Matrixmultiplikation in den Elementen die Einsteinsche Summenkonvention verwendet. Damit ist gemeint, daß die Summenzeichen nicht explizit notiert werden. Es gilt die Vereinbarung, daß über mehrfach auftauchende gleiche Indizes summiert wird. Damit wird die Gleichung (6.2) zu  $c_{ij} = a_{il}b_{lj}$ . Voraussetzung für die Einsteinsche Summenkonvention ist, daß aus dem Kontext heraus eindeutig ist, welche Dimensionen die Vektorräume haben.

Nun wollen wir erläutern, daß auch die Anwendung einer Matrix auf einen Vektor als Matrixmultiplikation angesehen werden kann.

**Beispiel 6.3.** Wir betrachten für  $\underline{\underline{B}}$  eine  $n \times 1$ -Matrix, d.h.  $\underline{\underline{B}}$  entspricht einem Vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ .

Die Matrixmultiplikation (6.2) liefert gerade

$$\underline{\underline{A}}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}b_j \end{pmatrix}$$

oder in Einsteinscher Summenkonvention  $(\underline{\underline{A}}\vec{b})_i = a_{ij}b_j$ . Dieses Ergebnis für die Anwendung einer Matrix auf einen Vektor bzw. einer  $n \times 1$  Matrix entspricht genau dem, was wir in Gleichung (6.1) für eine lineare Abbildung ausgerechnet hatten. Dieser Befund gibt uns Vertrauen in die Richtigkeit der hier vorgestellten Regeln zur Matrixmultiplikation geben.

Nun wollen wir einige wesentliche Eigenschaften der Matrixmultiplikation aufzählen.

Da die Matrixmultiplikation für die Verknüpfung von Abbildungen steht, erbt sie von diesen Verknüpfungen die Assoziativität

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}}.$$

Es ist hierfür keine Rechnung nötig.

Hingegen gilt das Kommutativitätsgesetz nicht. Zwar kann man bei quadratischen  $n \times n$  Matrizen  $\underline{\underline{A}}$  und  $\underline{\underline{B}}$  das Produkt in zwei Reihenfolgen bilden; diese sind im Allgemeinen jedoch verschieden

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}.$$

Das Distributivgesetz gilt uneingeschränkt

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{AB}} + \underline{\underline{AC}} \quad \text{und} \quad (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}})\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{BA}} + \underline{\underline{CA}}.$$

Einige grundlegende Begriffe und Manipulationen für Matrizen sind

1. Quadratische Matrix  $\underline{\underline{A}}$ . Die Spaltenanzahl ist gleich der Zeilenanzahl. Solche Matrizen stehen für Abbildungen  $A : V \rightarrow V$  in denselben Vektorraum.
2. Die Einheitsmatrix  $\underline{\underline{E}}$  gehört zur Identität, die ebenfalls eine lineare Abbildung ist. Diese Matrix hat Einsen auf der Hauptdiagonalen; sonst sind alle Matrixelemente null  $(\underline{\underline{E}})_{ij} = \delta_{ij}$  bzw.

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt  $\underline{\underline{EA}} = \underline{\underline{A}}$  und somit auch  $\underline{\underline{E}}\vec{b} = \vec{b}$  und  $\underline{\underline{AE}} = \underline{\underline{A}}$ .

3. Die transponierte Matrix  $\underline{\underline{A}}^T$  einer  $m \times n$  Matrix  $\underline{\underline{A}}$  ist eine  $n \times m$  Matrix mit den Matrixelementen  $(\underline{\underline{A}}^T)_{jl} = (\underline{\underline{A}})_{lj}$ . Anschaulich wird die Matrix  $\underline{\underline{A}}$  an ihrer Hauptdiagonalen gespiegelt. Insbesondere ist  $\vec{b}^T$  ein Zeilenvektor bzw. eine  $1 \times n$  Matrix. Somit kann man ein *Skalarprodukt*  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  auch als Matrixmultiplikation schreiben  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$ . Das sogenannte *dyadische* Produkt  $(\vec{a} \circ \vec{b})_{ij} := a_i b_j$  ist durch das Matrixprodukt  $\vec{a} \vec{b}^T$  gegeben.

Man überzeugt sich leicht von der wichtigen Regel

$$(\underline{\underline{AB}})^T = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T.$$

4. Symmetrische Matrizen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie mit ihrer transponierten identisch sind  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$ , also gilt  $(\underline{\underline{A}})_{lj} = (\underline{\underline{A}})_{jl}$ . Wir werden später noch physikalische Eigenschaften kennenlernen, die sich durch symmetrische Matrizen beschreiben lassen.
5. Antisymmetrische Matrizen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie mit dem Negativen ihrer transponierten identisch sind  $\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}}^T$ , also gilt  $(\underline{\underline{A}})_{lj} = -(\underline{\underline{A}})_{jl}$ . Wir werden sehen, daß das Kreuzprodukt eine verkappte antisymmetrische Matrix darstellt.
6. Diagonalmatrizen sind Matrizen, die nichtverschwindende Einträge nur auf der Hauptdiagonalen haben  $(\underline{\underline{A}})_{lj} = 0 \forall j \neq l$ , d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7. Die Inverse einer Matrix  $\underline{A}$  ist eine Matrix  $\underline{B}$  mit der Eigenschaft  $\underline{AB} = \underline{E} = \underline{BA}$ . Man schreibt auch  $\underline{B} = \underline{A}^{-1}$ . Da wir hier in endlich dimensionalen Vektorräumen arbeiten, reicht übrigens eine der beiden definierenden Gleichheiten, z.B.  $\underline{AB} = \underline{E}$ , um auf  $\underline{B} = \underline{A}^{-1}$  zu schließen. Damit folgt aus der Gültigkeit einer der beiden Gleichungen die Gültigkeit beider.

Eine wichtige Kenngröße einer Matrix ist die sogenannte Determinante.

**Definition 6.2 (Determinante).** Formal ist die Determinante eine total antisymmetrische Multilinearform mit  $\det(\underline{E}) = 1$ . Im Einzelnen bedeuten die Begriffe totale Antisymmetrie

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) = -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n)$$

und Multilinearität für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \lambda \vec{a}_j + \mu \vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n) = \lambda \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) + \mu \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n) .$$

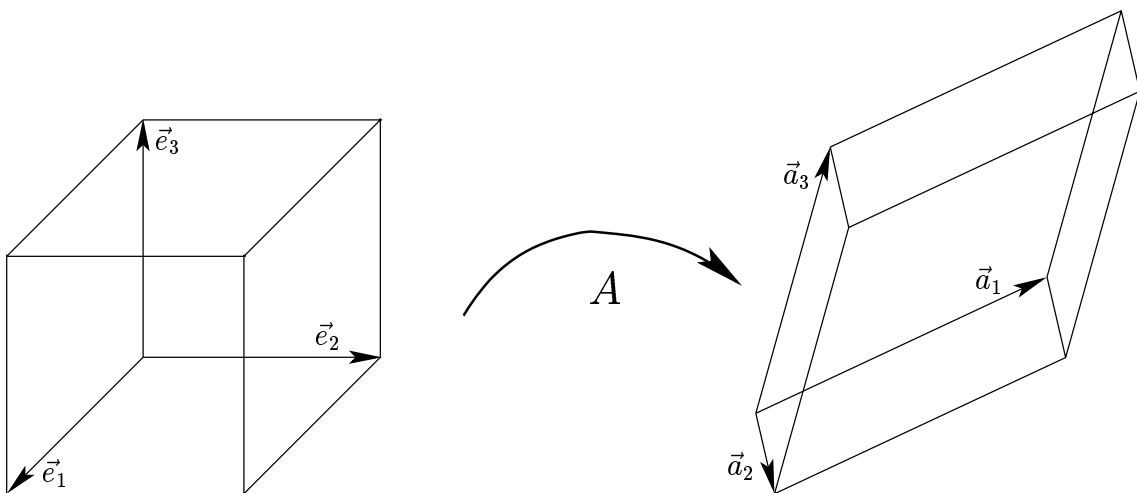


Abbildung 6.1: Links gezeigt ist der Einheitswürfel, der durch die Einheitsvektoren  $\{\vec{e}_j\}$  aufgespannt wird. Er wird durch die Abbildung  $A$  auf das Parallelepiped rechts abgebildet, das von den Bildern  $\{\vec{a}_j\}$  der Einheitsvektoren aufgespannt wird.

Anschaulich gibt die Determinante den Faktor an, um den sich ein Volumen  $W$  unter der Abbildung  $A$  ändert  $W' = A(W) \Leftrightarrow W'/W = \pm \det(\underline{A})$ . Das Vorzeichen bestimmt sich aus der Änderung der Händigkeit, siehe unten. Speziell ist  $\det(\underline{A})$  das Volumen des Parallelepipeds, das von den Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  aufgespannt wird, siehe Abb. 6.1. Negativ wird die Determinante, wenn ein rechtshändiges Koordinatensystem in ein linkshändiges abgebildet wird. Bleibt die Händigkeit des Dreibeins, bzw. des  $n$ -Beins in  $n$  Dimensionen, unter der linearen Abbildung erhalten, ist die Determinante positiv. Die anschauliche Interpretation liefert uns gleich noch die Eigenschaft

$$\det(\underline{AB}) = \det(\underline{A}) \det(\underline{B}) .$$



Praktisch berechnet man die Determinante iterativ. Die Determinante jeder  $n \times m$  Matrix mit  $n \neq m$  verschwindet. Ist  $\underline{\underline{A}}$  eine  $n \times n$  Matrix, so sei  $\underline{\underline{A}}^{(ij)}$  die sogenannte *Untermatrix*, die man durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte von  $\underline{\underline{A}}$  erhält. Es ist dann eine  $(n-1) \times (n-1)$  Matrix. Zum Beispiel gilt

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{(12)} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Für die Determinante gilt dann iterativ

$$\det(\underline{\underline{A}}) = a_{11} \det(\underline{\underline{A}}^{(11)}) - a_{21} \det(\underline{\underline{A}}^{(21)}) + \dots - (-1)^n a_{n1} \det(\underline{\underline{A}}^{(n1)}) .$$

Eine solche Beziehung gilt für jede beliebige Spalte  $j$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\underline{\underline{A}}^{(ij)})$$

und für jede Zeile  $i$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\underline{\underline{A}}^{(ij)}) .$$

Man erkennt, daß man durch mehrfache Anwendung dieser Formeln irgendwann bei trivialen Unterdeterminanten von  $1 \times 1$  Matrizen ankommt  $\det(a_{11}) = a_{11}$ . Häufig kennt man aber schon die zwei- oder dreidimensionalen Determinanten, siehe Gleichung (5.2).

Da es bei der iterativen Berechnung der Determinante nicht darauf ankommt, ob man nach Zeilen oder nach Spalten entwickelt, ist die Determinante einer Matrix gleich der Determinante ihrer Transponierten

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{A}}^T) .$$

### 6.1.3 Drehmatrizen

Eine besondere Rolle für die Physik spielen die Matrizen, die allgemeine Drehungen darstellen. Sie treten zum Beispiel bei der Transformation einer Orthonormalbasis ( $n$ -Bein in  $n$  Dimensionen) auf eine andere Orthonormalbasis auf. Betrachten wir also eine solche Transformation von  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  nach  $\{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$

$$D(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i = \sum_{l=1}^n d_{jl} \vec{e}_l \quad \Leftrightarrow \quad (\underline{\underline{D}})_{jl} = d_{jl} .$$

Nun sind sowohl die  $\{\vec{e}_j\}$  als auch die  $\{\vec{e}'_j\}$  orthonormal, d.h. paarweise orthogonal und auf 1 normiert, kurz  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$  und  $\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij}$ . Welche Auswirkung hat das auf  $\underline{\underline{D}}$ ? Wir rechnen

$$\begin{aligned} \delta_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j &= \left( \sum_{l=1}^n d_{il} \vec{e}_l \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n d_{jk} \vec{e}_k \right) = \sum_{l,k=1}^n d_{il} d_{jk} \underbrace{\vec{e}_l \cdot \vec{e}_k}_{\delta_{lk}} \\ &= \sum_{l=1}^n d_{il} d_{jl} = \sum_{l=1}^n (\underline{\underline{D}})_{il} (\underline{\underline{D}}^T)_{lj} = (\underline{\underline{D}} \underline{\underline{D}}^T)_{ij} , \end{aligned}$$

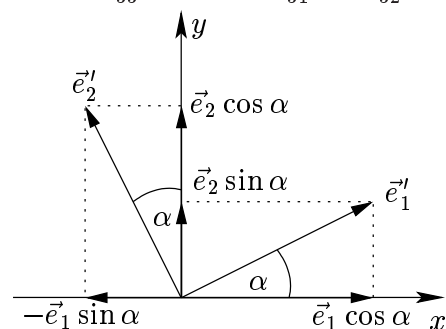
so daß wir zu dem Ergebnis

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{D}}\underline{\underline{D}}^T$$

und damit auch zu  $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}}$ , siehe Diskussion der inversen Matrix oben. Somit wissen wir  $\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^T$ . Das ist ein ganz bemerkenswertes Ergebnis, da es im Allgemeinen sehr schwer ist, Matrizen zu invertieren. Für Drehmatrizen aber reicht eine einfache Transposition aus.

Allgemein heißen die Matrizen, für die  $\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^T$  gilt, orthogonale Matrizen. Sie sind so wichtig, daß sie ein eigenes Mengensymbol bekommen, nämlich  $O(n)$  in  $n$  Dimensionen<sup>12</sup>. Aus  $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{D}}\underline{\underline{D}}^T$  folgt für die Determinanten  $1 = \det(\underline{\underline{E}}) = \det(\underline{\underline{D}})\det(\underline{\underline{D}}^T) = \det(\underline{\underline{D}})^2$ . Daraus folgt im Reellen  $\det(\underline{\underline{D}}) = \pm 1$ . Diejenigen orthogonalen Matrizen, die die Händigkeit, auch Chiralität genannt, des Koordinatensystems erhalten, heißen *spezielle* orthogonale Matrizen  $SO(n) = \{\underline{\underline{D}} \in O(n) \mid \det(\underline{\underline{D}}) = 1\}$ .

**Beispiel 6.4 (Drehung um  $z$ -Achse).** Wir betrachten die Drehung eines Koordinatensystem um die  $z$ -Achse. Somit sind die alte und die neue  $z$ -Achse identisch und wir haben  $\vec{e}'_3 = \vec{e}_3$  und somit  $D_{33} = 1$  und  $D_{31} = D_{32} = 0$ .



$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= -\sin \alpha \vec{e}_1 + \cos \alpha \vec{e}_2 \end{aligned} \Rightarrow \underline{\underline{D}}^z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{D}}^z(\alpha)$  ist eine orthogonale Matrix, da es ein orthonormales Dreibein in ein orthonormales Dreibein überführt. Außerdem gilt

$$\det(\underline{\underline{D}}^z(\alpha)) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1,$$

so daß wir  $\underline{\underline{D}}^z(\alpha) \in SO(3)$  wissen.

Führt man zwei Drehungen um die  $z$ -Achse nacheinander aus, so entspricht dies einer einzigen Drehung um die  $z$ -Achse. Man kann sich von

$$\underline{\underline{D}}^z(\alpha)\underline{\underline{D}}^z(\beta) = \underline{\underline{D}}^z(\alpha + \beta)$$

überzeugen. Es folgt

$$\underline{\underline{D}}^z(\alpha)\underline{\underline{D}}^z(-\alpha) = \underline{\underline{E}} \quad \Leftrightarrow \quad (\underline{\underline{D}}^z)^{-1}(\alpha) = \underline{\underline{D}}^z(-\alpha).$$

Tatsächlich gilt  $(\underline{\underline{D}}^z)^T(\alpha) = \underline{\underline{D}}^z(-\alpha)$ , was  $\underline{\underline{D}}^z(\alpha)$  nochmals als orthogonale Matrix bestätigt.

<sup>12</sup>Tatsächlich handelt es sich bei dieser Menge um eine sogenannte Gruppe mit den vier definierenden Eigenschaften Abgeschlossenheit, Assoziativität, Existenz eines neutralen Elements, Existenz eines inversen Elements für alle Gruppenelemente.

