

Vorlesung über

Klassische Mechanik

(Theoretische Physik I)

gehalten von

M. Zirnbauer

Universität zu Köln, Wintersemester 2000/01

gesetzt in TEX von Mariela Boevska

Literatur:

F. Scheck, *Mechanik*, Springer-Verlag 1988

V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag 1978

N. Straumann, *Klassische Mechanik*, Springer (Lect. Notes Phys. vol 289) 1987

Vorwort

Die Vorlesung über Mechanik ist die erste innerhalb eines viersemestrigen Kurses in der Theoretischen Physik, in dessen weiteren Verlauf Elektrodynamik, Quantenmechanik und Statistische Physik gelehrt werden. Daß die klassische Mechanik am Anfang des Kurses steht, reflektiert nicht nur die historische Entwicklung der Physik, sondern ist auch inhaltlich sinnvoll. In dieser Vorlesung werden viele physikalische und mathematische Grundlagen erarbeitet: Struktur der Raum–Zeit, Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen, qualitatives Verhalten von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Lie–Gruppen, usw.

Zum Gültigkeitsbereich der klassischen Mechanik:

Wie jede physikalische Theorie stellt die klassische Mechanik eine mathematische Idealisierung dar. Mit dieser Einschränkung liefert sie jedoch eine “richtige” Beschreibung eines großen Bereichs von Ergebnissen experimenteller Beobachtung. Auf atomaren Skalen ist die klassische Mechanik durch die Quantenmechanik zu ersetzen. Bei Prozessen mit Geschwindigkeiten von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit ist die Galilei–Raum–Zeit der klassischen Mechanik durch die Minkowski–Raum–Zeit der speziellen Relativitätstheorie zu ersetzen. In Raum–Zeit–Gebieten mit sehr starken Gravitationsfeldern sind physikalische Prozesse im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie zu beschreiben.

Inhaltsverzeichnis

1	Newton'sche Mechanik	3
1.1	Affine und Euklidische Räume	3
1.2	Galilei-Raum-Zeit	5
1.3	Galilei-Transformationen	7
1.4	Newton'sche Bewegungsgleichungen	10
1.5	Abgeschlossenes N -Körpersystem: Erhaltungssätze	13
1.6	Allgemeines über Differentialgleichungen	16
1.6.1	Lokale Flüsse	21
1.6.2	Picard-Abbildung	23
1.6.3	Erste Integrale	24
1.7	Autonome Hamilton'sche Systeme mit einem Freiheitsgrad	25
1.8	Das Zweikörper-Problem mit Zentralkräften	29
1.8.1	Untersuchung der Bahnkurven	31
1.8.2	Kepler-Problem	32
2	Lagrange-Mechanik	35
2.1	Variationsrechnung	35
2.2	Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichungen	38
2.2.1	Invarianz unter Punkttransformationen	41
2.3	Symmetrien und Erhaltungssätze	43
2.4	Zwangsbedingungen	46
2.4.1	Begründung der Gebrauchsanweisung	50
2.5	Kleine Schwingungen	52
2.5.1	Gleichgewichtslagen	53
2.5.2	Stabilität von Gleichgewichtslagen	53
2.5.3	Linearisierung	54
2.5.4	Normalschwingungen	55

2.5.5	Beispiel: Gekoppelte Pendel mit verschiedenen Massen, gleichen Längen.	58
2.6	Parametrische Resonanz	59
3	Starre Körper	63
3.1	Exkurs über die Drehgruppe	63
3.2	Kinematik des starren Körpers	68
3.2.1	Winkelgeschwindigkeit	70
3.3	Trägheitstensor	71
3.4	Der freie Kreisel: geometrische Konstruktion	74
3.5	Die Eulerschen Gleichungen	76
3.5.1	Symmetrischer Kreisel	77
3.5.2	Unsymmetrischer Kreisel	79
3.6	Die Eulerschen Winkel	80
3.7	Der schwere symmetrische Kreisel	83
4	Hamiltonsche Formulierung der Mechanik	87
4.1	Legendre–Transformation	87
4.1.1	Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Veränderlicher	89
4.2	Die kanonischen Gleichungen	91
4.3	Die Symplektische Gruppe $Sp(2f)$	94
4.4	Hamiltonsche Systeme	97
4.4.1	Der klassische Spin	98
4.4.2	Satz von Darboux	100
4.4.3	Elektronen im starken Magnetfeld	101
4.5	Kanonische Transformationen	102
4.6	Hamiltonsche Flüsse	104
4.7	Symmetrien und Erhaltungssätze	107
4.8	Die Poisson–Klammer	110
4.8.1	Koordinatendarstellung der Poisson–Klammer	111
4.8.2	Woher kommt die symplektische Struktur?	112
4.9	Liouvillescher Satz	113
4.9.1	Poincaréscher Wiederkehrsatz	114
4.9.2	Beschleunigerphysik	115
4.10	Die Integralinvariante von Poincaré–Cartan	116
4.10.1	Das Stokessche Lemma	117
4.10.2	Kanonische Gleichungen	119

4.10.3	Koordinatenwechsel in den kanonischen Gleichungen	121
4.10.4	Reduktion der Ordnung für autonome Systeme	122
4.10.5	Erzeugende Funktionen	124
5	Stabilität und Chaos	127
5.1	Wirkungs- und Winkelvariable	128
5.2	Kanonische Störungsrechnung	131
5.3	Adiabatische Invarianz der Wirkungsvariable	136
5.4	Integrable Systeme	140
5.4.1	Die Lie-Algebra der Hamiltonschen Funktionen und der Hamiltonschen Vektorfelder	141
5.4.2	Definition integrierbarer Systeme	146
5.4.3	Quadratur integrierbarer Systeme	148
5.4.4	Einführung von Winkel- und Wirkungsvariablen	151
5.5	KAM-Theorem	153
5.6	Poincaré-Abbildung	156
5.7	Poincaré-Birkhoff-Theorem	162
5.8	Heteroklinische Oszillation	165
A		171
A.1	Symplektische Vektorräume	171
A.2	Alternierende k -lineare Formen	172
A.3	Operationen auf Differentialformen	173
A.4	Zurückziehen von Formen	176
A.5	Raumwinkelform auf S^2	177
A.6	Lie-Ableitung	178
A.7	Nachhilfeunterricht	180
A.7.1	Linearformen	180
A.7.2	Das Differential einer Funktion	181
A.7.3	Symplektische Struktur	182
A.7.4	Konstruktion von $X = IdH$	183
A.8	Reduktion des Phasenraumes	184
A.8.1	Ableitung der Eulerschen Gleichungen	185
A.8.2	Einführung einer symplektischen Struktur	186

Kapitel 1

Newton'sche Mechanik

In diesem Kapitel beschreiben wir die der klassischen Mechanik zugrundeliegende Raum-Zeit-Struktur und deren Invarianzgruppe, die sogenannte Galilei-Gruppe. Wir formulieren die Newton'schen Gesetze und leiten einige Konsequenzen her (nämlich die Erhaltungssätze für das abgeschlossene N -Teilchensystem). Außerdem führen wir eine erste qualitative Analyse der Bewegungsgleichungen durch, welche noch keinen Gebrauch von dem erweiterten mathematischen Formalismus späterer Kapitel macht.

1.1 Affine und Euklidische Räume

DEFINITION 1.1 *Ein (n -dimensionaler) affiner Raum ist ein Tripel $(M, V, +)$, bestehend aus einer Menge M , einem reellen Vektorraum V (der Dimension n) und einer Operation $+$ ("Addition"),*

$$\begin{aligned} + : \quad & V \times M \rightarrow M, \\ & (v, A) \mapsto v + A \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

$$(1) \quad (v + w) + A = v + (w + A) \quad (v, w \in V; A \in M).$$

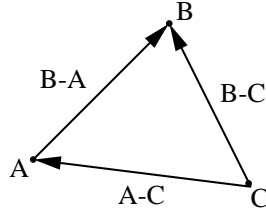
$$(2) \quad v + A = A \Leftrightarrow v = 0 \quad (v \in V; A \in M).$$

$$(3) \quad \text{Zu jedem Paar } A, B \in M \text{ existiert ein } v \in V \text{ mit } B = v + A.$$

Die Elemente von M heißen "Punkte", jene von V "Vektoren". V heißt auch der "Differenzraum" zu M .

Bemerkungen: Addition von Vektor zu Punkt wird mit demselben Symbol notiert wie Addition von Vektoren. Addition von Punkten ist **nicht** erklärt.

Wir bezeichnen den nach (2) eindeutigen Vektor v von (3) mit $B - A$. Beachte, daß aus der Definition folgt $B - A = (B - C) - (A - C)$ für $A, B, C \in M$. Graphisch:



DEFINITION 1.2 Ein **affines Koordinatensystem** $\{O; e_1, \dots, e_n\}$ besteht aus einem ausgewählten Punkt $O \in M$ ("Koordinatenursprung") und einer Basis e_1, \dots, e_n von V . Die durch

$$A - O = \sum_{i=1}^n x^i e_i$$

einem Punkt $A \in M$ zugeordneten Zahlen x^1, \dots, x^n heißen **affine Koordinaten** von A bezüglich $\{O; e_1, \dots, e_n\}$.

DEFINITION 1.3 Die Einführung einer positiv definiten Bilinearform $\langle \bullet, \bullet \rangle$ ("Skalarprodukt") auf dem Vektorraum V eines affinen Raums $(M, V, +)$ macht V zu einem **Euklidischen Vektorraum** und M zu einem **Euklidischen Raum**. Der **Abstand** zweier Punkte $A, B \in M$ ist erklärt durch $d(A, B) := |B - A|$, wobei $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für $v \in V$.

DEFINITION 1.4 Ein **kartesisches Koordinatensystem** ist ein affines Koordinatensystem $\{O; e_1, \dots, e_n\}$ mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Seien x^i und y^j die Koordinaten von A bzw. $B \in M$ bezüglich eines solchen Systems. Dann gilt:

$$d(A, B) = |(B - O) - (A - O)| = \left| \sum_{i=1}^n (x^i - y^i) e_i \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}.$$

Da $d(A, B)$ von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist, folgt dasselbe für $\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2$.

1.2 Galilei–Raum–Zeit

Das mathematische Modell für Raum und Zeit, welches der klassischen Mechanik zugrundeliegt, ist die sogenannte Galilei–Raum–Zeit. Sie wird zunächst in Worten und dann in Formeln mathematisch präzise beschrieben.

Da (im Gültigkeitsbereich der klassischen Mechanik) die Gesetze der Euklidischen Geometrie gelten, liegt es nahe als Modell für den “realen Raum” den dreidimensionalen Euklidischen Raum zu nehmen. (Beispiel: eines der Gesetze der Euklidischen Geometrie besagt, daß sich die Winkel in einem Dreieck zu 180° summieren. Diese Gesetzmäßigkeit wurde erstmals von Gauß überprüft, der gute Übereinstimmung mit der Beobachtung fand.) “Zeit” ist eindimensional und wird durch die reelle Zahlenachse modelliert. Raum und Zeit werden zur sogenannten “Raum–Zeit” zusammengefaßt, deren Elemente “Welpunkte” oder “Ereignisse” heißen. Beispiele für Ereignisse sind :

auf mikroskopischen Skalen: die Erzeugung eines Teilchens,

auf humanen Skalen: das Aufleuchten einer Lampe,

auf kosmischen Skalen: die Explosion einer Supernova.