Allgemein lassen orthogonale Matrizen Skalarprodukte invariant. Anschaulich ist das klar, da Drehungen die Winkel zwischen Vektoren unverändert lassen. Formal folgt das einfach aus der folgenden Rechnung für  $\vec{a}' = \underline{\underline{D}}\vec{a}$  und  $\vec{b}' = \underline{\underline{D}}\vec{b}$

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = (\vec{a}')^T \vec{b}' = (\underline{\underline{D}}\vec{a})^T \underline{\underline{D}}\vec{b} = \vec{a}^T \underbrace{\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}}}_{\underline{\underline{E}}}\vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Zum Abschluß muß noch eine Warnung ausgesprochen werden. In der Literatur gibt es sogenannte *aktive* Drehungen, bei denen der Vektor gedreht wird (Abb. 6.2a), und sogenannte *passive* Drehungen, bei denen das Koordinatensystem gedreht wird (Abb. 6.2b). Der Unterschied ist offensichtlich einfach ein Vorzeichen, d.h. daß die aktive Drehung einer passiven mit entgegengesetztem Vorzeichen entspricht. Besonders augenfällig ist das, wenn man sich überlegt, wie Vektor und Koordinatensystem,  $n$ -Bein, zu einander stehen, wenn sowohl aktiv als auch passiv um denselben Winkel gedreht wird. Offensichtlich hat sich dann nichts an der Position des Vektors im Koordinatensystem geändert. Die Drehmatrizen, die wir oben abgeleitet haben, erzeugen aktive Drehungen, da wir betrachtet haben, wie einzelne Vektoren bezüglich der ursprünglichen Basisvektoren gedreht werden.

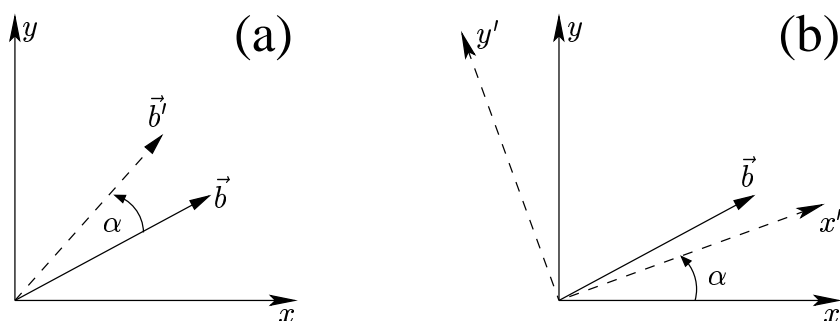


Abbildung 6.2: (a) Aktive Drehung um den Winkel  $\alpha$ ; (b) Passive Drehung um den Winkel  $\alpha$ .

#### 6.1.4 Infinitesimale Drehungen

Aus der aktiven Drehung  $\underline{\underline{D}}^z(\alpha)$  leiten wir für einen infinitesimalen Winkel  $\alpha \rightarrow d\alpha$  ab

$$\underline{\underline{D}}^z(d\alpha) = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Omega}}^z d\alpha + \mathcal{O}(d\alpha^2),$$

wobei die Schreibweise  $\mathcal{O}(d\alpha^2)$  uns daran erinnern soll, daß wir Terme, die im Sinne einer Taylorentwicklung von quadratischer oder höherer Ordnung sind, weglassen. Uns interessiert hier nur die führende Ordnung. Daher gilt  $\cos(d\alpha) = 1$  und  $\sin(d\alpha) = d\alpha$  und

$$\underline{\underline{\Omega}}^z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch zyklische Vertauschung  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$  ergeben sich analog

$$\underline{\underline{\Omega}}^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\Omega}}^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}^x(d\alpha) &= \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Omega}}^x d\alpha + \mathcal{O}(d\alpha^2) \\ \underline{\underline{D}}^y(d\alpha) &= \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Omega}}^y d\alpha + \mathcal{O}(d\alpha^2). \end{aligned}$$

Beachte das scheinbare andere Vorzeichen für die  $y$ -Drehung.

Die allgemeine Drehung um  $d\varphi_1$  um die  $x$ -Achse, um  $d\varphi_2$  um die  $y$ -Achse und um  $d\varphi_3$  um die  $z$ -Achse ergibt sich aus der Auswertung von  $\underline{\underline{D}}(d\vec{\varphi}) = \underline{\underline{D}}^x(d\varphi_1)\underline{\underline{D}}^y(d\varphi_2)\underline{\underline{D}}^z(d\varphi_3)$  in linearer Ordnung in den infinitesimalen Winkeln

$$\underline{\underline{D}}(d\vec{\varphi}) = \underline{\underline{E}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -d\varphi_3 & d\varphi_2 \\ d\varphi_3 & 0 & -d\varphi_1 \\ -d\varphi_2 & d\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}}_{d\underline{\underline{\Omega}}} + \mathcal{O}(d\vec{\varphi}^2) \quad \text{mit} \quad d\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} d\varphi_1 \\ d\varphi_2 \\ d\varphi_3 \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß es auf die Reihenfolge der infinitesimalen Drehungen dabei *nicht* ankommt. Die Unterschiede zwischen verschiedenen Reihenfolgen treten nämlich erst in quadratischer Ordnung in den Winkeln auf. Dies ist der wesentliche Unterschied zu Drehungen um endliche Winkel. Es erklärt auch, warum die Betrachtung infinitesimaler Drehungen gewisse Vorteile besitzt.

Wichtig ist nun die Tatsache, daß das Kreuzprodukt für nichts anderes als eine aktive infinitesimale Drehung steht

$$-d\underline{\underline{\Omega}}\vec{b} = d\vec{\varphi} \times \vec{b} \quad \forall \vec{b}.$$

Um uns davon zu überzeugen, stellen wir fest, daß die Anwendung von  $d\vec{\varphi} \times$  auf einen Vektor eine lineare Abbildung vom  $\mathbb{R}^3$  in den  $\mathbb{R}^3$  ist. Weiterhin müssen wir nur nachrechnen, daß die Bilder der Einheitsvektoren die Spalten von  $d\underline{\underline{\Omega}}$  bilden, also

$$d\vec{\varphi} \times \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ d\varphi_3 \\ -d\varphi_2 \end{pmatrix} \quad d\vec{\varphi} \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -d\varphi_3 \\ 0 \\ d\varphi_1 \end{pmatrix} \quad d\vec{\varphi} \times \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} d\varphi_2 \\ -d\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt nun für einen aktive in der Zeit gedrehten Vektor  $\vec{b}$ , der sich ansonsten nicht ändert

$$\frac{d}{dt}(\underline{\underline{D}}\vec{b}) = \frac{d\underline{\underline{\Omega}}}{dt}\vec{b} = \vec{\omega} \times \vec{b}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$ . Wir erkennen also, daß die so vielbenutzte Winkelgeschwindigkeit eigentlich gar kein Vektor sondern eine Matrix ist ! Das führt tatsächlich dazu, daß sie sich unter orthogonalen Matrizen nicht ganz wie ein "normaler" Vektor transformiert. Daher nennt man es auch manchmal einen *axialen* Vektor. Den Unterschied merkt man bei echten Drehungen  $\underline{\underline{D}}$  mit  $\det(\underline{\underline{D}}) = 1$  nicht. Bei Spiegelungen mit  $\det(\underline{\underline{D}}) = -1$  hingegen ändert ein axialer Vektor sein Vorzeichen relativ zur Transformation eines echten Vektors.

## 6.2 Kraftgleichung in rotierenden Koordinatensystemen

In einem Inertialsystem I gilt

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2}{dt^2} \Big|_I \vec{r}.$$

Der Index I erinnert uns daran, bezüglich welchen Systems die Ableitung gebildet wird. In einem rotierenden Bezugssystem R gilt das jedoch nicht. Für eine reine Kreisbewegung hatten wir das schon in Kapitel 2.2.2 gesehen. Nun wollen wir die allgemeine Vektorschreibweise nachliefern. Nach unseren Überlegungen zu infinitesimalen Drehungen gilt für einen beliebigen Vektor  $\vec{b}$

$$\frac{d}{dt} \Big|_I \vec{b} = \frac{d}{dt} \Big|_R \vec{b} + \vec{\omega} \times \vec{b},$$

wobei  $\vec{\omega}$  die Winkelgeschwindigkeit von R bezüglich I ist. Die obige Formel drückt einfach aus, daß die Änderung von  $\vec{b}$  bezüglich I sich aus dem Anteil bezüglich R und der Bewegung von R zusammensetzt.

Führen wir nun den Ableitungsoperator

$$D := \frac{d}{dt} \Big|_I = \frac{d}{dt} \Big|_R + \vec{\omega} \times$$

ein, so ergibt sich für die Kraftgleichung nach Newton

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m D^2 \vec{r} = m \left( \frac{d}{dt} \Big|_R + \vec{\omega} \times \right)^2 \vec{r} \\ &= m \left( \frac{d^2}{dt^2} \Big|_R \vec{r} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d}{dt} \Big|_R (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_R \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_R \right) \\ &= m \frac{d^2}{dt^2} \Big|_R \vec{r} + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_R \times \vec{r} + 2m \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_R. \end{aligned}$$

Die zusätzlichen Terme bringen wir nun auf die andere Seite der Kraftgleichung und interpretieren wir sie als *Scheinkräfte*, die in der Kraftgleichung hinzugenommen werden müssen, um die Bewegung relativ zum rotierenden System R verstehen zu können

$$m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reale Kraft}} + \underbrace{-m\vec{\omega} \times \vec{r}}_{\text{Linearbeschleunigung}} + \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}}_{\text{Corioliskraft}} + \underbrace{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Zentrifugalkraft}},$$

wobei die Zeitableitung, die als Punkt notiert ist, bezüglich des rotierenden Bezugssystems zu nehmen ist.

## 6.3 Rotationsdynamik

Bisher haben wir Rotationen beschrieben, aber nicht ihre Ursache erklärt. Was man tun, um eine Drehung zu erzeugen?

Anschaulich braucht man eine Kraft und einen Hebel. Denken Sie daran, daß Sie eine schwergängige Schraube mit einem Schraubenschlüssel drehen wollen. Der Effekt ist desto stärker, je stärker die Kraft und je länger der Hebel ist. Dabei sollten beide, Kraft und Hebel, möglichst senkrecht zur Drehachse stehen. Diese Beobachtungen fassen wir zusammen im sogenannten

**Definition 6.3 (Drehmoment).**

$$\vec{N} := \vec{r} \times \vec{F} .$$

Beachte, daß das Drehmoment vom gewählten Ursprung abhängt.

Analog zur Gleichung  $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$  für Kraft und Impuls suchen wir nun einen Drehimpuls  $\vec{L}$ , der zum Drehmoment  $\vec{N}$  gehört, indem er  $\vec{N} = \dot{\vec{L}}$  erfüllt. Diese Suche führt uns zu

**Definition 6.4 (Drehimpuls).**

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} .$$

Beachte, daß auch der Drehimpuls vom gewählten Ursprung abhängt.

Wir bestätigen, daß unsere Anforderung an den Drehimpuls erfüllt ist

$$\dot{\vec{L}} = m(\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{v}}_{\vec{v} \times \vec{v} = 0} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}}) = m\vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} .$$

Wirkt keine Kraft, so ist  $\vec{N} = 0$  und  $\vec{L}$  konstant. Wirkt eine radiale Zentralkraft  $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$ , so gilt

$$\vec{N} = \vec{r} f(r)\hat{r} = \frac{f(r)}{r}(\vec{r} \times \vec{r}) = 0 ,$$

so daß der Drehimpuls  $\vec{L}$  auch in diesem wichtigen Fall konstant ist.

Betrachten wir nun ein System von  $n$  Massenpunkten mit inneren und äußeren Kräften, wobei die inneren Kräfte zwischen den Massenpunkten radiale Zentralkräfte sein sollen

$$\vec{F}_{jl} = f(r_{jl})\hat{r}_{jl} .$$

Dabei verwenden wir die Abkürzung  $\vec{r}_{jl} = \vec{r}_j - \vec{r}_l$  und entsprechend  $r_{jl} = |\vec{r}_j - \vec{r}_l|$ ,  $\hat{r}_{jl} = \vec{r}_{jl}/r_{jl}$ . Der Gesamtimpuls beträgt  $\vec{L}^{\text{ges}} = \sum_{j=1}^n \vec{L}_j = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{p}_j$ . Er ändert sich unter dem Einfluß des Gesamtdrehmoments

$$\dot{\vec{L}}^{\text{ges}} = \sum_{j=1}^n \vec{N}_j = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_j = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{\text{ext}} + \sum_{j,l=1}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_{jl} ,$$

wobei wir wie bei der Behandlung des Translationsimpulses die Konvention benutzen, daß  $\vec{F}_{jl} = 0$  gilt. Die Doppelsumme über die inneren Kräfte werten wir durch Vertauschung ( $\vec{F}_{jl} = -\vec{F}_{lj}$ ) und Umbenennung der Indizes  $j$  und  $l$  aus

$$\begin{aligned} \Theta &= \sum_{j,l=1}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_{jl} = - \sum_{j,l=1}^n \vec{r}_l \times \vec{F}_{jl} \\ \Rightarrow 2\Theta &= \sum_{j,l=1}^n (\vec{r}_j - \vec{r}_l) \times \vec{F}_{jl} = \sum_{j,l=1}^n \underbrace{(\vec{r}_{jl} \times \vec{r}_{jl})}_0 f(r_{jk})/r_{jk} = 0 . \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\dot{\vec{L}}^{\text{ges}} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{\text{ext}} = \sum_{j=1}^n \vec{N}_j^{\text{ext}} =: \vec{N}^{\text{ext}},$$

d.h. der Gesamtdrehimpuls ändert sich nur durch die Summe der äußeren Drehmomente. Die inneren Drehmomente heben sich weg. Insbesondere ist  $\vec{L}$  *konstant*, wenn keine äußeren Kräfte wirken.

Damit haben wir einen weiteren, den letzten allgemeinen, Erhaltungssatz gefunden. Zusammenfassend kennen wir

Energieerhaltung	freie Wahl des Zeitnullpunkts	1
Erhaltung der Schwerpunktsbeweg.	freie Wahl des Ursprungs im Raum	3
Erhaltung des Impulses	freie Wahl der Geschwindig. des Inertialsystems	3
Erhaltung des Drehimpulses	freie Wahl der Ausrichtung des Inertialsystems	3
	Summe	10

Die erste Spalte gibt die erhaltene Größe an; die zweite gibt an, aus welcher Symmetrie bzw. Wahlfreiheit die Erhaltung resultiert, die dritte Anzahl der erhaltenen Komponenten. Insgesamt verfügen wir also über genau 10 sogenannte Integrale der Bewegung. Im Allgemeinen gibt es keine weiteren Erhaltungsgrößen.

Pro Freiheitsgrad benötigen wir zwei Integrale der Bewegung, da wir sowohl den Ort als auch die Geschwindigkeit festlegen müssen. Übersteigt die doppelte Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems deutlich die Anzahl der Integrale der Bewegung wird das Verhalten des Systems im Allgemeinen sehr schwer vorhersagbar. Das liegt *nicht* daran, daß die Bewegungsgleichungen nicht deterministisch sind, sondern daran, daß kleinste Abweichungen, z.B. in den Anfangsbedingungen, das Ergebnis nach einiger Zeit sehr stark beeinflussen. Man spricht in diesem Zusammenhang von *deterministischem Chaos*. Berühmtes und bekanntes Beispiel hierfür ist die Schwierigkeit der Wettervorhersage. Die Vorgänge in der Atmosphäre haben so viele Freiheitsgrade, daß eine langfristige Wettervorhersage niemals möglich sein wird, obwohl die Grundgleichungen vollkommen deterministisch sind.

## 7 Bewegung eines starren Körpers

Für unsere makroskopische Alltagswelt ist es sehr wichtig, die Bewegungen eines Systems aus Massenpunkten zu verstehen. Speziell interessieren wir uns für feste starre Körper wie z.B. Holz-scheite, Kaffeetassen oder Dachziegel.

### Definition 7.1 (Starrer Körper).

Ein starrer Körper ist ein Ensemble von Massenpunkten, bei denen die Positionen der Teilchen relativ zueinander fixiert sind, d.h. alle Abstände (und damit Winkel) zwischen den Teilchen sind konstant. Der Körper ist starr und kann sich nur als Ganzes bewegen.

Das Konzept des starren Körpers ist sehr praktisch, da es die Menge an Information erheblich reduziert, mit der man sich befassen muß. Diese Menge an Information kann man genauer fassen, indem man Freiheitsgrade abzählt.

**Definition 7.2 (Freiheitsgrade).**

Unter der Zahl der *Freiheitsgrade* versteht man die Zahl der Koordinaten, die notwendig sind, um die Position des Systems vollständig zu beschreiben.

**Beispiel 7.1. (Freiheitsgrade)**

Ein Massenpunkt: Die Lage des Massenpunktes ist durch den Ortsvektor  $\vec{r} = (x, y, z)$  vollständig bestimmt. Ein einzelner Massenpunkt hat daher drei Freiheitsgrade.

$N$  Massenpunkte: Die  $N$  Ortsvektoren  $\vec{r}_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) bestimmen die Lage des Systems vollständig, d.h. ein System aus  $N$  Massenpunkten hat  $3N$  Freiheitsgrade.