Nach dem **Trägheitsgesetz** (“1. Newtonsches Gesetz”) “verharrt jeder Körper in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern” (Newton 1687).

Die durch das Trägheitsgesetz ausgezeichnete Rolle der **gleichförmig geradlinigen** Bewegung legt es nahe zu postulieren, daß die reale Raum–Zeit die Struktur eines vierdimensionalen **affinen** Raums hat. (Siehe dazu auch noch unten.) Per Postulat kommt der Zeit eine **absolute** (oder **objektive**) Bedeutung zu. Konkret heißt dies, daß, wenn zwei Ereignisse für nur **einen** Beobachter gleichzeitig stattfinden, sie das dann für **alle** Beobachter tun. Dieses Postulat entspringt dem “gesunden Menschenverstand” (der hier jedoch irrt, wie man in der speziellen Relativitätstheorie lernt). Raum hingegen ist **nicht absolut**. Der räumliche Abstand zweier (nichtgleichzeitiger) Ereignisse ist nicht beobachterunabhängig definierbar. Beachte auch, daß es nicht sinnvoll ist, von einem “Zustand absoluter Ruhe” zu sprechen. Erfahrungsgemäß ist es einem Beobachter in einem abgeschlossenen Behältnis (“Fahrstuhl”) nicht möglich festzustellen, ob er sich in Ruhe befindet oder gleichförmig geradlinig bewegt. (Siehe auch das weiter unten formulierte **Galileische Relativitätsprinzip**.) Das Gesagte wird durch die folgende Definition präzisiert.

DEFINITION 1.5 *Eine Galilei–Raum–Zeit ist ein vierdimensionaler affiner Raum*

$(M, V, +)$ mit den zusätzlichen Eigenschaften

- (1) auf V existiert eine ausgezeichnete Linearform τ ,
- (2) der Kern von τ , $V_0 := \{v \in V \mid \tau(v) = 0\}$, ist ein Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle$.

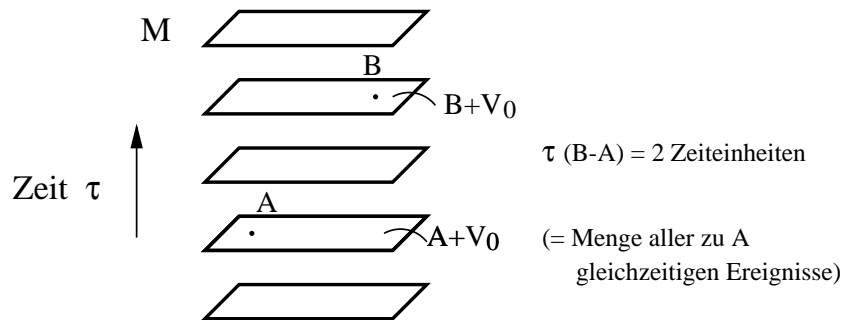
Erläuterungen zu Definition 1.5:

Die Anwendung von τ (=“absolute Zeit”) auf den Differenzvektor $B - A$ zweier Ereignisse $A, B \in M$ ergibt gerade die **objektive** (d.h. beobachterunabhängige) Zeitdifferenz zwischen A und B . Vermittels der Äquivalenzrelation

$$A \sim B \Leftrightarrow \tau(B - A) = 0$$

(d.h. $B = v + A$ mit $v \in V_0$) wird M durch τ in Äquivalenzklassen eingeteilt. Diese sind die Untermengen **gleichzeitiger Ereignisse**. Der durch (2) eingeführte Unterraum $V_0 \subset V$, der die Äquivalenzklassen gleichzeitiger Ereignisse aufspannt, ist dreidimensional und isomorph zum Euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 . Er ist das mathematische Modell für den in die Raum-Zeit eingebetteten “Raum”.

Graphische Veranschaulichung:



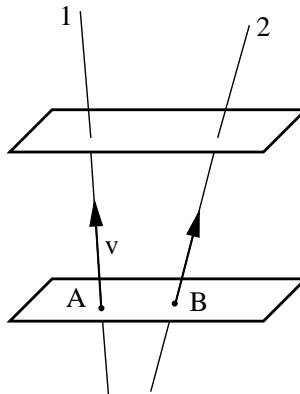
(τ legt außerdem die kausale Struktur der Galilei-Raum-Zeit fest: ein Ereignis A kann auf ein Ereignis B nur dann Einfluß nehmen, wenn gilt $\tau(B - A) \geq 0$.)

DEFINITION 1.6 Gleichförmig geradlinige Bewegung ist eine Abbildung ($A \in M, v \in V, \tau(v) \neq 0$):

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow M, \\ s &\mapsto sv + A. \end{aligned}$$

Beachte, daß nicht entscheidbar ist, ob ein Vektor $v \in V$ “senkrecht” auf V_0 steht oder nicht. (Wir haben nämlich keine mathematische Operation zur Hand, die uns

solches entscheiden ließe! Das Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle$ ist ja nur auf V_0 definiert.) Daher besteht kein qualitativer Unterschied zwischen den beiden gleichförmig geradlinigen Bewegungen 1 und 2 in der folgenden Figur:



Insbesondere existiert kein “Zustand absoluter Ruhe”.

Der Umstand, daß gleichförmig geradlinige Bewegung koordinatenfrei definierbar ist, gestattet eine koordinatenfreie (und somit mathematisch befriedigende) Formulierung des **Trägheitsgesetzes** (1. Newtonsches Gesetz):

Kräftefreie Bewegung ist gleichförmig geradlinig.

1.3 Galilei-Transformationen

DEFINITION 1.7 Die Gruppe aller Transformationen, die die Struktur der Galilei-Raum-Zeit invariant lassen, heißt **Galilei-Gruppe**. Die Elemente der Galilei-Gruppe heißen **Galilei-Transformationen**.

Im folgenden werden wir die Galilei-Gruppe untersuchen. Zu diesem Zweck ist eine spezielle Klasse von Koordinatensystemen besonders gut geeignet: die Galilei-Systeme.

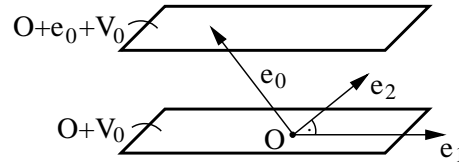
DEFINITION 1.8 Ein affines Koordinatensystem $\{O; e_0, e_1, e_2, e_3\}$ einer Galilei-Raum-Zeit $(M, V, +, \tau, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ heißt **Galilei-System** (oder *Galileisches Koordinatensystem*), wenn für die Basisvektoren e_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) gilt

$$(1) \quad \tau(e_1) = \tau(e_2) = \tau(e_3) = 0 \quad (\text{d.h. } e_i \in V_0 \text{ für } i = 1, 2, 3),$$

$$(2) \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$(3) \quad \tau(e_0) = \pm 1.$$

Graphische Veranschaulichung:



(Wir nennen Galilei-Systeme manchmal "Inertial-Systeme". Dieser Sprachgebrauch ist jedoch nicht eindeutig, da der Begriff "Inertialsystem" auch in der speziellen Relativitätstheorie verwendet wird und dort eine veränderte Bedeutung hat.)

Bemerkung: Definitionen 1.7 und 1.8 implizieren insbesondere, daß Galilei-Transformationen die Eigenschaft haben, Galilei-Systeme auf Galilei-Systeme abzubilden. ■
Ausgehend von dieser letzten Feststellung wollen wir uns jetzt überlegen, wie die **Koordinatendarstellung** einer Galilei-Transformation allgemein aussieht. Dazu seien zwei Galilei-Systeme $\{O; e_0, e_1, e_2, e_3\}$ und $\{O'; e'_0, e'_1, e'_2, e'_3\}$ gegeben, bezüglich derer ein Ereignis A durch

$$A - O = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu e_\mu \quad \text{und} \quad A - O' = \sum_{\mu=0}^3 x'^\mu e'_\mu$$

dargestellt ist. Wir bemerken zunächst, daß $\{e_1, e_2, e_3\}$ und $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ Basen von V_0 sind und daher durcheinander ausgedrückt werden können, z.B.

$$e_i = \sum_{j=1}^3 e'_j R^j_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Da beide Basen bezüglich $\langle \bullet, \bullet \rangle$ orthonormal sind, genügen die Transformationskoeffizienten R^j_i den Gleichungen $\sum_{i=1}^3 R^i_j R^i_k = \delta_{jk}$ ($j, k = 1, 2, 3$). Aus $\tau(e_0) = \pm 1$ und $\tau(e'_0) = \pm 1$ folgt $\tau(e_0 - \lambda e'_0) = 0$ mit $\lambda = \pm 1$. Somit gilt eine Relation der Form

$$e_0 = \lambda e'_0 + w; \quad w \in V_0, \quad \lambda = \pm 1.$$

Nun schreiben wir $O - O' = \sum_{\mu=0}^3 a^\mu e'_\mu$ und $w = \sum_{i=1}^3 w^i e'_i$ und drücken in der Koordinatendarstellung von $A - O = (A - O') - (O - O')$ die e_μ durch die e'_μ aus. Die Vektoren e'_μ ($\mu = 0, \dots, 3$) sind linear unabhängig, und ein Koeffizientenvergleich in der erhaltenen Beziehung liefert

$$x'^0 = \lambda x^0 + a^0, \quad x'^i = \sum_{j=1}^3 R^i_j x^j + x^0 w^i + a^i.$$

Dies schreiben wir jetzt noch etwas anders. Wir setzen:

$$t := x^0, \quad t' := x'^0, \quad b := a^0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

\mathbf{x}' , \mathbf{w} und \mathbf{a} werden analog zu \mathbf{x} gebildet. Schließlich setzen wir $R := ((R^i_j))$. (R ist die aus den Koeffizienten R^i_j in natürlicher Weise gebildete 3×3 -Matrix.) Damit erhält eine Galilei-Transformation (in Matrixschreibweise) die Form

$$(t, \mathbf{x}) \mapsto g(t, \mathbf{x}) = (\lambda t + b, R\mathbf{x} + \mathbf{w}t + \mathbf{a}),$$

wobei $\lambda = \pm 1$ und $R^T R = 1_3$.

Beachte: $R^T R = 1_3$ impliziert $RR^T = 1_3$ und $\det R = \pm 1$.

Nach Definition 1.7 bilden die Galilei-Transformationen eine Gruppe, eben die dort eingeführte Galilei-Gruppe. Die Gruppenaxiome lassen sich anhand der angegebenen Koordinatendarstellung leicht nachprüfen. Einige wichtige **Untergruppen** der Galilei-Gruppe sind:

- (1) die eigentliche, orthochrone Galilei-Gruppe, G_+^\uparrow , bestehend aus Elementen $g(t, \mathbf{x}) = (t + b, R\mathbf{x} + \mathbf{w}t + \mathbf{a})$ mit $\det R = +1$. G_+^\uparrow ist eine zehnparametrische Gruppe;
- (2) die Euklidische Bewegungsgruppe mit Elementen $g(t, \mathbf{x}) = (t, R\mathbf{x} + \mathbf{a})$;
- (3) spezielle Galilei-Transformationen $g(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x} + \mathbf{v}t)$.