Ein starrer Körper aus  $N$  Massenpunkten hat (erheblich) weniger als  $3N$  Freiheitsgrade, da die Bewegungen der Teilchen relativ zueinander nicht möglich sind. Er hat drei Freiheitsgrade der Translation des Schwerpunkts und drei Freiheitsgrade der Rotation der Ausrichtung, also 6 Freiheitsgrade insgesamt. Die drastische Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade ist den Zwangsbedingungen der Starrheit geschuldet, die die Relativpositionen aller Massenpunkten festlegt. Die restlichen  $3N - 6$  Freiheitsgrade, die ein beliebiges, nicht starres System aus  $N$  Teilchen hätte, bezeichnet man auch als innere Freiheitsgrade. Sie entsprechen z.B. Schwingungen und spielen in der Molekül- und Festkörperphysik eine wichtige Rolle.

## 7.1 Trägheitstensor

Wir wollen annehmen, daß die Summe der äußeren Kräfte verschwindet, so daß der Gesamtimpuls konstant ist. O.B.d.A.<sup>13</sup> sei der Schwerpunkt in Ruhe, d.h. wir stellen uns vor, daß wir das Inertialsystem am Schwerpunkt des Körpers festmachen, was möglich ist, da die Bewegung des Schwerpunkts ohne äußere Kräfte eine gleichförmige ist.

Wir konzentrieren uns auf die Rotation um eine feste Achse  $\hat{\omega}$  mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , siehe Abb. 7.1. Der Drehimpuls eines Massenpunktes ist  $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ . Mit der allgemeinen Regel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

ergibt sich  $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})$ . Dieser Ausdruck bildet den Vektor  $\vec{\omega}$  linear auf einen anderen Vektor ab. Man kann also dafür eine Matrix  $\underline{\underline{M}}$  finden mit  $\underline{\underline{M}}\vec{\omega} = \vec{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})$ . Ohne Rechnung kommt man auf diese Matrix, indem man die Multiplikation mit  $r^2$  als  $r^2 \underline{\underline{E}}$  schreibt und das Skalarprodukt  $\vec{r} \cdot \vec{\omega}$  als  $\vec{r}^T \vec{\omega}$ . Dann ergibt sich  $\underline{\underline{M}} = r^2 \underline{\underline{E}} - \vec{r}\vec{r}^T$ . Der zweite Term entspricht dem schon früher erwähnten dyadischen Produkt  $\vec{r} \circ \vec{r}$ , das aus zwei Vektoren eine Matrix macht. Beachte, daß im Ausdruck  $\vec{r}\vec{r}^T$  die beiden Vektoren als Matrizen aufgefaßt werden, zwischen denen eine Matrixmultiplikation ausgeführt wird. Die Standardregeln zur Transposition ergeben, daß  $(\vec{r}\vec{r}^T)^T = (\vec{r}^T)^T \vec{r} = \vec{r}\vec{r}^T$  symmetrisch ist.

<sup>13</sup>Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, *nicht*: ohne Bedenken des Autors



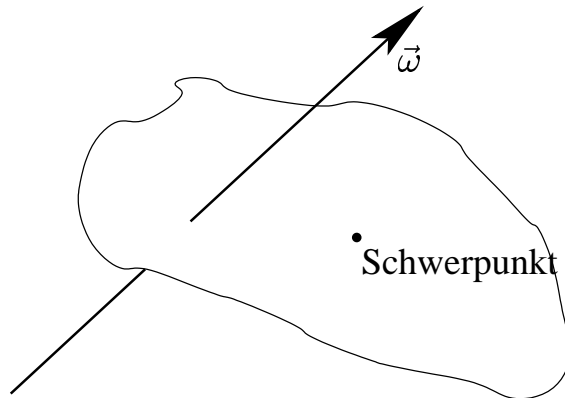


Abbildung 7.1: Rotation eines starren Körpers um die Achse  $\vec{\omega}$ .

Nun definieren wir  $\underline{\underline{\theta}}_j = m_j(\vec{r}_j^2 \underline{\underline{E}} - \vec{r}_j \vec{r}_j^T)$ , wobei der Index  $j$  den Beitrag des  $j$ -ten Massenpunkts beschreibt. Somit können wir dessen Beitrag zum Drehimpuls mit  $\vec{L}_j = \underline{\underline{\theta}}_j \vec{\omega}$  angeben. Der gesamte starre Körper hat den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^n \vec{L}_j = \left( \sum_{j=1}^n \underline{\underline{\theta}}_j \right) \vec{\omega} =: \underline{\underline{\Theta}} \vec{\omega},$$

was uns zur Definition führt:

**Definition 7.3 (Trägheitstensor).** Der Tensor zweiter Stufe, d.h. mit zwei Indizes,

$$\underline{\underline{\Theta}} := \sum_{j=1}^n m_j (\vec{r}_j^2 \underline{\underline{E}} - \vec{r}_j \vec{r}_j^T)$$

heißt Trägheitstensor. Er beschreibt die Trägheitseigenschaften eines starren Körpers. Beachte, daß die Matrixelemente des Trägheitstensors vom gewählten Koordinatensystem und von der Position und Ausrichtung des Körpers abhängen.

Der Trägheitstensor ist das einfachste Beispiel, bei dem zur Beschreibung einer Eigenschaft ein Tensor zweiter Stufe, eine Matrix, benötigt wird. Der Trägheitstensor ist eine symmetrische Matrix, da  $\vec{r}_j \vec{r}_j^T$  symmetrisch ist.

Neben der Berechnung des Drehimpulses erlaubt der Trägheitstensor auch die direkte Berechnung der kinetischen Energie  $T$ . Mit  $\vec{v}_j = \omega \times \vec{r}_j$  haben wir

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (\vec{v}_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (\omega \times \vec{r}_j)^2.$$

Nach einer weiteren allgemeinen Regel gilt

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Es folgt

$$(\omega \times \vec{r}_j)^2 = \vec{\omega}^2 \vec{r}_j^2 - (\omega \cdot \vec{r}_j)^2 = \vec{\omega}^T (\vec{r}_j^2 \underline{\underline{E}} - \vec{r}_j \vec{r}_j^T) \vec{\omega} ,$$

worin wiederum dieselbe Matrix wie bei der Definition von  $\underline{\underline{\theta}}_j$  auftaucht. Also gilt

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \vec{\omega}^T \underline{\underline{\theta}}_j \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}} \vec{\omega} .$$

Zur Berechnung der kinetischen Energie benötigen wir als nur wiederum den Trägheitstensor und Betrag und Richtung der Winkelgeschwindigkeit. Beachte, daß der obige Ausdruck formal große Ähnlichkeit zu  $T = (1/2)m\vec{v}^2 = (1/2)\vec{v}^T m \underline{\underline{E}} \vec{v}$  hat. Allerdings ist die Masse eine besonders einfache Matrix, nämlich proportional zur Einheitsmatrix, weshalb sie auch nicht von der Wahl der Basis, dem Koordinatensystem abhängt. Die Identität ist in allen Basen die Identität.

Eine wichtige Beziehung, die wir aus der Kombination von Gleichungen  $\vec{L} = \underline{\underline{\Theta}} \vec{\omega}$  und  $T = (1/2)\vec{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}} \vec{\omega}$  lernen, ist

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} .$$

## 7.2 Trägheitsmoment

Der volle Trägheitstensor birgt alle Information, die wir zum Verstehen der Dynamik einer Rotation benötigen. Häufig brauchen wir aber weniger als das. Das ist dann der Fall, wenn mit Hilfe von Lagern die Drehachse des rotierenden Körpers fixiert ist. In diesem Fall reicht die Kenntnis eines speziellen Matrixelements des Trägheitstensors, des sogenannten Trägheitsmoments bezüglich der festen Achse  $\hat{\omega}$ .

**Definition 7.4 (Trägheitsmoment).** Das Trägheitsmoment  $I$  eines Körpers bezüglich einer Achse  $\hat{\omega}$  ist gegeben durch

$$I := \hat{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}} \hat{\omega} .$$

Damit lautet die kinetische Energie  $T = (1/2)I\omega^2$  in vollständiger Analogie zur Translation.

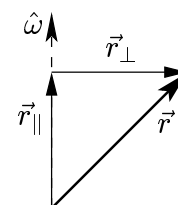
Um den Bezug zu anschaulichen Formeln für das Trägheitsmoment herzustellen, berechnen wir  $\hat{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}} \hat{\omega}$  direkt. Dazu machen wir uns klar, daß  $\vec{r} \cdot \hat{\omega} = r_{\parallel}$  die Komponente von  $\vec{r}$  entlang von  $\hat{\omega}$  darstellt; sie heißt auch Parallelkomponente. Die zugehörige senkrechte Komponente ist  $r_{\perp}$ . Pythagoras lehrt uns  $\vec{r}^2 = r^2 = r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2$  und somit  $r^2 - r_{\parallel}^2 = r_{\perp}^2$ .

Also gilt

$$\hat{\omega}^T \underline{\underline{\theta}}_j \hat{\omega} = m_j \left( \vec{r}_j^2 - \underbrace{\hat{\omega}^T \vec{r}_j}_{r_{j,\parallel}} \underbrace{\vec{r}_j^T \hat{\omega}}_{r_{j,\parallel}} \right) = m_j r_{j,\perp}^2$$

und somit die aus dem Experimenterteil der Vorlesung vertraute Formel

$$I = \sum_{j=1}^n m_j r_{j,\perp}^2 .$$



An dieser Formel erkennt man auch, daß  $I$  sich nicht ändert, wenn der Körper nur um festes  $\hat{\omega}$  gedreht wird. Der senkrechte Abstand  $r_{j,\perp}$  zur Achse  $\hat{\omega}$  bleibt unverändert.

Wenn man die Trägheitsmomente als das primär interessante betrachtet, ergibt sich noch ein anderer Blick auf den Trägheitstensor. Er beinhaltet alle Information über mögliche Trägheitsmomente. Außerdem weiß man, wie sich ein Tensor unter Drehungen transformiert, was wir später noch einmal besprechen. Bei einzelnen Matrixelementen ist das weit weniger klar.

Auch wenn die Drehachse parallel verschoben wird, muß das Trägheitsmoment nicht völlig neu berechnet werden. Es gilt der Steinersche Satz.

**Satz 7.1.** Für das Trägheitsmoment  $I_A$  bezüglich der Achse  $A$  ergibt sich aus dem Trägheitsmoment  $I_{AS}$  bezüglich der Achse  $AS$ , die im Abstand  $\vec{d}$  parallel zu  $A$  durch den Schwerpunkt  $S$  läuft, gilt

$$I_A = I_{AS} + M\vec{d}^2,$$

wobei  $M$  die Masse des Körpers ist.

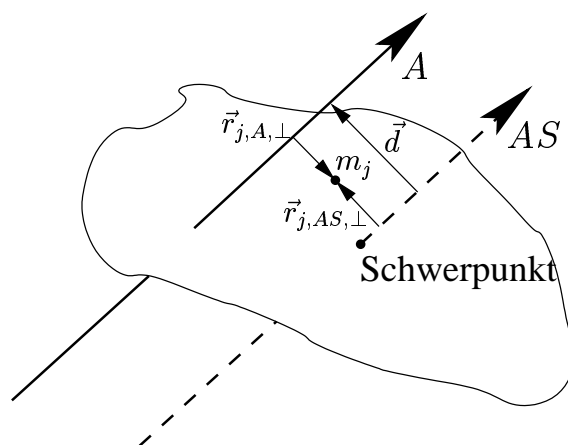


Abbildung 7.2: Drehachsen und Abstände zur Ableitung des Steinerschen Satzes.

Zur Ableitung betrachten wir die Abstände in Abb. 7.2. Es gilt

$$I_A = \sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_{j,\perp,A}^2 = \sum_{j=1}^n m_j (\vec{r}_{j,\perp,AS} + \vec{d})^2.$$

Da beide Achsen parallel laufen, ändert sich nichts an der Bedingung, senkrecht zu stehen. Weiterhin steht auch der Abstandsvektor  $\vec{d}$  senkrecht auf beiden Achsen. Dann kann man ausmultiplizieren

$$I_A = \underbrace{\sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_{j,\perp,AS}^2}_{I_{AS}} + 2\vec{d} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_{j,\perp,AS}}_0 + \vec{d}^2 \underbrace{\sum_{j=1}^n m_j}_M,$$

woraus der behauptete Satz folgt. Wesentlich ist, daß sich die massengewichteten Abstände zum Schwerpunkt alle wegheben. Nach Definition des Schwerpunkts gilt ja  $M\vec{R} = \sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j$ . Mißt man nun die Orte relativ zum Schwerpunkt selbst, hat man den Schwerpunkt zum Ursprung seines Koordinatensystems gemacht. Also gilt  $\vec{R} = \vec{0}$  und im Speziellen auch, daß die Komponenten senkrecht zu einer beliebigen aber festen Achse verschwinden.

Die Steinersche Formel trennt die Gesamtbewegung in einen Anteil der Rotation um den Schwerpunkt und einen Anteil der Rotation der im Schwerpunkt versammelten Masse  $M$ . Man kann das benutzen, um die gesamte kinetische Energie in einen Rotationsanteil um den Schwerpunkt und einen Translationsanteil des Körpers als Massenpunkt im Schwerpunkt aufzuspalten

$$T = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2} I_{AS} \omega^2 + \frac{1}{2} M \underbrace{\vec{d}^2 \vec{\omega}^2}_{\vec{v}^2},$$

wobei wir  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{d}$  benutzen und die Tatsache, daß  $\vec{d}$  und  $\vec{\omega}$  senkrecht aufeinander stehen, so daß der Betrag von  $\vec{v}$  dem Produkt der Beträge  $d$  und  $\omega$  entspricht.

### 7.3 Tensoren

Wir wollen systematisch angeben, was unter einem Tensor zu verstehen ist, und wie sich die anderen Begriffe wie Skalar, Vektor und Matrix dazu verhalten.

**Definition 7.5.** Ein Tensor  $T_{i_1, i_2, \dots, i_n}$   $n$ -ter Stufe ist ein Objekt mit  $n$  Indizes, daß sich unter orthogonalen Transformationen  $\underline{D}$  wie folgt transformiert

$$T'_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} D_{j_1, i_1} D_{j_2, i_2} \dots D_{j_n, i_n} T_{i_1, i_2, \dots, i_n}. \quad (7.1)$$

Ein Beispiel für Tensoren nullter Stufe sind Skalare. Sie haben keine Index, weshalb auch nichts zu transformieren ist. Sie bleiben unverändert; man sagt sie sind invariant. Beispiele sind die Masse oder die kinetische Energie.

Ein Beispiel für Tensoren erster Stufe sind Vektoren. Die Transformationsvorschrift (7.1) wird zu

$$v'_j = \sum_i D_{ji} v_i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}' = \underline{D} \vec{v},$$

was offensichtlich die richtige Transformationsvorschrift ist, womit wir gezeigt haben, daß Vektoren tatsächlich Tensoren erster Stufe sind.

Ein Beispiel für Tensoren zweiter Stufe sind Matrizen. Die Transformationsvorschrift (7.1) wird zu

$$M'_{j_1, j_2} = \sum_{i_1, i_2} D_{j_1, i_1} D_{j_2, i_2} M_{i_1, i_2}.$$

Wollen wir das als Matrixmultiplikation interpretieren, so stimmt die Indexreihenfolge in der zweiten Komponente nur, wenn wir zur Transponierten Matrix übergehen

$$\underline{M}' = \underline{D} \underline{M} \underline{D}^T.$$

Da wir noch nicht behandelt haben, wie sich Matrizen bei Drehungen verhalten, können Sie (noch) nicht erkennen, daß das tatsächlich das richtige Transformationsverhalten ist. Exemplarisch wollen wir aber einen besonders einfachen Matrixtyp, nämlich das dyadische Produkt  $\underline{\underline{M}} = \vec{a}\vec{b}^T$  betrachten. Die Vektoren transformieren sich, wie oben gezeigt

$$\underline{\underline{M}}' = \vec{a}'\vec{b}'^T = (\underline{\underline{D}}\vec{a})(\underline{\underline{D}}\vec{b})^T = \underline{\underline{D}}\vec{a}\vec{b}^T\underline{\underline{D}}^T = \underline{\underline{D}}\underline{\underline{M}}\underline{\underline{D}}^T ,$$

so daß wir tatsächlich das von der Gleichung (7.1) implizierte Transformationsverhalten wiederfinden.

Als ein Beispiel für einen Tensor dritter Stufe sei der total antisymmetrische Tensor  $\varepsilon_{ijk}$  angeführt. Es ist definiert durch  $1 = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312}$ ,  $-1 = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321}$  und  $0 = \varepsilon_{ijk}$  sonst, d.h. wenn mindestens zwei Indizes gleich sind. Dieser Tensor gehorcht ebenfalls der Gleichung (7.1).