Nachtrag: Um das obige Vorgehen in Koordinatendarstellung zu legitimieren, verweisen wir auf die in der physikalischen Literatur gängige Unterscheidung zwischen “aktiven” und “passiven” Transformationen. Das Wort “aktive” Transformation bedeutet eine Abbildung im mathematisch üblichen Sinn. Bei einer “passiven” Transformation hingegen wird nur das Koordinatensystem abgebildet, und man fragt dann, wie sich die zugehörigen Koordinaten transformieren. (Diese “passive” Sichtweise ist es, was der obigen Rechnung zugrundeliegt.) Sei zum Beispiel V ein reeller Vektorraum mit Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ und zugehörigen Koordinatenfunktionen $x^i : V \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$). Werden die Basisvektoren e_i durch eine bijektive lineare Abbildung $T : V \rightarrow V$ auf neue Basisvektoren $e'_i = T(e_i)$ ($i = 1, \dots, n$) abgebildet, so transformieren sich die Koordinaten gemäß

$$x'^i = T^{-1*} x^i \equiv x^i \circ T^{-1}.$$

Im Fall der Verknüpfung zweier Abbildungen T_1 und T_2 bleibt dabei wegen

$$(T_1 T_2)^{-1*} = (T_2^{-1} T_1^{-1})^* = T_1^{-1*} T_2^{-1*}$$

die Reihenfolge der Multiplikation ungeändert. (Mathematisch gesprochen ist $T \mapsto T^{-1*}$ ein Homomorphismus.) Das Transformationsgesetz für die Basisvektoren

$$e'_i = T(e_i) = \sum_j e_j T^j_i$$

entspricht demnach

$$x'^i = T^{-1*} x^i = \sum_j x^j (T^{-1})^i_j.$$

1.4 Newtonsche Bewegungsgleichungen

Die Abschnitte 1.1–1.3 fixieren die Struktur der Raum–Zeit, das “Gerüst” einer jeden physikalischen Theorie. Es geht jetzt darum, das Gerüst mit **dynamischem** Inhalt zu füllen. Vorbereitend ist die

DEFINITION 1.9 *Eine **Bewegung** im \mathbb{R}^n ist eine differenzierbare Abbildung $\mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \mathbf{x}(t)$. Die **Ableitung***

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) := \left. \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0)}{h}$$

*heißt **Geschwindigkeit** (oder **Geschwindigkeitsvektor**) am Punkt t_0 . Die zweite **Ableitung***

$$\ddot{\mathbf{x}}(t_0) := \left. \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) \right|_{t=t_0}$$

*heißt **Beschleunigung** (oder **Beschleunigungsvektor**) am Punkt t_0 . Die Bildmenge der Abbildung $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt eine **Trajektorie** im \mathbb{R}^n .*

Wir erinnern an Definition 1.6 und die dort verwendeten Symbole. Wegen der durch τ ausgezeichneten Rolle der Zeit und $\tau(v) \neq 0$ können wir den Parameter s durch die Zeit ausdrücken (wähle z.B. $t := s\tau(v)$) und nach Einführung eines Galilei-Systems gleichförmig geradlinige Bewegung als eine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ charakterisieren mit der Eigenschaft $\ddot{\mathbf{x}}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

DEFINITION 1.10 *Ein **mechanisches System** im Newtonschen Sinn besteht aus N Punkten (oder “Punktteilchen” oder “Massenpunkten”), die sich im dreidimensionalen Euklidischen Raum bewegen. (“Massenpunkt” ist die mathematische Idealisierung eines Körpers mit für praktische Zwecke vernachlässigbarer Ausdehnung und mit einer Eigenschaft, “träge Masse”, die unten eingeführt wird.) Der **Zustand** eines solchen Systems ist die Gesamtheit der Orte und Geschwindigkeiten seiner Punkte.*

Newtonsches Prinzip der Determiniertheit: Der Anfangszustand (= Zustand zu einer festen Zeit t_0) eines mechanischen Systems bestimmt seine Bewegung vollständig.

Wir betrachten speziell den Fall $N = 1$. Aus dem formulierten Prinzip folgt dann insbesondere, daß die Vorgabe von Ort $\mathbf{x}(t_0)$ und Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ eines Punkts zur Zeit t_0 seine Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}(t_0)$ zur gleichen Zeit eindeutig festlegt. Es existiert also eine Abbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \supset U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dergestalt, daß $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)$. Umgekehrt folgt aus dem Existenz- und Eindeigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen (siehe einen späteren Abschnitt), daß die Abbildung \mathbf{f} und die Anfangsdaten $\mathbf{x}(t_0)$, $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ die Bewegung eindeutig bestimmen.

Die experimentelle Erfahrung sagt, daß \mathbf{f} nicht von der Natur des Punktteilchens unabhängig ist. Diese Unabhängigkeit wird aber erreicht durch Multiplikation mit einer intrinsischen skalaren Eigenschaft $m > 0$, die "träge Masse" heißt. $\mathbf{F} := m\mathbf{f}$ heißt "Kraft". Verallgemeinerung der Argumentation auf den Fall von N Massenpunkten ergibt die Newtonschen Bewegungsgleichungen ("2. Newtonsches Gesetz"):

$$\boxed{m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t)} \quad (i = 1, \dots, N).$$

Hierbei ist m_i die Masse des i -ten Punkts, \mathbf{x}_i sein Ort und \mathbf{F}_i die auf ihn wirkende Kraft. Die funktionelle Abhängigkeit der Kräfte \mathbf{F}_i ist nicht beliebig, sondern unterliegt einer Reihe von Bedingungen (für ein "abgeschlossenes System"). Diese resultieren aus dem **Galileischen Relativitätsprinzip**:

Die Naturgesetze haben in allen Galilei-Systemen dieselbe Form.

Wir sammeln die Bedingungen an \mathbf{F}_i .

- (1) Zeittranslationen $g(t, \mathbf{x}) = (t + b, \mathbf{x})$ sind Galilei-Transformationen. Invarianz der Naturgesetze unter Zeittranslationen bedeutet, daß mit $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)$ auch $\mathbf{x}_1(t + b), \dots, \mathbf{x}_N(t + b)$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}$ Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen sein muß. In einem Galileischen Koordinatensystem (das wir der Betrachtung hier und im folgenden zugrundelegen) hat dies die sofortige Konsequenz

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{x}}_N(t), t - b) = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{x}}_N(t), t).$$

- (2) Raumtranslationen $g(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x} + \mathbf{a})$ und spezielle Galilei-Transformationen $g(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x} + \mathbf{v}t)$ sind Galilei-Transformationen. Hieraus folgen mit gleicher Schlußweise wie unter (1) die Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) &= \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{x}_N + \mathbf{a}, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) \\ &= \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{v}, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N + \mathbf{v}, t). \end{aligned}$$

- (3) Raumdrehungen $g(t, \mathbf{x}) = (t, R\mathbf{x})$ sind Galilei-Transformationen. Gleiche Schlußweise wie unter (1) ergibt

$$R\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) = \mathbf{F}_i(R\mathbf{x}_1, \dots, R\dot{\mathbf{x}}_N, t).$$

Aus (1) folgt offensichtlich, daß \mathbf{F}_i nicht explizit von der Zeit abhängt; aus (2), daß \mathbf{F}_i nur von den Differenzen $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$ und $\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_k$ abhängt; und aus (3), daß sich \mathbf{F}_i unter Raumdrehungen in wohldefinierter Weise (wie ein "Vektor") transformiert.

Ergänzende **Erläuterungen** (Originalton Arnold): Bei der Formulierung des Relativitätsprinzips müssen wir berücksichtigen, daß es nur auf "abgeschlossene" Systeme anwendbar ist, d.h. es sind alle Körper ins System mit aufzunehmen, deren Wechselwirkungen für das zu untersuchende Phänomen eine Rolle spielen. Streng genommen heißt dies, daß **alle** Körper im Universum berücksichtigt werden müssen. Wir wissen allerdings aus Erfahrung, daß man den Einfluß von vielen außer acht lassen darf: zum Beispiel können wir die Anziehung zwischen den Sternen beim Studium der Planetenbewegung um die Sonne vernachlässigen.

Studieren wir jedoch die Bewegung eines Körpers in Erdnähe, so ist das System nicht abgeschlossen, wenn die Erde nicht eingeschlossen ist; beim Studium der Bewegung eines Flugzeugs ist das System nicht abgeschlossen, wenn es die umgebende Luft nicht beinhaltet usw. Nun sei eine Situation gegeben, wo wir Teil 1 eines mechanischen Systems 1+2 studieren. Der Einfluß von Teil 2 auf Teil 1 kann dann oft durch eine zeitliche und räumliche Variation in den Parametern beschrieben werden, die in das System von Bewegungsgleichungen für Teil 1 eingehen.

Beispiel: Der Einfluß des Mondes auf die Erde kann bei der Untersuchung der Mehrzahl irdischer Phänomene vernachlässigt werden. Beim Studium der Gezeiten ist dieser Einfluß jedoch zu berücksichtigen; man kann dies tun, indem man, anstatt die Anziehung des Mondes explizit zu betrachten, eine periodische Modulation im Gravitationsfeld auf der Erde einführt (Ende Arnold).

Bei der Behandlung von Teil 1 von System 1+2 nimmt man sinnvollerweise eine Einteilung in **innere** und **äußere** Kräfte vor. (Hier geht noch die Annahme ein, daß sich Kräfte vektoriell addieren.) Innere Kräfte sind jene, die zwischen den Punkten von Teil 1 wirken; äußere Kräfte representieren den Einfluß von Teil 2. Mit dieser Einleitung unterliegen die inneren Kräfte den Bedingungen (1)–(3) von oben, die äußeren hingegen nicht. Wir können dann auch sagen

DEFINITION 1.11 *Ein mechanisches System, auf das keine äußere Kräfte wirken, heißt abgeschlossen.*

1.5 Abgeschlossenes N -Körpersystem: Erhaltungssätze

Wir betrachten ein mechanisches System von N Punkten, nicht notwendig abgeschlossen. Mit der Zerlegung in innere und äußere Kräfte lauten die Bewegungsgleichungen:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}.$$

Der Einfachheit halber wollen wir hier annehmen, daß alle inneren Kräfte von der konservativen Form

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = -\text{grad}_i \phi_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$$

sind. (Kompliziertere Kräfte werden besser mit dem Formalismus späterer Kapitel behandelt.)

Bemerkung: Die gewählte Form der inneren Kräfte ist konsistent mit dem 3. Newtonschen Gesetz: "Actio = Reactio", oder $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$.

DEFINITION 1.12 *Der Impuls eines Massenpunkts ist $\mathbf{p} := m\dot{\mathbf{x}}$, der Impuls eines Systems (= Gesamtimpuls) ist $\mathbf{P} := \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i$; der Schwerpunkt (genauer: der Ortsvektor des Schwerpunkts) ist $\mathbf{X} := \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i / M$ mit M der Gesamtmasse, $M = \sum_{i=1}^N m_i$.*

Nun summiere beide Seiten der Bewegungsgleichungen über i und benütze $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Dann folgt:

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}}.$$

SATZ 1.1 *Der Schwerpunkt eines mechanischen Systems bewegt sich, als ob alle Massen an ihm konzentriert wären und alle Kräfte an ihm angreifen würden.*

KOROLLAR 1.1.1 ("SCHWERPUNKTSATZ") *Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich geradlinig und gleichförmig.*

Mit $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{X}}$ gilt äquivalent zu oben: $\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}$.