## 8 Zweikörperproblem

Auf Grund der großen Bedeutung in der Physik wollen wir das Problem zweier Körper der Massen  $m_1$  und  $m_2$ , die mittels einer radialen Zentralkraft  $\vec{F}_{21}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$  miteinander wechselwirken, genauer untersuchen. Die Wechselwirkung kann z.B. die Anziehung von Massen auf Grund der Gravitation sein ( $f(r) = -Gm_1m_2/r^2$ ) oder die Abstoßung (Anziehung) zweier (un)gleichnamiger Ladungen ( $f(r) = kq_1q_2/r^2$  mit  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ ).

Als Erstes zählen wir die Anzahl der Freiheitsgrade. Bei zwei Massenpunkten im dreidimensionalen Raum ergeben sich sechs Freiheitsgrade. Daher benötigen wir 12 Integrale der Bewegung; wir haben allgemein aber nur 10. Wir müssen uns also darauf einrichten, zweimal von Hand zu integrieren und spezielle Eigenschaften des Systems auszunutzen. Zuerst sollen aber die Erhaltungssätze ausgenutzt werden.

Wir wissen, daß man die Erhaltung des Gesamtimpulses ausnutzen kann, um die Schwerpunktbewegung abzutrennen. Der Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig; das Inertialsystem sei so gewählt, daß er im Ursprung liegt. Übrig bleibt das Problem *eines* Teilchens der reduzierten Massen  $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$  in einem Kraftfeld  $f(r)\hat{r}$ , das wir nun als äußeres betrachten, siehe Abschnitt 5.3.

Nun wollen wir die Erhaltung des Drehimpulses ausnutzen. Diese Erhaltung ist gegeben, da wir von einem radialen Zentralkraftfeld ausgehen, siehe Abschnitt 6.3. Wir legen die Koordinaten so, daß der konstante Drehimpuls  $\vec{L}$  in  $z$ -Richtung zeigt  $\vec{L} = (0, 0, L)^T$ . Aus  $\vec{L} = \mu\vec{r} \times \vec{v}$  wissen wir, daß gilt  $\vec{L} \perp \vec{r}, \perp \vec{v}$ , so daß beide Vektoren in der  $xy$ -Ebene liegen. Wir brauchen also nur eine zweidimensionale Bewegung zu diskutieren.

Den Betrag des Drehimpulses benutzen wir, um etwas über die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  zu lernen. Wir betrachten die Bewegung des Körpers als Drehung um die  $\vec{e}_z$  Achse. Es gilt  $L = I_{\vec{e}_z}\omega$ , wobei  $I$  das Trägheitsmoment ist. Da  $\vec{r} \perp \vec{e}_z$  gilt  $I_{\vec{e}_z} = \mu r^2$  und so

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{L}{2\mu} dt .$$

Der Ausdruck  $\frac{1}{2}r^2d\varphi$  steht für die infinitesimale Fläche eines schmalen Dreiecks, das der Ortsvektor auf seiner Bahn, der sogenannte Fahrstrahl, in der Zeit  $dt$  überstreicht. Das ist in Abb. 8.1 illustriert. Geometrisch interpretiert lesen wir ab, daß die Flächengeschwindigkeit konstant ist

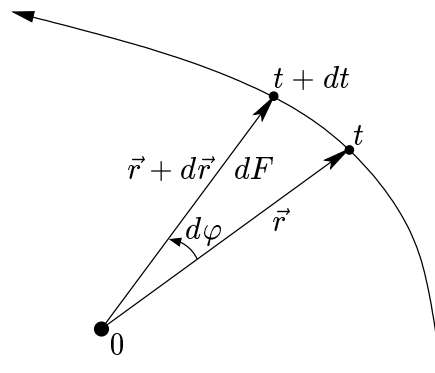


Abbildung 8.1: Bahnkurve und Fahrstrahl eines Teilchens, das sich um den Ursprung  $O$  bewegt. Es wird die Dreiecksfläche  $dF = (1/2)r(rd\varphi)$  in der Zeit  $dt$  überstrichen.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{const.}$$

Also gilt

## 2. Keplersches Gesetz:

Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Bemerkung: Diese Aussage, die man auch als *Flächensatz* bezeichnet, gilt allgemein für radiale Zentralkräfte, nicht nur für die Gravitations- oder die elektrische Kraft.

Um quantitativ die Bewegungsgleichung zu lösen, bietet es sich an, eine weitere erhaltene Größe, die Energie, zu betrachten. Sei das Potential  $V(r)$  aus  $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$  bestimmt, z.B.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{A}{r^2}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\frac{A}{r}.$$

Dann gilt  $E = T + V = \text{const.}$  Die kinetische Energie beträgt, vgl. Abschnitt 2.2.2

$$T = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\mu(r^2\omega^2 + \dot{r}^2).$$

Wir kennen  $\omega = \dot{\varphi}$  nicht, können es aber mittels der Drehimpulserhaltung als Funktion des Abstands ausdrücken  $\omega = L/(\mu r^2)$  und erhalten insgesamt

$$E = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (8.1)$$

mit  $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + L^2/(2\mu r^2)$ . Der Term  $L^2/(2\mu r^2)$  heißt auch *Zentrifugalpotential*. Mit der obigen Gleichung haben wir das Problem auf ein eindimensionales Problem, konkret eine

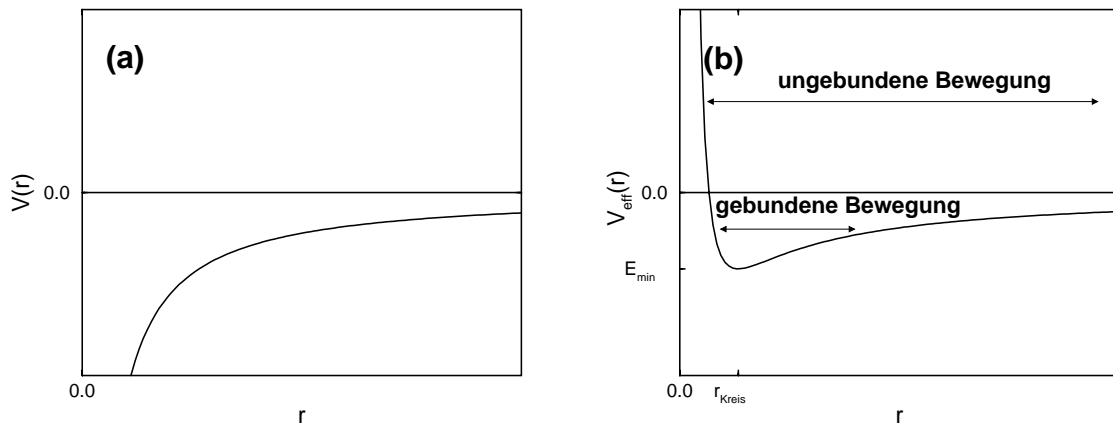


Abbildung 8.2: (a)  $1/r$  Potential wie es bei Gravitation oder Coulombwechselwirkung ungleichnamiger Ladungen auftritt. (b) Effektives Potential  $V_{\text{eff}}(r)$ , das das Zentrifugalpotential beinhaltet. Für positive Gesamtenergie  $E > 0$  liegt ungebundene Bewegung vor; für negative Gesamtenergie  $E < 0$  gebundene Bewegung.

Differentialgleichung 1. Ordnung, reduziert! Insbesondere verstehen wir nun also qualitativ die möglichen Bewegungen durch Betrachtung des effektiven Potentials, siehe Abb. 8.2. Haben wir die Integrationskonstante des Potentials so bestimmt, daß es im Unendlichen verschwindet, so bedeutet positive Energie, daß die Bewegung ungebunden ist. Die zwei Körper kommen einander nahe, entfernen sich dann aber wieder voneinander. Ist die Energie negativ, so liegt gebundene Bewegung vor. Die beiden Körper kommen nicht voneinander los und kreisen umeinander. Ein Spezialfall der gebundenen Bewegung liegt vor, wenn die Energie den Wert des Potentialminimums annimmt. Dann ist keine Energie für die kinetische Energie frei und so verharrt der Abstand  $r$  konstant beim Wert  $r_{\text{min}}$ . Es liegt eine Kreisbahn vor. Beachte, daß diese qualitativen Überlegungen unabhängig vom genauen Potential der anziehenden Kraft gilt, also nicht nur auf ein  $1/r$  Potential beschränkt sind.

Will man mehr als die qualitativen Aussagen, so haben wir schon in einer Dimension, siehe Abschnitt 4.2, gesehen, daß man die Gleichung (8.1) nach  $\dot{r}$  auflösen und integrieren kann. So erhält man  $t(r)$  und nach Invertierung die Bahnkurve  $r(t)$ . Beim Keplerproblem, d.h. beim  $1/r$ -Potential, ist es jedoch einfacher und klarer, erst die Bahn  $r(\varphi)$  in Polarkoordinaten zu bestimmen. Man kennt dann die Kurve im dreidimensionalen Raum, auf dem sich das effektive Teilchen bewegt, ohne die genaue Zeitabhängigkeit zu kennen. Diese kann man in einer weiteren Integration bestimmen, wie wir konkret weiter unten sehen werden.

Dazu rechnen wir die Zeitableitung um

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = r' \omega = r' \frac{L}{r^2 \mu},$$

wobei für die letzte Gleichheit die Drehimpulserhaltung verwendet wurde. Einsetzen in die Ener-

gie liefert

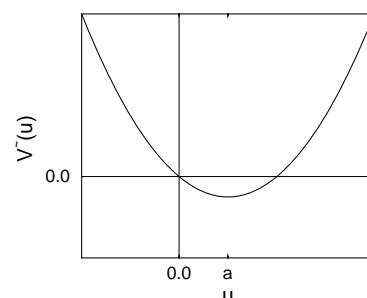
$$E = \frac{L^2}{2\mu} \frac{(r')^2}{r^4} + V_{\text{eff}}(r) .$$

Das ist uns immer noch zu kompliziert, da im Ableitungsterm noch  $r$  auftritt. Daher suchen wir eine Funktion des Winkels mit  $u' \propto r'/r^2$ . Integration liefert  $u = 1/r$  mit  $u' = -r'/r^2$ . Eingesetzt ergibt sich

$$E = \frac{L^2}{2\mu} (u')^2 + V_{\text{eff}}(1/u) = \frac{L^2}{2\mu} (u')^2 - Au + \frac{L^2}{2\mu} u^2 .$$

Damit sind wir fast bei einem alten Bekannten, dem harmonischen Oszillator. Das Potential  $\tilde{V}(u) = -Au + \frac{L^2}{2\mu} u^2$  entspricht dem einer verschobenen Parabel. Ihr Minimum ergibt sich aus

$$0 = -A + \frac{L^2 a}{\mu} \Leftrightarrow a = \frac{A\mu}{L^2} .$$



Die minimale Energie beträgt  $E_{\text{min}} = \tilde{V}(a) = -\frac{A^2\mu}{2L^2}$ . Gilt  $E = E_{\text{min}}$ , so ergibt sich die oben besprochene Kreisbahn.

Ist die Energie höher, liegen harmonische, d.h. sinusoidale, Oszillationen um  $u = a$  vor. Hierbei interpretieren wir  $\varphi$  jetzt als Zeit. Daher setzen wir an

$$u(\varphi) = a + C \cos(\tilde{\omega}(\varphi - \varphi_0)) .$$

Die Verschiebung  $\varphi_0$  können wir durch passende Drehung der Koordinatenachsen in der  $xy$ -Ebene zum Verschwinden bringen. Daher setzen wir  $\varphi_0 = 0$ . Formulieren wir die Energie etwas um

$$E - E_{\text{min}} = E + \frac{A^2\mu}{2L^2} = \frac{L^2}{2\mu} (u')^2 + \frac{L^2}{2\mu} (u - a)^2$$

und setzen den Ansatz ein, erhalten wir

$$\text{const} = E + \frac{A^2\mu}{2L^2} = \frac{L^2}{2\mu} C^2 [\tilde{\omega}^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi] .$$

Damit der Ausdruck rechts wirklich konstant, d.h. unabhängig von  $\varphi$  ist, müssen sich die Quadrate der beiden trigonometrischen Funktionen zu 1 addieren. Das erfordert  $\tilde{\omega} = 1$ . Den Wert von  $C$  liest man dann ab

$$C^2 = \underbrace{\frac{2\mu E}{L^2}}_{=:b} + \underbrace{\frac{A^2\mu^2}{L^4}}_{=:a^2} .$$

Für  $E = E_{\text{min}}$  ergibt sich  $C = 0$ , also die Kreisbahn. Sonst gilt  $C > 0$  und man erhält

$$r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = \frac{1}{a + C \cos(\varphi)} = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \quad (8.2)$$



mit  $k = 1/a = L^2/(\mu A)$  und  $\epsilon = C/a = \sqrt{1 + b/a^2}$ . Wir beschränken uns hier erst einmal auf  $a > 0$ , d.h. ein anziehendes Potential.

Welche Bahnen beschreibt Gleichung (8.2) ?

Absolut untypisch für ein allgemeines Potential beschreibt Gleichung (8.2) *periodische* Bahnen. Es gilt nämlich  $r(\varphi) = r(\varphi + 2\pi)$ . Nach einer Umdrehung folgt der Körper also genau wieder derselben Bahn. So natürlich uns das angesichts der regelmäßigen Abfolge der Jahreszeiten erscheinen mag, so speziell ist es doch. Fast jedes andere Potential würde nichtgeschlossene Bahnen erzeugen, die immer neue Raumpunkte passieren.

Konkret sind die Bahnen (8.2) Kegelschnitte, sie sind in den Abbildungen 8.3 und 8.4 illustriert. Die Kreisbahn ergibt sich für  $\epsilon = 0$ , die Ellipse für  $0 < \epsilon < 1$ , die Parabel für  $\epsilon = 1$  und die Hyperbel für  $\epsilon > 1$ . In den letzten beiden Fällen wird der Nenner in (8.2) Null für bestimmte Winkel. Bei der Parabel ist das  $\varphi_\infty = \pi$ . Bei der Hyperbel bestimmen sich die Winkel der Asymptoten (gepunktet in Abb. 8.4) aus  $\varphi_\infty = \pm \arccos(-1/\epsilon)$ . Offensichtlich beschreiben Kreis und Ellipse die gebundene Bewegung und Parabel und Hyperbel die ungebundene Bewegung. Die Parabel ist dabei gerade der Grenzfall, wenn gebundene Bewegung gerade ungebunden geworden ist.

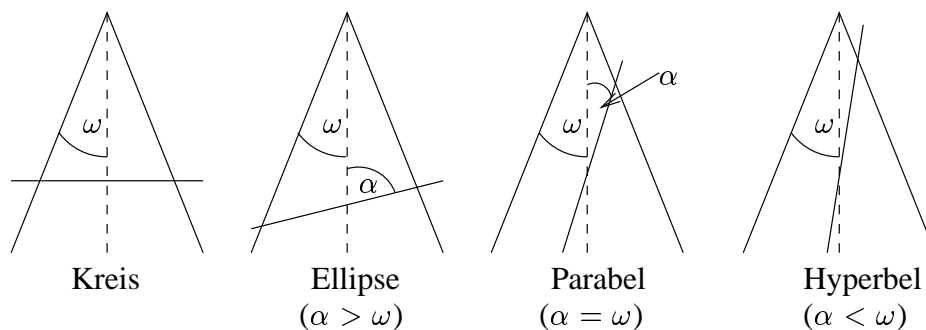
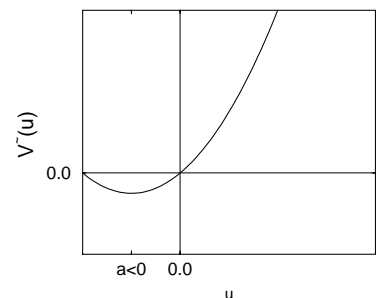


Abbildung 8.3: Die Kegelschnitte. Der Kreiskegel mit Öffnungswinkel  $\omega$  ist in der Seitenansicht gezeigt.

Was passiert bei abstoßendem Potential zwischen den beiden Körpern, z.B. für gleichnamige Ladungen? Es gilt dann  $A < 0$  und somit  $a < 0$ . Der verschobene Oszillator hat kein Minimum mehr für die physikalisch sinnvollen positiven Werte von  $u$ . Die formale Lösung lautet wie vorher  $u(\varphi) = a + C \cos(\varphi)$ , hier mit  $a < 0$ . Da sie nur für positives  $u$  sinnvoll ist, muß  $C > |a|$  gelten. Wir definieren  $\epsilon = C/|a| > 1$  und erhalten



$$r(\varphi) = \frac{1/|a|}{-1 + \epsilon \cos \varphi} = \frac{1/a}{1 - \epsilon \cos \varphi}.$$

Bei dieser Bahn handelt es sich wiederum um eine Hyperbel, die in Abb. 8.4 gestrichelt gezeigt ist. Der Grenzwinkel  $\varphi_\infty$ , bei dem der Abstand  $r$  unendlich wird, bestimmt sich aus  $0 = -1 + \epsilon \cos \varphi_\infty \Leftrightarrow \varphi_\infty = \pm \arccos(1/\epsilon)$ .