SATZ 1.2 *Die zeitliche Änderung des Impulses eines mechanischen Systems ist gleich der Summe der auf seine Punkte wirkenden äußeren Kräfte.*

KOROLLAR 1.2.1 ("IMPULSSATZ") *Der Impuls eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.*

KOROLLAR 1.2.2 *Steht die Summe der äußeren Kräfte senkrecht auf der x -Achse ($x = x^1$), so ist die x -Komponente des Impulses erhalten: $P_x = \text{const}$.*

DEFINITION 1.13 *Der Drehimpuls eines Massenpunkts der Masse m relativ zum Koordinatenursprung O ist das Vektorprodukt von Ort \mathbf{x} und Impuls $m\dot{\mathbf{x}}$: $\mathbf{l} := \mathbf{x} \wedge m\dot{\mathbf{x}}$. Der Drehimpuls eines Systems relativ zu O ist gleich der Summe der Einzeldrehimpulse $\mathbf{L} := \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \wedge m_i \dot{\mathbf{x}}_i$.*

Bemerkung: Wir notieren das Vektorprodukt mit \wedge anstatt \times , weil das zweite Symbol dem für Ortsvektor zu sehr ähnelt.

Beachte auch, daß der Drehimpuls von der Wahl des Koordinatenursprungs abhängt.

Ändert man den Koordinatenursprung, so ändert sich der Drehimpuls.

Nun betrachte:

$$\dot{\mathbf{l}}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i \wedge m_i \dot{\mathbf{x}}_i) = \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_i \wedge m_i \dot{\mathbf{x}}_i}_{=0} + \mathbf{x}_i \wedge m_i \ddot{\mathbf{x}}_i.$$

Benütze, daß \mathbf{F}_{ij} nach Vorgabe parallel zu $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ ist, und $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Dann folgt

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \wedge m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \underbrace{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \wedge \mathbf{F}_{ij}}_{=0}$$

oder

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}}.$$

SATZ 1.3 *Die zeitliche Änderung des Drehimpulses eines mechanischen Systems (relativ zu O) ist gleich der Summe der äußeren Drehmomente (relativ zu O), die an seinen Punkten angreifen.*

KOROLLAR 1.3.1 (“DREHIMPULSSATZ”) *Der Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.*

KOROLLAR 1.3.2 *Verswindet die z -Komponente des äußeren Drehmoments, so ist die z -Komponente des Drehimpulses erhalten: $L_z = \text{const}$.*

Als letzten Erhaltungssatz im abgeschlossenen N -Teilchensystem werden wir jetzt noch den Energiesatz kennenlernen. Diese Thema bietet uns Gelegenheit, eine kleine Korrektur an der gängigen Präsentation des 2. Newtonschen Gesetzes vorzunehmen. Wie eine sorgfältige Betrachtung der Prozedur der Kraftmessung (per Federwaage) zeigt, ist Kraft primär nicht als Vektor sondern als Linearform anzusehen. (Ein Kraftfeld ist also primär kein Vektorfeld F sondern eine Differentialform 1. Grades

\mathcal{F} .) Die fundamentale Version der Newtonschen Bewegungsgleichung lautet demgemäß

$$\langle m_i \ddot{\mathbf{x}}_i, \bullet \rangle = \mathcal{F}_i \quad (i = 1, \dots, N).$$

In dieser Formulierung wird deutlich, daß die Newtonsche Bewegungsgleichung von der Euklidischen Struktur des Raumes Gebrauch macht. (Dagegen ist die Definition der Kraftform \mathcal{F}_i von dieser Struktur unabhängig.) Die übliche Formulierung gewinnt man, indem man die Kraftform \mathcal{F}_i in das Vektorfeld F_i mittels der Beziehung $\mathcal{F}_i = \langle F_i, \bullet \rangle$ übersetzt und dann das Skalarprodukt unterdrückt. Für den hier betrachteten Fall einer konservativen Kraft $F_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = -\text{grad}_i \phi_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$ haben wir

$$(\mathcal{F}_{ij})_{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = -(\text{d}_i \phi_{ij})_{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|},$$

wobei d_i das Differential bezüglich des Orts \mathbf{x}_i bezeichnet.

DEFINITION 1.14 Die **kinetische Energie** eines Punkts der Masse m ist gegeben durch $T := \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2$. (Hierbei ist $\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \langle \sum_{i=1}^3 a^i e_i, \sum_{j=1}^3 b^j e_j \rangle = \sum_{i=1}^3 a^i b^i$ das von $\langle \bullet, \bullet \rangle$ herrührende Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 .) Die **kinetische Energie eines Systems** ist $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2$.

Durch Bilden der Zeitableitung der kinetischen Energie und Verwenden der Newtonschen Bewegungsgleichung (fundamentale Version) erhalten wir

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^N \langle m_i \ddot{\mathbf{x}}_i, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle = \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{j \neq i} \mathcal{F}_{ij} \right) (\dot{\mathbf{x}}_i).$$

Für den Beitrag von den inneren Kräften gilt mit $\phi_{ij} = \phi_{ji}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \mathcal{F}_{ij}(\dot{\mathbf{x}}_i) &= - \sum_{j \neq i} (\text{d}_i \phi_{ij})_{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}(\dot{\mathbf{x}}_i) \\ &= - \sum_{i < j} (\text{d} \phi_{ij})_{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}(\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) = - \frac{dU}{dt}, \end{aligned}$$

wobei $U = \sum_{i < j} \phi_{ij}$ die (innere) **potentielle Energie** des Systems heißt. Es ergibt sich $dT/dt = -(dU/dt) + \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}$, oder mit der Gesamtenergie $E = T + U$:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}}.$$

SATZ 1.4 Die zeitliche Änderung der Energie eines mechanischen Systems ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte.