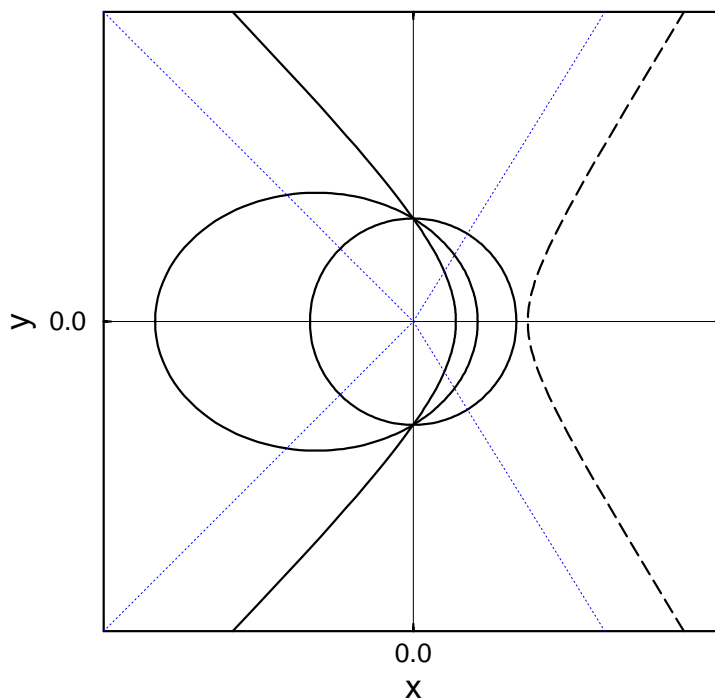


Abbildung 8.4: Die Kegelschnitte in Aufsicht. Die Hyperbel im Falle von Abstoßung durch den Ursprung ist gestrichelt gezeichnet. Die Asymptoten, an die sich die Hyperbeln für  $r \rightarrow \infty$  anschmiegen, sind jeweils gepunktet (blau) gezeigt.

Die Hyperbelbahnen gehören zu positiver Gesamtenergie. Da  $\epsilon > 1$  gilt, gilt auch  $C^2 = a^2 + b > a^2$ , also  $0 < b = 2\mu E/L^2$ . Somit ist auch formal klar, daß hier ungebundene Bewegung vorliegt. Dies ist im Sonnensystem der Fall für Kometen, die sich genau einmal der Sonne nähern und dann wieder im Weltall verschwinden. Beachten Sie, daß die Bezeichnung Halleyscher Komet für einen *wiederkehrenden* Himmelskörper eigentlich eine Fehlbezeichnung ist.

Die gebundene Bewegung findet auf Ellipsen (bzw. Kreisen) statt. Dieser Sachverhalt ist das *1. Keplersches Gesetz*:

Planeten bewegen sich auf Ellipsen mit der Sonne in einem der Brennpunkte.

In dieses Gesetz geht eine Näherung ein, nämlich die, daß die Planetenmasse gegenüber der Sonnenmasse vernachlässigt werden kann  $M_{\text{Sonne}} \gg m_{\text{Planet}}$ . Dann ist der Schwerpunkt durch den Sonnenmittelpunkt gegeben und man kann auch die verschiedenen Planeten als unabhängig betrachten.

Um vollen Nutzen aus dem 1. Keplerschen Gesetz zu ziehen, müssen wir alle Kenngrößen der Ellipsen kennen, wie sie in Abb. 8.5 gezeigt sind. Es gibt zwei Brennpunkte und einen Mittelpunkt. Die große Halbachse  $d$  ist der maximale Abstand vom Mittelpunkt; die kleine Halbachse

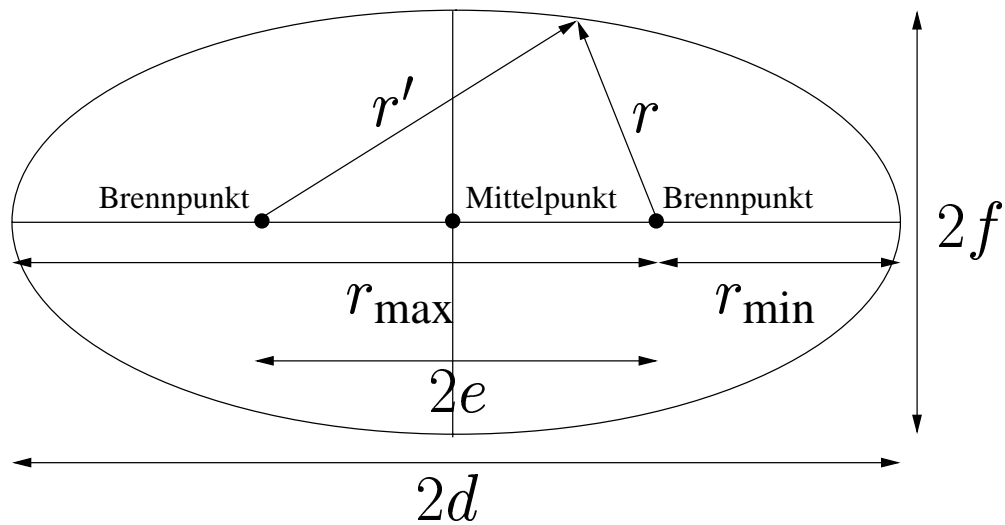


Abbildung 8.5: Die Ellipse und ihre wichtigen Kenngrößen, insbesondere die große Halbachse  $d$ , die kleine Halbachse  $f$  und die Exzentrizität  $e$ .

$f$  der minimale Abstand. Der Abstand der beiden Brennpunkte heißt Exzentrizität  $e$ . Bei Kreisen gilt  $e = 0$  und die Brennpunkte und der Mittelpunkt fallen zusammen. Der maximale Abstand zu einem der Brennpunkte sei  $r_{\max}$ ; der zugehörige Bahnpunkt wird bei der Planetenbewegung auch Aphel genannt. Bei Satelliten der Erde heißt er auch Apogäum. Der minimale Abstand zu einem der Brennpunkte sei  $r_{\min}$ ; der zugehörige Bahnpunkt wird bei der Planetenbewegung auch Perihel genannt. Bei Satelliten der Erde heißt er auch Perigäum. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} r_{\max} &= k/(1 - \epsilon) \\ r_{\min} &= k/(1 + \epsilon) \\ d &= (r_{\max} + r_{\min})/2 = k/(1 - \epsilon^2) \\ e &= (r_{\max} - r_{\min})/2 = k\epsilon/(1 - \epsilon^2) = d\epsilon. \end{aligned}$$

Weniger offensichtlich ist

$$f = \sqrt{d^2 - e^2} = \sqrt{r_{\min}r_{\max}} = k/\sqrt{1 - \epsilon^2} = \sqrt{kd}.$$

Allgemein kann man die Ellipse bezüglich des Mittelpunkts in kartesischen Koordinaten beschreiben durch

$$1 = \left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y}{f}\right)^2. \quad (8.3)$$

Eine weitere Charakterisierung besteht in der Identität

$$r + r' = \text{const} = 2d.$$

Das kann man zur Konstruktion mittels eines Fadens verwenden, den man an die beiden Brennpunkte knüpft.

Die Fläche der Ellipse beträgt  $F = \pi df$ . Das sieht man leicht ein, wenn man die Ellipse als einen Kreis mit Radius  $f$  betrachtet, der in Richtung der großen Halbachse um den Faktor  $d/f$  gestreckt ist, was genau der Charakterisierung in Gleichung (8.3) entspricht.

Nun wollen wir die Bestimmung der Bewegung komplettieren und  $\varphi(t)$  berechnen. Damit werden wir auch  $r(t) = r(\varphi(t))$  kennen. Direkt ist für uns die Umkehrfunktion  $t(\varphi)$  zugänglich. Wir erhalten sie wieder aus der Drehimpulserhaltung

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2(\varphi)} \quad \Rightarrow \quad r^2(\varphi) d\varphi = \frac{L}{\mu} dt .$$

Trennung der Variablen und Integration liefert

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( \frac{k}{1 + \epsilon \cos \varphi} \right)^2 d\varphi = \frac{L}{\mu} (t_2 - t_1) \quad (8.4)$$

mit Anfangswerten  $(t_1, \varphi_1)$  und Endwerten  $(t_2, \varphi_2)$ . Speziell können wir  $t_1 = 0$  und  $\varphi_1 = 0$  setzen sowie  $t_2 = t$  und  $\varphi_2 = \varphi$ , so daß wir wie gewünscht  $t(\varphi)$  erhalten. Das Integral kann analytisch gelöst werden, ist aber kompliziert und liefert keine tieferen physikalischen Einsichten. Wir verzichten auf die explizite Lösung. Wichtig ist, daß das Problem lösbar und vollständig charakterisiert ist.

Jedoch wollen wir die Gesamtumlaufzeit  $T$  bestimmen. Dazu nutzen wir die Konstanz der Flächengeschwindigkeit des Fahrstrahls aus, die uns erlaubt, statt Differentialquotienten Differenzenquotienten zu betrachten

$$\frac{L}{2\mu} = \frac{dF}{dt} = \frac{F}{T} ,$$

wobei  $F$  die Fläche der Ellipse ist. Einsetzen und Auflösen liefert

$$T = \frac{2\mu F}{L} = \frac{2\mu \pi d f}{L} = \frac{2\mu \pi d \sqrt{k d}}{L} = \frac{2\mu \pi d^{3/2} k^{1/2}}{L} = \frac{2\mu^{1/2} \pi d^{3/2}}{A^{1/2}} .$$

Hieraus folgt

$$T^2 = 4\pi^2 d^3 \frac{\mu}{A} .$$

Bei festem Verhältnis  $\mu/A$  sind die Quadrate der Umlaufzeit proportional zu den Kuben der großen Halbachsen. Für die Planetenbewegung um die Sonne gilt tatsächlich  $A = G m_1 m_2$  und somit  $\mu/A = (G(m_1 + m_2))^{-1}$ . Da die Summe der Massen völlig von der Sonnemasse dominiert wird  $M_{\text{Sonne}} \gg M_{\text{Planet}}$ , gilt in sehr guter Näherung  $m_1 + m_2 = M_{\text{Sonne}} + M_{\text{Planet}} \approx M_{\text{Sonne}}$ , so daß  $\mu/A$  tatsächlich konstant ist. Somit gilt das

### 3. Keplersches Gesetz:

Das Verhältnis des Quadrats der Umlaufzeit  $T$  und des Kubus der großen Halbachse  $d$  ist für alle Planetenbahnen um die Sonne gleich

$$\frac{T^2}{d^3} = \text{const} .$$

Am Anfang dieses Kapitels hatten wir festgestellt, daß uns zwei Integrale der Bewegung fehlen, da wir 12 brauchten, aber nur 10 auf Grund allgemeiner Erhaltungen hatten. Wo haben wir also in der Behandlung des Keplerproblems integriert? Wir haben tatsächlich zweimal integriert:

1. Die Integration

$$r'(\varphi) = f(r) \quad \Rightarrow \quad r(\varphi)$$

haben wir implizit gemacht, da wir auf die bekannten Ergebnisse zum harmonischen Oszillator zurückgreifen konnten.

2. Die Integration

$$\dot{\varphi}(t) = g(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t)$$

haben wir formal in Gl. (8.4) geleistet, wenn auch nicht ausgeführt.

Somit stimmt die Bilanz unserer Integrationen mit der anfänglichen Überlegung überein.

Abschließend fassen wir noch einmal die drei Keplerschen Gesetze in Kurzform zusammen:

1. Planetenbahnen = Ellipsen (mit Sonne im Brennpunkt)
2. Flächensatz: Radiusvektor überstreicht in gleicher Zeit gleiche Fläche
3.  $\frac{T^2}{a^3}$  ist für alle Planeten gleich.

Dabei sollte man immer im Hinterkopf behalten, daß der Flächensatz für beliebige Zentralkräfte gilt.

## 9 Schwingungen

Schwingungsvorgänge spielen eine extrem wichtige Rolle in der Physik. Im einen Extrem möchte man möglichst gute und langandauernde Schwingungen haben, wie zum Beispiel für Quarzuhren. Im anderen Extrem möchte man die Schwingung möglichst schnell wegdamfen, wie zum Beispiel beim gefederten Auto, dessen Schwingungen über die Stoßdämpfer gedämpft werden. Um all das beschreiben zu können, benötigen wir ein weiteres Stück Mathematik.

### 9.1 Komplexe Zahlen

Beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren von reellen Zahlen bleiben wir im Bereich der reellen Zahlen. Beim Wurzelziehen aber tritt ein Problem auf.

Problem:  $x^2 = -1$  hat keine reelle Lösung  $x$

Es zeigt sich, daß man sich einfach eine Lösung definieren kann (Euler 1777):  $i := \sqrt{-1}$ .  
 $i$  wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet.

Eine allgemeine *imaginäre Zahl* ist dann von der Form  $b \cdot i$  mit reellem  $b$ , also z.B.  $2i$ ,  $\pi i$ , etc. Wir übertragen nun die üblichen Rechenregeln der reellen Zahlen auf die imaginären Zahlen (unter Beachtung von  $i^2 = -1$ ):

$$\begin{aligned} b_1 i + b_2 i &= (b_1 + b_2) i \\ (b_1 i)(b_2 i) &= b_1 b_2 i^2 = -b_1 b_2 \\ i^3 &= i^2 i = -i \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

**Definition 9.1 (komplexe Zahlen).**

Allgemeine *komplexe Zahlen* sind von der Form

$$z = x + iy$$

mit reellen Zahlen  $x$  und  $y$ .  $x$  bezeichnet man auch als den *Realteil* von  $z$  und  $y$  als den *Imaginärteil*. Beachte, daß der Imaginärteil nach Definition selbst reell ist. Man schreibt auch  $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$ . Das Mengensymbol der komplexen Zahlen ist  $z \in \mathbb{C}$ .

Es handelt sich bei  $\mathbb{C}$  wie bei  $\mathbb{R}$  um einen kommutativen Körper. Das heißt nichts anderes, als daß alle elementaren Rechenregeln gelten, die man von reellen Zahlen kennt: Addition, Multiplikation, neutrales Element der Addition (0) bzw. der Multiplikation (1), Subtraktion, Division (außer durch 0), Abgeschlossenheit, Assoziativität, Distributivgesetze und Kommutativität. Wir wollen konkret auf die wichtigen Regeln eingehen.

$$\begin{aligned} \text{Addition: } z_3 &= z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ \text{Re}(z_3) &= \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2) \quad \text{und} \quad \text{Im}(z_3) = \text{Im}(z_1) + \text{Im}(z_2) \end{aligned}$$

Addiert werden Realteil und Imaginärteil getrennt wie die Komponenten eines Vektors. Tatsächlich kann man sich komplexe Zahlen gut als Vektoren im zweidimensionalen Raum vorstellen, der sogenannten komplexen Ebene, siehe Abb. 9.1.

$$\begin{aligned} \text{Multiplikation: } z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2) + i(x_1 y_2) + i(y_1 x_2) + i^2(y_1 y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Beachte, daß sich das Ergebnis nicht ändert, wenn man  $z_1$  und  $z_2$  vertauscht, die Multiplikation ist also kommutativ. Speziell für reelles  $\lambda$  gilt:

$$\lambda z = \lambda(x + iy) = (\lambda x) + i(\lambda y)$$

**Definition 9.2 (Komplexe Konjugation).**

$z^* := x - iy$  heißt *komplex-konjugiert* zu  $z = x + iy$ , d.h. die Operation  $*$  bedeutet Vorzeichenwechsel beim Imaginärteil. <sup>14</sup>

---

<sup>14</sup>Bisweilen wird die komplexe Konjugation auch mit einem Überstrich  $\bar{z}$  notiert.

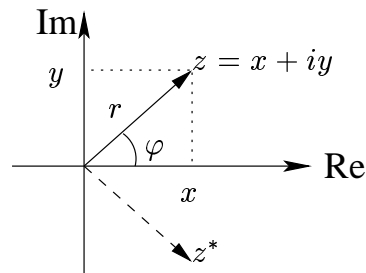


Abbildung 9.1: Die komplexe Ebene: eine komplexe Zahl  $z$  kann entweder kartesisch über ihren Realteil  $x$  und Imaginärteil  $y$  notiert werden oder polar über ihren Betrag  $r$  und den Winkel  $\varphi$ , der auch das Argument von  $z$  heißt. Komplexe Konjugation bedeutet Spiegelung an der reellen Achse.

Mit Hilfe des Komplex-Konjugierten kann man zum Beispiel leicht Real- und Imaginärteil hinschreiben

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) .$$

**Definition 9.3 (Betrag, Argument).**

Unter dem *Betrag*  $|z|$  einer komplexen Zahl  $z$  versteht man die Länge des zugehörigen Vektors in der komplexen Ebene  $r = |z|$ . Man kann das auch schreiben als

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = x^2 - (iy)^2 = (x + iy)(x - iy) = z z^* .$$

Den Winkel  $\varphi$  der Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl bezeichnet man als *Argument* von  $z$ :  $\varphi = \arg(z)$

Mit Betrag und komplexer Konjugation kann man leicht die Division durch eine komplexe Zahl realisieren

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{x}{|z|^2} - i \frac{y}{|z|^2} ,$$

da man sie auf eine Division mit einer reellen Zahl, dem Betrag von  $z$  zurückführt. Nur wenn  $z = 0$  ist und ihr Betrag daher 0 ist, geht diese Konstruktion schief. Das entspricht aber genau der Situation im Reellen.

Wichtig ist, daß der Betrag des Produktes zweier komplexer Zahlen  $|z_1 z_2|$  gleich dem Produkt der Beträge  $|z_1| |z_2|$  ist

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 z_1^* z_2^* = |z_1|^2 |z_2|^2 \quad \Rightarrow \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| .$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ist zwar formal schon hingeschrieben worden. Anschaulicher wird sie in der Polardarstellung

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 z_2 = \underbrace{r_1 r_2}_{r_3} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) \\ &= r_3 \left[ \underbrace{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}_{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} + i \underbrace{(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)}_{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \right] , \end{aligned}$$

wobei die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen verwendet wurden. Während sich die Beträge komplexer Zahlen bei Multiplikation multiplizieren (wie im Reellen übrigens), addieren sich ihre Winkel. Kurz gefaßt gilt also  $|z_3| = |z_1||z_2|$  und  $\arg(z_3) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ .

### Beispiel 9.1.

Die Zahl  $i$  hat den Betrag 1 und das Argument  $\pi/2$  in Radian. Nach unserer Regel hat die Zahl  $i^2$  also immer noch den Betrag 1, aber das Argument  $\pi$ . Dies charakterisiert die Zahl  $-1$ , wie es sein soll.

## Komplexwertige Funktionen komplexer Zahlen

Alle Funktionen, die man “gut”<sup>15</sup> durch ihre Taylorreihe darstellen kann

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!},$$

lassen sich problemlos ins Komplexe erweitern gemäß

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!}.$$

Sehr viele der Funktionen, die Sie also schon bisher kennen, haben ein komplexes Gegenstück. Die wichtigste ist die Exponentialfunktion

### Beispiel 9.2 (Exponentialfunktion).

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \rightarrow \quad \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Speziell gilt  $\exp z = \exp(x + iy) = \exp x \exp(iy)$ , worin der Faktor  $\exp x$  ein reeller, positiver Faktor ist, der den Betrag von  $\exp z$  bestimmt. Dazu muß man natürlich noch wissen, daß  $\exp iy$  den Betrag 1 hat

$$\begin{aligned} \exp iy &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} (i)^n \\ &= \sum_{n \text{ gerade}} \frac{y^n}{n!} (-1)^{n/2} + i \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{y^n}{n!} (-1)^{(n-1)/2} \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

Wenn man sich die Reihenentwicklungen von Kosinus und Sinus anschaut, stellt man fest, daß sie den geraden Potenzen bzw. bis auf einen Faktor  $i$  den ungeraden Potenzen der Funktion  $\exp iy$

<sup>15</sup>Die genaue Bedeutung dieses Begriffs wird in der Mathematik geklärt. Es reicht z.B., daß  $\sum_{n=0}^{\infty} |f^{(n)}(0)| r^n / n! < \infty$  gilt.



entsprechen. Das ist ein wichtiger Zusammenhang. Wir erkennen, daß  $\exp iy$  den Betrag 1 hat;  $y$  ist gerade das Argument von  $\exp iy$ . Für  $z' = \exp z = \exp x \exp iy$  gilt, daß der erste Faktor den Betrag von  $z'$  bestimmt und der zweite Faktor das Argument von  $z'$

$$|\exp z| = \exp x \quad \arg(\exp z) = y .$$

In Umkehrung gilt dann

$$\ln(z') = \ln(|z'|) + i \arg(z') ,$$

womit wir schon mal zwei wichtige komplexe Funktionen kennengelernt haben.

Hat eine Taylorreihe nur reelle Koeffizienten, z.B. weil  $f(x) \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}$ , so gilt für das komplexwertige Gegenstück

$$(f(z))^* = f(z^*) .$$

Beispiel ist die oben betrachtete Exponentialfunktion

$$(\exp z)^* = \exp z^* = \exp(x - iy) = \exp x (\cos y - i \sin y) .$$

Sehr häufig verwendet man  $\exp i\varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$  auch umgekehrt

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \operatorname{Re}(\exp(i\varphi)) = \frac{1}{2}(\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)) \\ \sin \varphi &= \operatorname{Im}(\exp(i\varphi)) = \frac{1}{2i}(\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)) . \end{aligned}$$

## 9.2 Homogene Lösungen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Nun wollen wir die hübschen komplexen Zahlen auch nutzen. Wozu?

Eine solche Differentialgleichung  $n$ -ten Grades haben wir schon früher in Abschnitt 3.1.2 kennengelernt

$$0 = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y ,$$

wobei  $y^{(m)}$  für die  $m$ -te Ableitung steht und  $a_n \neq 0$  sein soll. Wir hatten exemplarisch gesehen, daß der Ansatz  $y = \exp(\lambda t)$  die obige Differentialgleichung in eine Gleichung ohne Ableitungen verwandelt, da  $(\exp(\lambda t))^{(m)} = \lambda^m \exp(\lambda t)$  gilt. Man erhält

$$0 = \exp(\lambda t) [a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0] .$$

Da der exponentielle Vorfaktor nicht 0 ist, muß die eckige Klammer verschwinden. Das bedeutet, daß  $\lambda$  die Nullstelle des sogenannten charakteristischen Polynoms  $P_n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$   $n$ -ten Grades sein muß. Um  $n$  unabhängige Lösungen zu haben, benötigen wir sogar  $n$  solche Nullstellen, die bei Polynomen auch den Namen Wurzeln tragen. Im Reellen jedoch funktioniert das nicht immer, wie man schon am Polynom  $P_2(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$  sieht. Das war unser Problem !

Im Komplexen ist das Problem gelöst, denn es gibt folgenden zentralen Satz der Algebra

**Satz 9.1.** Jedes Polynom  $P_n(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$   $n$ -ten Grades, d.h.  $a_n \neq 0$ , hat genau  $n$  Wurzeln  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ . Es gilt

$$P_n(z) = a_n (z - z_n)(z - z_{n-1}) \dots (z - z_2)(z - z_1).$$

Diese Zerlegung in Faktoren, in denen  $z$  nur noch linear vorkommt, heißt Linearfaktorzerlegung. Die Wurzeln können auch ganz oder teilweise gleich sein. Dann spricht man von mehrfachen Nullstellen;  $n$ -fach, wenn ein Nullstellenwert  $n$ -mal vorkommt.

Ist die Differentialgleichung bzw. das Polynom reell, d.h. die Koeffizienten sind reell, dann gilt offenbar für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$P_n(x) = P_n^*(x) \Leftrightarrow (x - z_n)(x - z_{n-1}) \dots (x - z_2)(x - z_1) = (x - z_n^*)(x - z_{n-1}^*) \dots (x - z_2^*)(x - z_1^*).$$

Daraus folgt entweder  $z_j = z_j^*$ , was bedeutet, daß die Wurzel reell ist. Oder  $z_j$  ist nicht reell; dann aber gibt es zu  $z_j$  ein  $z_i$  mit  $z_j = z_i^*$ . Das bedeutet, daß echt komplexe Wurzeln nur als konjugierte Paare auftreten können.

Praktisch müssen Sie sich als Quintessenz dieser Mathematik merken: Im Komplexen gibt es immer genügend Nullstellen, so daß der Ansatz  $y = \exp(\lambda t)$  funktioniert. Liegen allerdings mehrfache Nullstellen vor, so fehlen uns scheinbar immer noch unabhängige Lösungen, da der eine Wurzelwert nur für eine Exponentialfunktion taugt. Man kann sich bei einer  $n$ -fachen Nullstelle  $\lambda$  aber überlegen, daß die Funktionen

$$\exp(\lambda t), t \exp(\lambda t), \dots, t^{n-1} \exp(\lambda t)$$

sinnvolle unabhängige Lösungen der Differentialgleichung sind.

**Beispiel 9.3.** Die Differentialgleichung zweiten Grades

$$0 = y'' + by' + cy$$

tritt zum Beispiel beim gedämpften harmonischen Oszillator auf. Ihr charakteristisches Polynom lautet  $P_2(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$  und hat die Lösungen

$$\lambda_{\pm} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c},$$

die zu den zwei homogenen Lösungen  $y_1 = \exp(\lambda_+ t)$  und  $y_2 = \exp(\lambda_- t)$  führen.

Ist nun der Radikand  $b^2/2 - c$  positiv, so sind das zwei verschiedene reelle Lösungen.

Ist der Radikand  $b^2/2 - c = 0$ , so sind die beiden Lösungen doch gleich – man sagt, sie seien entartet – und wir betrachten  $y_1 = \exp(-(b/2)t)$  und  $y_2 = t \exp(-(b/2)t)$  als die beiden unabhängigen Lösungen.

Ist der Radikand  $b^2/2 - c$  negativ, so haben wir zwei unabhängige komplexe Lösungen mit der Eigenschaft  $\lambda_+ = \lambda_-^*$ . Ist uns aus physikalischen Gründen an reellen Lösungen gelegen, nützen wir die komplexe Konjugation und betrachten

$$y_1 = \frac{1}{2} e^{-bt/2} (e^{i\sqrt{c-b^2/4}t} + e^{-i\sqrt{c-b^2/4}t}) = e^{-bt/2} \cos(\sqrt{c-b^2/4}t)$$

und

$$y_2 = \frac{1}{2i} e^{-bt/2} (e^{i\sqrt{c-b^2/4}t} - e^{-i\sqrt{c-b^2/4}t}) = e^{-bt/2} \sin(\sqrt{c-b^2/4}t).$$

### 9.3 Inhomogene Lösungen: Greenfunktionen

Wie findet man nun systematisch die physikalisch relevante Lösung für

$$y'' + by' + cy = f(t)$$

bei gegebenem  $f(t)$ ? Dabei soll das System, das durch die Differentialgleichung beschrieben wird, in Ruhe sein, bis es durch die äußere Inhomogenität  $f(t)$  gestört wird. Das bedeutet, wir suchen kausal sinnvolle Lösungen, in denen das System auf die äußere Ursache  $f(t)$  reagiert und diese Wirkung  $y(t)$  nach der Ursache auftaucht.

Physikalisch denken Sie am besten an einen extern angetriebenen gedämpften Oszillator. Eine mechanische Realisierung ist in Abb. 9.2 skizziert. Die zugehörige Gleichung lautet  $m\ddot{x} =$

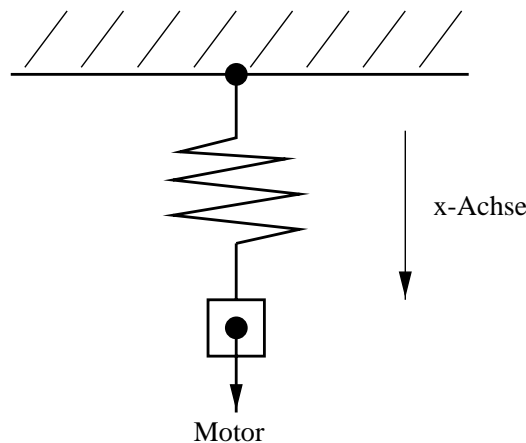


Abbildung 9.2: Mechanischer angetriebener gedämpfter Oszillator.

$F_{\text{Feder}} + F_{\text{Reibung}} + F_{\text{Motor}}$ , wobei  $F_{\text{Feder}} = -Dx = -m\omega_0^2 x$ ,  $F_{\text{Reibung}} = -\gamma\dot{x} = -(m/\tau)\dot{x}$  und  $F_{\text{Motor}} = mf(t)$  gilt. Setzt man ein und teilt durch  $m$  ergibt sich

$$\ddot{x} + (1/\tau)\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t),$$

wobei  $f(t)$  die extern treibende Inhomogenität darstellt. Wie lautet nun die Reaktion des Systems auf ein beliebiges  $f(t)$ ? Diese schwierige Frage kann wesentlich leichter behandelt werden, wenn man sie in zwei Teile aufteilt. Die Idee ist es, die Inhomogenität  $f(t)$  als Summe vieler kleiner Stöße aufzufassen. Die erste Teilfrage ist die nach der Reaktion des Systems auf einen Kraftstoß. Ein Kraftstoß soll beliebig kurz andauern, trotzdem aber einen gewissen Impuls  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt > 0$  übertragen. Physikalisch kann man an einen kurzen Schlag mit einem Hammer denken. Mathematisch benötigen wir die sogenannte  $\delta$ -Distribution. Da die Differentialgleichung linear ist, kann man die Gesamtreaktion des Systems als Summe der Teilreaktionen auf die vielen Kraftstöße hinschreiben. Das werden wir unten noch ausführen. Zuerst definieren wir die mathematische Idealisierung des Kraftstoßes.

**Definition 9.4 ( $\delta$ -Distribution).** Die  $\delta$ -Distribution (oft auch inkorrekt  $\delta$ -Funktion) ist definiert durch die Eigenschaft

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tilde{t})\psi(\tilde{t})d\tilde{t}$$

für alle genügend glatte Funktionen  $\psi(t)$ . Speziell gilt  $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tilde{t})d\tilde{t}$ .

Die oben angeführte Eigenschaft bedeutet, daß die  $\delta$ -Distribution  $\delta(t - \tilde{t})$  genau den Wert der Funktion  $\psi(t)$  bei  $\tilde{t} = t$  herausgreift. Auf alle anderen Werte ist sie unempfindlich. Daher kann man sie sich anschaulich als unendlich scharfen und unendlich hohen Peak vorstellen, unter dem die Fläche 1 zu finden ist, siehe Abb. 9.3a. Der Peak muß unendlich scharf sein, da nur der Wert der Funktion  $\psi(t)$  bei  $\tilde{t} = t$  zählt. Er muß unendlich hoch sein, da er sonst nicht die Fläche 1 haben kann. Wir erkennen, daß ein solcher Peak genau das darstellt, was wir unter einem Kraftstoß verstehen.

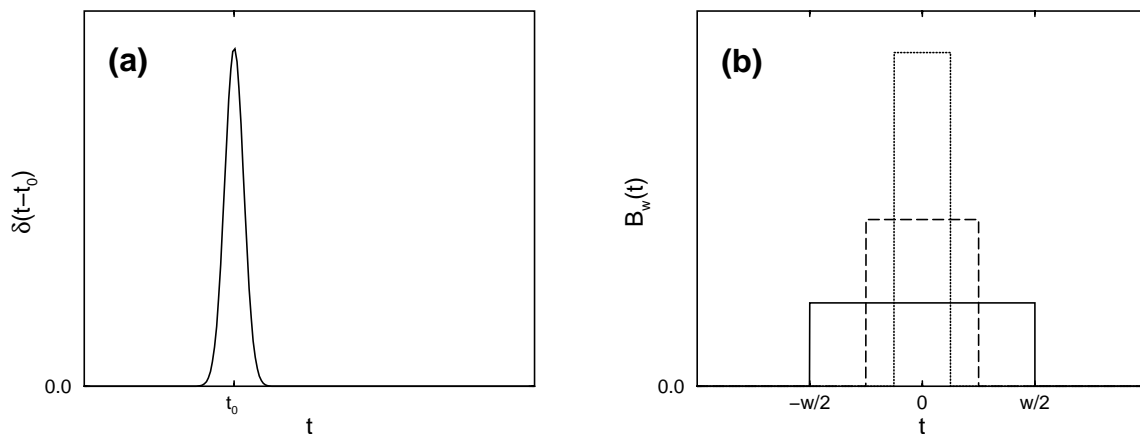


Abbildung 9.3: (a) Veranschaulichung der  $\delta$ -Distribution als unendlich scharfer und unendlich hoher Peak. (b) Eine Folge von Funktionen, die gegen die  $\delta$ -Distribution konvergieren.

Mathematisch ist auch klar, daß die  $\delta$ -Distribution selbst keine Funktion ist. Sie kann als Grenzwert einer Folge von Funktionen beschrieben werden, ohne selber eine zu sein. Solche Objekte heißen *Distributionen*.

**Beispiel 9.4.** Betrachte die Kastenfunktionen in Abb. 9.3b

$$B_w(t) := \begin{cases} 1/w & \text{für } |x| < w/2 \\ 0 & \text{für } |x| \geq w/2 \end{cases} .$$

Es gilt

$$\delta(t) = \lim_{w \rightarrow 0^+} B_w(t) ,$$

wobei  $w \rightarrow 0+$  bedeutet, daß  $w$  mit einer positiven Folge gegen 0 geschickt wird.<sup>16</sup> Für diese Gleichung muß man zeigen, daß zum Beispiel für eine differenzierbare Funktion  $\psi(t)$  gilt

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} B_w(t - \tilde{t}) \psi(\tilde{t}) d\tilde{t} &= \lim_{w \rightarrow 0+} \frac{1}{w} \int_{t-w/2}^{t+w/2} \psi(\tilde{t}) d\tilde{t} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0+} \frac{1}{w} \int_{t-w/2}^{t+w/2} (\psi(t) + \mathcal{O}(w)) d\tilde{t} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0+} \frac{1}{w} (w\psi(t) + \mathcal{O}(w^2)) \\ &= \psi(t) . \end{aligned}$$

In der Physik taucht die  $\delta$ -Distribution als Idealisierung auf. Mit ihr läßt sich ein Kraftstoß darstellen  $f(t) = p_0 \delta(t)$ , der den Impuls  $p_0$  in beliebig kurzer Zeit überträgt. Im Raum kann man die  $\delta$ -Distribution nutzen, um die Massendichte einer Punktmasse zu notieren. Unser Beispiel sei der Einfachheit halber eindimensional:  $\rho(x) = m_0 \delta(x - x_0)$  steht für eine Punktmasse  $m_0$  am Ort  $x_0$ . Die Beschreibung von Sachverhalten mittels  $\delta$ -Distributionen ist also in der Physik etwas sehr natürliches.

Kommen wir auf die Differentialgleichung zurück und nehmen wir an, daß wir eine Lösung für  $\ddot{g}(t) + (1/\tau)\dot{g}(t) + \omega_0^2 g(t) = \delta(t)$  kennen, die vor Auftauchen der Inhomogenität bei  $t = 0$  der Ruhelage entspricht, d.h.  $g(t < 0) = 0$ . Eine solche spezielle Lösung der Differentialgleichung nennen wir retardierte (“verzögerte”) Greenfunktion.

**Definition 9.5 (Greenfunktion, retardierte).** Die inhomogene spezielle Lösung  $g(t)$  einer linearen Differentialgleichung mit einer  $\delta$ -Distribution als Inhomogenität heißt Greenfunktion. Da die Antwort des Systems kausal immer nur *nach* der Ursache  $\delta(t - \tilde{t})$  liegen kann, betrachtet man die sogenannte retardierte Greenfunktion mit  $g(t < 0) = 0$  und

$$a_n g^{(n)}(t) + a_{n-1} g^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 g'(t) + a_0 g(t) = \delta(t) .$$

**Beispiel 9.5.** Wir wollen die retardierte Greenfunktion zu  $\ddot{x} + \omega_0^2 x$  konstruieren, d.h. wir wollen

$$\ddot{g} + \omega_0^2 g = \delta(t)$$

lösen. Integriert man die  $\delta$ -Distribution einmal (siehe Abb. 9.4), so erhält man eine Funktion mit Sprung der Höhe 1 bei  $t = 0$ , die Stufenfunktion

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tilde{t}) d\tilde{t} .$$

Eine weitere Integration liefert eine stetige Funktion, die nur noch einen Knick aufweist

$$t\theta(t) = \int_{-\infty}^t \theta(\tilde{t}) d\tilde{t} .$$

---

<sup>16</sup>Für Spezialisten sei angemerkt, daß die Konvergenz nur in einem schwachen Sinne, nämlich bezüglich der Skalarprodukte, d.h. Integrale mit anderen Funktionen, gilt.

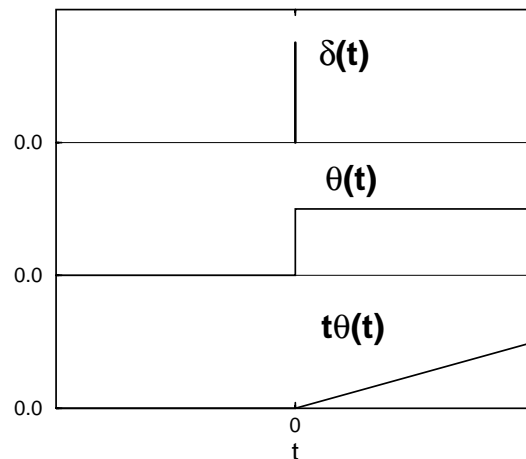


Abbildung 9.4: Die Integration der  $\delta$ -Distribution führt zur unstetigen Stufenfunktion  $\theta(t)$  mit Sprung; eine weitere Integration zur stetigen Funktion  $t\theta(t)$ , die nur noch einen Knick bei  $t = 0$  aufweist.

Umgekehrt gilt, daß die zweifache Ableitung einer Funktion mit Knick zu einer Funktion mit  $\delta$ -Distribution führt. Daraus lernen wir, daß die gesuchte Greenfunktion  $g(t)$  einen Knick, aber keinen Sprung, bei  $t = 0$  haben wird, so daß die zweite Ableitung  $\ddot{g}$  genau die benötigte  $\delta$ -Distribution erhält. Ansonsten entspricht  $g(t)$  einer homogenen Lösung, die wir schon kennen

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) & \text{für } t > 0 \end{cases} .$$

Da  $g(t)$  keinen Sprung bei  $t = 0$  haben soll, muß  $A = 0$  gelten. Die Ableitung soll einen Sprung der Höhe 1 haben, d.h.  $g'(0+) = B\omega_0 = 1$  erfordert  $B = 1/\omega_0$  und somit gilt

$$g(t) = \frac{\theta(t)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) .$$

Die Lösung ist in Abb. 9.5 skizziert.

Was lernen wir von der retardierten Greenfunktion für die Lösung der Differentialgleichung mit einer beliebigen Inhomogenität? Wir gehen davon aus, daß die Differentialgleichung konstante Koeffizienten hat. Dann hat eine verschobene Inhomogenität eine verschobene Systemantwort zur Folge. Gehört  $g(t)$  zu  $\delta(t)$ , so beschreibt  $g(t-\tilde{t})$  die Lösung zu  $\delta(t-\tilde{t})$ . Besteht die Inhomogenität aus einem Peak  $\alpha\delta(t)$  bei  $t = 0$  und einem Peak  $\beta\delta(t-\tilde{t})$  bei  $t = \tilde{t}$ , so ist die Systemantwort auf Grund der Linearität gegeben durch  $\alpha g(t) + \beta g(t-\tilde{t})$ . Führt man diesen Gedanken fort, so kommt man zur Lösung der Differentialgleichung bei beliebiger Inhomogenität, da man diese aus unendlich vielen  $\delta$ -Distributionen zusammensetzen kann

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tilde{t}) f(\tilde{t}) d\tilde{t} .$$

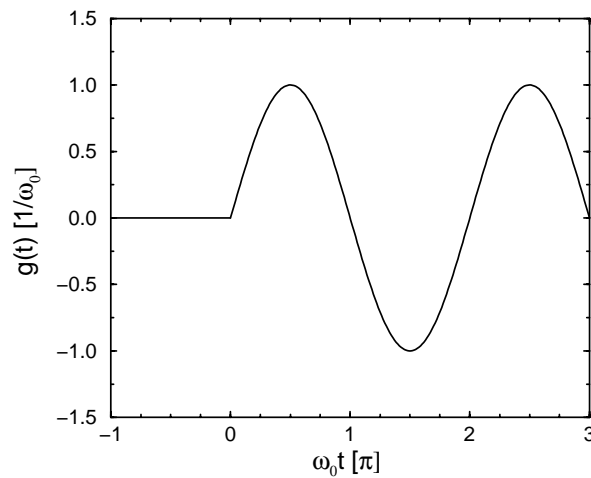


Abbildung 9.5: Die retardierte Greenfunktion des ungedämpften harmonischen Oszillators.

Die Lösung setzt sich aus den retardierten Greenfunktionen zusammen, die jeweils um  $\tilde{t}$  verschoben sind und mit dem Gewicht  $f(\tilde{t})$  eingehen

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tilde{t}) f(\tilde{t}) d\tilde{t} . \quad (9.1)$$

Dieses Integral stellt die Lösung für eine allgemeine Inhomogenität dar. Der Typ des Integrals heißt *Faltung*. Zwei Funktionen werden dadurch gefaltet, siehe obige Gleichung, daß über  $\mathbb{R}$  integriert wird, so daß die Summe der beiden Argumente konstant gleich einem vorgegebenem Wert ist.

**Beispiel 9.6.** Als ein Beispiel betrachten wir wieder den ungedämpften harmonischen Oszillator, dessen Greenfunktion wir schon berechnet haben. Die Inhomogenität sei ein Funktion, die bei  $t = 0$  mit einem endlichen Wert einsetzt und dann abklingt

$$f(t) = f_0 \exp(-t/t_0) \Theta(t) , \quad (9.2)$$

sie ist in Abb. 9.6a skizziert. Nach der allgemeinen Formel(9.1) gilt für die Systemantwort

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t - \tilde{t}) \sin(\omega_0(t - \tilde{t})) \Theta(\tilde{t}) \exp(-\tilde{t}/t_0) d\tilde{t} .$$

Die Stufenfunktionen begrenzen das Integrationsintervall. Die Stufe  $\Theta(t - \tilde{t})$  gibt nur einen Beitrag für  $t \geq \tilde{t}$ ; die Stufe  $\Theta(\tilde{t})$  gibt nur einen Beitrag für  $\tilde{t} \geq 0$ . Zusammengenommen brauchen wir also nur von 0 nach  $t$  zu integrieren. Wenn  $t$  negativ ist, gibt es gar keinen Beitrag

$$x(t) = \frac{f_0 \Theta(t)}{\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t - \tilde{t})) \exp(-\tilde{t}/t_0) d\tilde{t} .$$

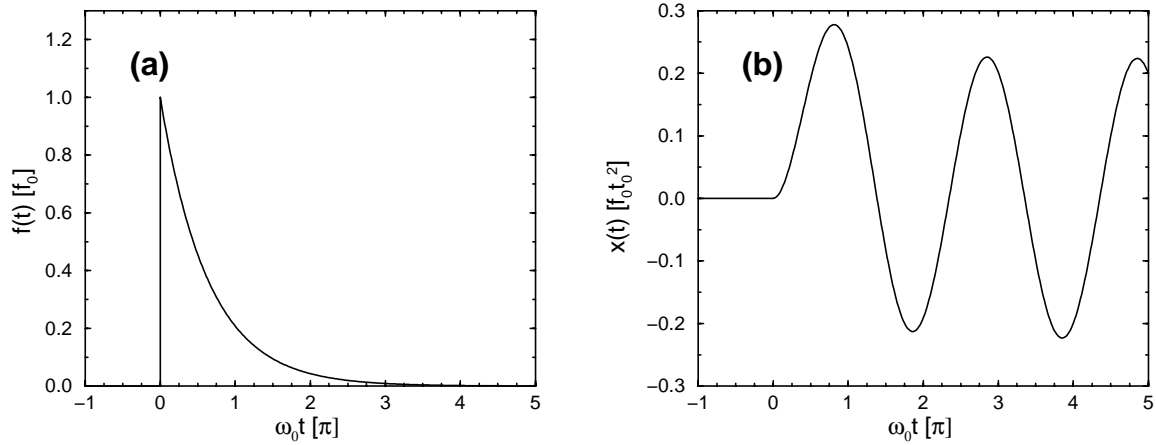


Abbildung 9.6: (a) Beispiel einer Inhomogenität nach Gleichung (9.2) mit  $\omega_0 t_0 = 2.0$ . (b) Die aus der in (a) gezeigten Inhomogenität resultierende Antwort des Systems, d.h. hier des harmonischen Oszillators, nach Gleichung (9.3).

Als nächstes wollen wir vermeiden, explizit ein Produkt aus Exponential- und Sinus-Funktion diskutieren zu müssen. Wir nutzen daher die Beziehung  $\sin(\omega_0(t - \tilde{t})) = \text{Im} \exp(i\omega_0(t - \tilde{t}))$ . Da alle anderen Faktoren und Bestandteile der Integration reell sind, kann man die Vorschrift, den Imaginärteil zu nehmen, ganz vor die Integration ziehen und erhält so

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{f_0 \Theta(t)}{\omega_0} \text{Im} \int_0^t \exp(i\omega_0(t - \tilde{t})) \exp(-\tilde{t}/t_0) d\tilde{t} \\
 &= \frac{f_0 \Theta(t)}{\omega_0} \text{Im} \exp(i\omega_0 t) \int_0^t \exp(-\tilde{t}(i\omega_0 + 1/t_0)) d\tilde{t} \\
 &= \frac{f_0 \Theta(t)}{\omega_0} \text{Im} \exp(i\omega_0 t) \left[ \frac{\exp(-\tilde{t}(i\omega_0 + 1/t_0))}{-(i\omega_0 + 1/t_0)} \right]_0^t \\
 &= \frac{-f_0 \Theta(t)}{\omega_0} \text{Im} \exp(i\omega_0 t) \frac{\exp(-t(i\omega_0 + 1/t_0)) - 1}{i\omega_0 + 1/t_0} \\
 &= \frac{-f_0 \Theta(t)}{\omega_0} \text{Im} \frac{\exp(-t/t_0) - \exp(i\omega_0 t)}{i\omega_0 + 1/t_0} .
 \end{aligned}$$

Nach den Standardregeln erhalten wir das obige Resultat. Um nun wirklich den Imaginärteil zu erhalten, machen wir den Nenner reell, indem wir den Bruch mit dem Komplex-Konjugierten



$-i\omega_0 + 1/t_0$  des Nenners erweitern

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-f_0 \Theta(t)}{\omega_0} \operatorname{Im} \frac{(\exp(-t/t_0) - \exp(i\omega_0 t))(-i\omega_0 + 1/t_0)}{\omega_0^2 + 1/t_0^2} \\ &= \frac{-f_0 \Theta(t)}{\omega_0} \operatorname{Im} \frac{-i\omega_0 \exp(-t/t_0) + i\omega_0 \exp(i\omega_0 t) + \exp(-t/t_0)/t_0 + \exp(i\omega_0 t)/t_0}{\omega_0^2 + 1/t_0^2} . \end{aligned}$$

Der erste Term des Zählers ist rein imaginär; vom zweiten Term brauchen wir nur den Realteil der Exponentialfunktion, d.h.  $\cos(i\omega_0 t)$ , der dritte Term ist rein reell und fällt daher weg; der vierte Term schließlich steuert den Imaginärteil der Exponentialfunktion, d.h.  $\sin(i\omega_0 t)$ , bei. Somit haben wir

$$x(t) = \frac{f_0 \Theta(t)}{\omega_0^2 + 1/t_0^2} \left( \exp(-t/t_0) + \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t_0} - \cos(\omega_0 t) \right) . \quad (9.3)$$

Das Ergebnis ist für exemplarische Werte in Abb. 9.6b gezeigt. Da der Kraftstoß  $f(t)$  für beliebig kleine Zeiten  $t > 0$  nur beliebig wenig Impuls überträgt, hat das System keine endliche Anfangsgeschwindigkeit, d.h.  $\dot{x}(t=0) = 0$ .

## 9.4 Schwingungsvorgänge nach Frequenz

Bisher haben wir die Schwingungsdifferentialgleichung untersucht, indem wir homogene Lösungen betrachtet haben oder die Reaktion auf einen Kraftstoß, mathematisch eine  $\delta$ -Distribution. Nun betrachten wir das andere Extrem, nämlich eine *lang andauernde* oszillierende Kraft mit fester, von einem externen Motor aufgeprägten, Frequenz  $\omega$

$$F(t) = m f(t) \quad \text{mit} \quad f(t) = f_0 \cos(\omega t) .$$

Dabei wollen wir von möglichen Einschwingvorgängen absehen. Das bedeutet, daß wir so lange warten, bis alle Eigenschwingungen, mathematisch homogene Lösungen, mit Frequenzen  $\approx \omega_0$  abgeklungen sind.<sup>17</sup>

Zu lösen ist

$$\ddot{x} + (1/\tau)\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) .$$

Besonders elegant wird die Lösung durch einen Umweg über komplexe Lösungen  $z(t)$ . Wir betrachten

$$\cos(\omega t) = \operatorname{Re} \exp(i\omega t) \quad \text{und} \quad x(t) = \operatorname{Re} z(t) .$$

Dieser Trick funktioniert, da die Differentialgleichung, d.h. ihre Koeffizienten, reell sind. Deswegen gilt, daß der Realteil der Differentialgleichung gleich der Differentialgleichung des Realteils ist. Nunmehr lösen wir

$$\ddot{z} + (1/\tau)\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 \exp(i\omega t) . \quad (9.4)$$

---

<sup>17</sup>Es gibt hier einen subtilen Punkt, wenn der Oszillator überhaupt gar nicht gedämpft ist. Dann würden Eigenschwingungen, die irgendwann einmal erzeugt wurden, nie abklingen und immer präsent sein. Wir umgehen diese Subtilität dadurch, daß wir uns mindestens ein ganz leicht gedämpftes System vorstellen. Das ungedämpfte System betrachten wir dann als Grenzfall eines gedämpften Systems, dessen Dämpfung gegen Null geschickt wurde.

Da wir alle homogenen Lösungen als abgklungen betrachten wollen, siehe oben, setzen wir eine spezielle Lösung an, die genau dieselbe Frequenz hat wie die antreibende Kraft. Der Ansatz ist

$$z(t) = a \exp(i\omega t) ,$$

wobei  $a$  eine komplexe Zahl sein kann und im Allgemeinen auch sein wird. Mit diesem Ansatz erhalten wir aus der Differentialgleichung (9.4) die algebraische Gleichung

$$a \exp(i\omega t) (-\omega^2 + i\omega/\tau + \omega_0^2) = f_0 \exp(i\omega t) ,$$

die unmittelbar zu

$$a = R(\omega) f_0 \quad \text{mit} \quad R(\omega) := \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau}$$

führt. Die hierbei definierte Funktion  $R(\omega)$  heißt *Antwortfunktion* oder auch *Responsefunktion*. Allgemein beschreibt eine Antwortfunktion die Langzeitantwort eines Systems auf eine periodische äußere Erregung.

Wie ist  $R(\omega)$  zu interpretieren?

Sei  $\varphi := -\arg(R(\omega))$ , also  $R(\omega) = |R|e^{-i\varphi}$ , dann gilt für die physikalische Reaktion auf  $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$

$$x(t) = \operatorname{Re}z(t) = \operatorname{Re}R(\omega) f_0 e^{i\omega t} = \operatorname{Re}|R(\omega)| f_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = f_0 |R(\omega)| \cos(\omega t - \varphi) .$$

Der Betrag von  $R(\omega)$  gibt also an, wie groß die auftretenden Oszillationen sind. Der Winkel  $\varphi$ , das negative Argument von  $R$ , gibt an, um welche Phase die Systemantwort gegenüber der Erregung verschoben ist, siehe Abb. 9.7. Es handelt sich bei  $\varphi$  also um eine *Phasenverschiebung*.

Somit wissen wir formal alles über die Reaktionen eines schwingungsfähigen Systems auf eine äußere periodische Kraft. Wir berechnen

$$|R|^2 = RR^* = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} .$$

Die Phase erhält man aus

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{|R|^{-1} \sin \varphi}{|R|^{-1} \cos \varphi} = \frac{\operatorname{Im}R^{-1}}{\operatorname{Re}R^{-1}} = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} , \quad (9.5)$$

wobei wir im vorletzten Schritt verwendet haben, daß das Argument einer inversen komplexen Zahl  $1/z$  das negative Argument dieser Zahl  $z$  ist:  $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$ . Das folgt sofort aus der Polardarstellung  $z = |z| \exp(i\arg(z))$  und  $z^{-1} = |z|^{-1} \exp(-i\arg(z))$ . Beachte, daß  $\varphi$  in der Tat als das negative Argument von  $R$  definiert worden war.

Wie sehen diese Funktionen aus?

Diskutieren wir zuerst den Betrag  $|R|$  der Antwortfunktion. Für  $\omega = 0$  folgt  $|R| = 1/\omega_0^2$ . Für  $\omega \rightarrow \infty$  folgt  $|R| \approx 1/\omega^2$ . Für mittlere Frequenzen  $\omega \approx \omega_0$  nimmt  $R$  ein Maximum an, wenn

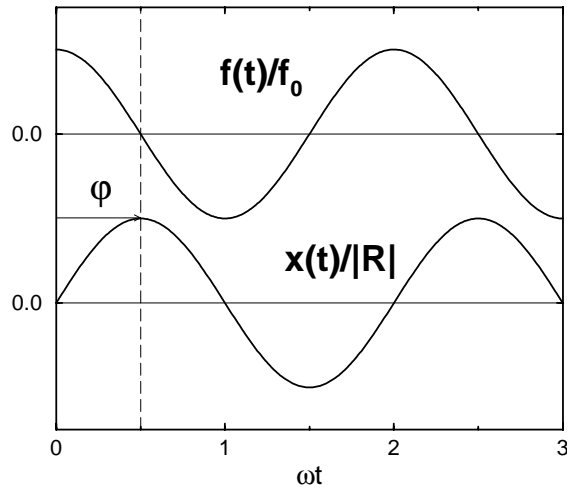


Abbildung 9.7: Vergleich der externen Anregung und der Systemantwort. Nach langer Zeit zeigt die Systemantwort genau dieselbe Frequenz bzw. Periodizität wie die Anregung. Jedoch ist die Antwort um  $\varphi = \omega \Delta t$  phasenverschoben.

die Dämpfung  $1/\tau$  nicht zu groß ist. Dieses Maximum der Systemantwort heißt *Resonanz*, da es auftritt, wenn die extern aufgeprägte Frequenz der Frequenz der Eigenschwingungen, d.h. der homogenen Lösungen, entspricht. Das Maximum von  $|R|$  entspricht einem Minimum von  $1/|R|^2$ . Dieses Minimum finden wir durch Nullsetzen der Ableitung nach  $y := \omega^2$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dy} ((\omega_0^2 - y)^2 + y/\tau^2) = -2(\omega_0^2 - y) + 1/\tau^2 .$$

Auflösen nach  $y$  liefert

$$\omega_{\text{res}}^2 = y = \omega_0^2 - 1/(2\tau^2) \quad \Rightarrow \quad \omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 1/(2\tau^2)} .$$

Die Frequenz, bei der das System am heftigsten auf die äußere Kraft reagiert, heißt *Resonanzfrequenz*. Das Phänomen, daß die Stärke der Systemantwort sehr deutlich von der Anregungsfrequenz abhängt, heißt *Resonanz*. Es ist in Abb. 9.8a illustriert.<sup>18</sup>

Der Tangens der Phase, siehe Gleichung (9.5), beträgt bei  $\omega = 0$  ebenfalls Null und somit ist die Phase  $\varphi = 0$ . Anregung und Systemantwort sind bei kleinen Frequenzen also in Phase. Bei  $\omega = \omega_0$  wird der Tangens unendlich, da der Nenner verschwindet. Der Tangens divergiert gegen  $+\infty$  bei  $\varphi \rightarrow \pi/2-$ , so daß es zu dem in Abb. 9.8b gezeigten Verhalten kommt. In der Nähe der Resonanz ist die Systemantwort gegen die Anregung also ungefähr um  $\pi/2$ , d.h.  $90^\circ$ , verschoben.

<sup>18</sup>Wir diskutieren hier den schwach gedämpften Fall. Bei starker Dämpfung gibt es kein Maximum in  $|R|$  und das Resonanzphänomen tritt nicht auf.

Für größere Frequenzen  $\omega > \omega_0$  ist der Tangens negativ, was Werte der Phasenverschiebung  $\varphi$  im Intervall  $[\pi/2, \pi]$  zur Folge hat. Für  $\omega \rightarrow \infty$  geht der Tangens von negativen Werten nach Null, so daß  $\varphi$  von unten gegen  $\pi$  strebt, siehe Abb. 9.8b. Ist die Anregungsfrequenz also sehr groß, bewegen sich Anregung und Antwort in Gegenphase: Will die äußere Kraft den Körper nach oben schieben, so bewegt er sich gerade nach unten und umgekehrt.

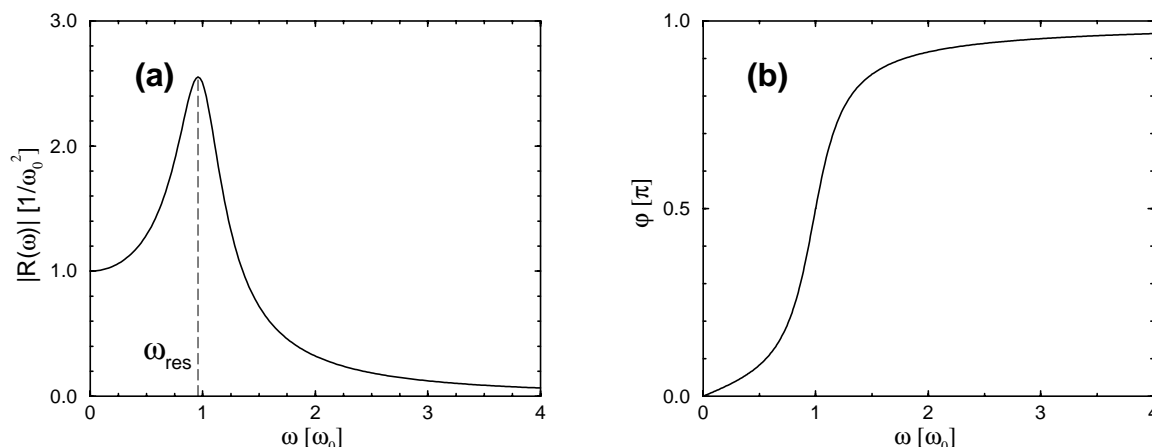


Abbildung 9.8: (a) Verhalten des Betrags der Antwortfunktion. Deutlich erkennbar ist das Resonanzverhalten mit sehr starker Antwort bei  $\omega \approx \omega_0$  für nicht zu große Dämpfung. Die Dämpfung beträgt hier  $1/(\tau\omega_0) = 0,4$ . (b) Verhalten der Phasenverschiebung  $\varphi$  als Funktion der Anregungsfrequenz. Die Phasenverschiebung  $\varphi$  variiert von 0 (in Phase) bei  $\omega = 0$  über  $\pi/2$  bei  $\omega = \omega_0$  zu  $\pi$  (in Gegenphase) bei  $\omega \rightarrow \infty$ . Die Dämpfung beträgt in den gezeigten Daten  $1/(\tau\omega_0) = 0,4$ .

**Leistung** Als Letztes wollen wir die aufgenommene Leistung berechnen. Diese Größe wird in vielen Experimenten, z.B. bei der Absorption von Licht, gemessen. Man kann sich vorstellen, daß das von außen in die Probe eingestrahlte Licht als anregender Motor für verschiedene schwingfähige Systeme wirkt. Die Messung der Menge des von der Probe verschluckten Lichts, also der Absorption, als Funktion der Frequenz gibt Aufschluß darüber, bei welchen Frequenzen es schwingfähige Systeme in der Probe gibt. Auf diese Art kann man etwas über die Probe lernen.

Die aufgenommene Leistung  $P(t)$  ist gegeben durch das Produkt von Geschwindigkeit und Kraft, siehe Gleichung (4.1),

$$P(t) = F(t)v(t) = mf_0^2|R| \cos(\omega t) \left( \frac{d}{dt} \cos(\omega t - \varphi) \right) = -mf_0^2|R| \cos(\omega t)\omega \sin(\omega t - \varphi) .$$

Man erkennt, daß die Leistung auch mit der Frequenz  $\omega$  variiert. Diese Variation ist aber nicht wirklich interessant; man mißt sie auch nicht bei typischen Experimenten, da das eine sehr hohe

Zeitauflösung bedeuten würde. Tatsächlich reicht es, die mittlere Leistung  $\bar{P}$  zu kennen. Um diese zu berechnen, mitteln wir über eine Schwingungsperiode  $T = 2\pi/\omega$

$$\bar{P}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Wir finden, daß die gemittelte Leistung  $\bar{P}$  *nicht* von der Zeit abhängt, d.h. zeitlich konstant ist. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos(\omega\tilde{t}) \sin(\omega\tilde{t} - \varphi) d\tilde{t} &= \frac{1}{4iT} \int_t^{t+T} (e^{i\omega\tilde{t}} + e^{-i\omega\tilde{t}})(e^{i\omega\tilde{t}-i\varphi} - e^{-i\omega\tilde{t}+i\varphi}) d\tilde{t} \\ &= \frac{1}{4iT} \left[ e^{-i\varphi} - e^{i\varphi} + \frac{1}{2i\omega} e^{2i\omega\tilde{t}-i\varphi} + \frac{1}{2i\omega} e^{-2i\omega\tilde{t}+i\varphi} \right]_t^{t+T} \\ &= \frac{-1}{2} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme der vorletzten Zeile geben *keinen* Beitrag, da sie an der Obergrenze und der Untergrenze gleich sind und sich ihre Beiträge daher wegheben. Die beiden ersten Terme in der vorletzten Zeile hingegen sind konstant, da sich in ihnen die Abhängigkeit von  $\tilde{t}$  weggekürzt hat. Aus ihnen ergibt sich der von  $t$  unabhängige Beitrag in der letzten Zeile.

Es folgt für die aufgenommene Leistung

$$\bar{P} = m f_0^2 \frac{\omega}{2} |R| \sin \varphi = -m f_0^2 \frac{\omega}{2} \text{Im} R(\omega),$$

daß sie im Wesentlichen (bis auf einen Faktor  $\omega$ ) proportional zum Imaginärteil der Antwortfunktion ist. Das ist eine ganz allgemeine Eigenschaft von Antwortfunktionen.

Liegt schwache Dämpfung vor, d.h. es gilt  $1/\tau \ll \omega_0 \Leftrightarrow \tau\omega_0 \gg 1$ , so kann man in der Nähe der Resonanz  $\omega \approx \omega_0$  wie folgt nähern  $\Delta\omega := \omega - \omega_0, \omega \approx \omega_0$  und  $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$ . Das bedeutet, daß nur die Abweichung von der Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators relevant ist. Die Rechtfertigung für diese Näherung sieht man in den Abbildungen 9.8. Nur in der Nähe von  $\omega_0$  ändern sich die betrachteten Größen signifikant. Mit der Näherung erhält man

$$R(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) + i\omega/\tau} \approx \frac{1}{2\omega_0} \frac{1}{\Delta\omega + i/2\tau}$$

und somit

$$\omega \text{Im} R(\omega) \approx \frac{1}{2} \frac{-1/(2\tau)}{\Delta\omega^2 + 1/(4\tau^2)}.$$

Daraus folgt für die gemittelte Leistung

$$\bar{P} = \frac{\pi m f_0^2}{4} L_{1/(2\tau)}(\Delta\omega),$$

wobei wir die *Lorentzfunktion*

$$L_\eta(x) := \frac{\eta/\pi}{x^2 + \eta^2}$$

eingeführt und verwendet haben, sie ist in Abb. 9.9 gezeigt. Die Lorentzkurve stellt das typische Verhalten bei einer Resonanz dar. Wir haben sie so normiert, daß die Fläche unter ihr gleich 1 ist. Die Kenngrößen sind die genaue Position (Bei welcher Frequenz tritt Resonanz auf?), die volle Breite  $2\eta$  in halber Höhe<sup>19</sup> (Wie scharf ist die Resonanz?) und das Gesamtgewicht in der Resonanz, das ist die Gesamtfläche unter der Resonanzkurve.

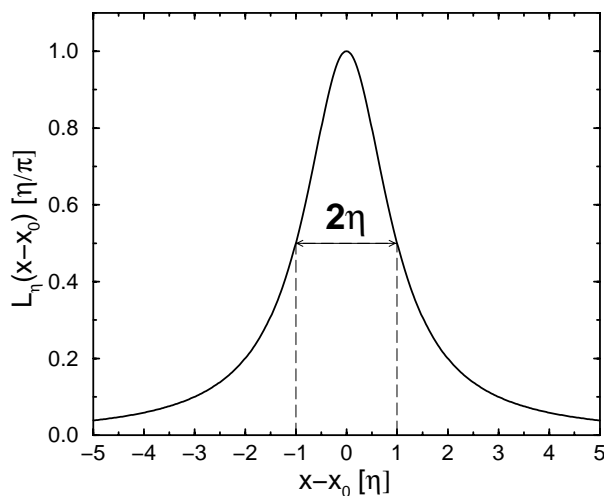


Abbildung 9.9: Kurve der Lorentzfunktion  $L_\eta(x - x_0)$  mit den Kenngrößen Position  $x_0$  und Breite FWHM=  $2\eta$ . Die Fläche unter der Lorentzkurve ist üblicherweise auf 1 normiert.

Im Fall des gedämpften harmonischen Oszillators sind diese Kenngrößen der Resonanz gegeben durch die Position  $\omega_0$ , die Breite  $1/\tau$  und das Gesamtgewicht  $\pi m f_0^2/4$ .

Resonanzverhalten in Form einer Lorentzkurve ist in der Physik sehr weit verbreitet, da man überall schwingungsfähige Systeme antrifft: in der Atom- und Molekülphysik, der Kernphysik, der Festkörperphysik, der Hochenergiephysik usw..

Eine abschließende Beobachtung ist, daß die Lorentzkurven für verschwindende Breite gegen die  $\delta$ -Distribution konvergieren

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} L_\eta(x) = \delta(x) .$$

Diese Darstellung einer  $\delta$ -Distribution ist in der Physik weitverbreitet.

<sup>19</sup>In den englischsprachigen Artikeln “full width half maximum” und kurz FWHM.