KOROLLAR 1.4.1 (“ENERGIESATZ”) *Die Energie eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.*

Abschließende **Bemerkungen**:

- (1) Es wurde gezeigt, daß abgeschlossene Systeme (mindestens) zehn erhaltene Größen haben; es sind dies die (jeweils drei) Komponenten von \mathbf{P} , $\mathbf{X} - t\mathbf{P}/M$, \mathbf{L} und die Energie E . Wie später in allgemeinerem Zusammenhang (“Noether-Theorem”) erläutert wird, erwartet man genau diese (Mindest-) Zahl, nämlich zehn, wegen der Gültigkeit des Galileischen Relativitätsprinzips für abgeschlossene Systeme und der Zehnparametrigkeit der eigentlichen, orthochronen Galilei-Gruppe.
- (2) Obschon davon nicht explizit die Rede war, haben wir in diesem Abschnitt von der affinen Struktur der Galilei-Raum-Zeit an mehreren Stellen Gebrauch gemacht. Zum Beispiel setzt die Definition des Impulses eines mechanischen Systems voraus, daß sich die Impulse seiner Punkte (die sich ja i.a. an **verschiedenen** Orten im Raum befinden) sinnvoll zu einem Gesamtimpuls addieren lassen. Die Möglichkeit zu solcher Addition ist genau deshalb gegeben, weil die \mathbf{p}_i ($i = 1, \dots, N$) als Elemente ein-und-desselben Vektorraums (nämlich V_0) aufgefaßt werden zu können. [Beim Übergang von der Galilei-Raum-Zeit zur gekrümmten Raum-Zeit der allgemeinen Relativitätstheorie sind Vektoren durch **Tangentenvektoren** zu ersetzen, für die Addition nur **punktweise** erklärt ist. In der Tat erfordert die Formulierung der Erhaltungssätze in der allgemeinen Relativitätstheorie einen gesteigerten mathematischen Aufwand, nämlich solche Begriffe wie Tensorfeld, Konnexion, Metrik, kovariante Ableitung...]
- (3) Bei der obigen Herleitung des Energiesatzes haben wir benutzt, daß sich die (inneren) Kräfte als Gradient der potentiellen Energie schreiben ließen.

1.6 Allgemeines über Differentialgleichungen

(Gestrafte Fassung der Straumannschen Adaption, Seiten 35–50, des Textbuches von Arnold, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer 1980.)

DEFINITION 1.15 *Gegeben sei ein zeitabhängiges Vektorfeld $X : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, t) \mapsto X(x, t)$; $M \subset \mathbb{R}^n$. Die Gleichung*

$$\dot{x} = X(x, t) \tag{1.1}$$

(in Komponenten: $\dot{x}^i = X^i(x^1, \dots, x^n, t)$ ($i = 1, \dots, n$)) heißt ein **dynamisches System**. Eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I = [a, b] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ heißt **Lösung** des dynamischen Systems, wenn für alle $t \in I$ die Beziehung $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t), t)$ erfüllt ist. Der Graph von γ heißt eine **Integralkurve** des Vektorfelds X . (Unter dem **Graphen** einer Abbildung $\gamma : I \rightarrow M$ versteht man diejenige Teilmenge des direkten Produkts $I \times M$, die aus allen Punkten $(t, \gamma(t))$ mit $t \in I$ und $\gamma(t) \in M$ besteht.)

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen von zweiter Ordnung in der Zeit. Sie nehmen jedoch die Form eines dynamischen Systems gemäß Definition 1.15 an, wenn wir sie folgendermaßen aufschreiben (es ist zweckmäßig und üblich, die Ortsvektoren \mathbf{x}_i von hier an mit \mathbf{q}_i zu bezeichnen):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_i &= \mathbf{p}_i/m_i, \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= \mathbf{F}_i(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1/m_1, \dots, \mathbf{p}_N/m_N, t)\end{aligned}$$

(wobei $i = 1, \dots, N$) und die Größen $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ zu **einer** Größe $x \in \mathbb{R}^{6N}$ zusammenfassen.

Der Raum, den die Gesamtheit aller Orte und Impulse eines mechanischen Systems durchläuft, heißt **Phasenraum**. Der Phasenraum hat immer gerade Dimension: $n = \dim M = 2f$. Die Zahl der Ortskoordinaten, f , heißt auch die **Zahl der Freiheitsgrade**. Für ein System von N Punkten im \mathbb{R}^3 ist $f = 3N$. Für ein System von N Punkten im \mathbb{R}^3 mit Zwangsbedingungen (siehe Kapitel 2) ist $f \leq 3N$.

DEFINITION 1.16 Ein Vektorfeld X_H der speziellen Form

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial x^{f+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x^{2f}}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x^1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x^f} \right)$$

mit H einer differenzierbaren Funktion $H : V \subset \mathbb{R}^{2f} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ("Hamilton-Funktion") heißt **Hamiltonsch**. Das zugehörige dynamische System $\dot{x} = X_H(x, t)$ heißt **Hamiltonsches** (oder **kanonisches**) System.

Beispiel: Ein mechanisches System von N Punkten mit konservativen Kräften $\mathbf{F}_i = -\partial U/\partial \mathbf{q}_i$ ist Hamiltonsch mit der Energie

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + U(q)$$

als Hamilton-Funktion. (Hier ist $q = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$ und $p = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$.) Die Hamilton-Funktion hängt in diesem Fall nicht explizit von der Zeit ab.

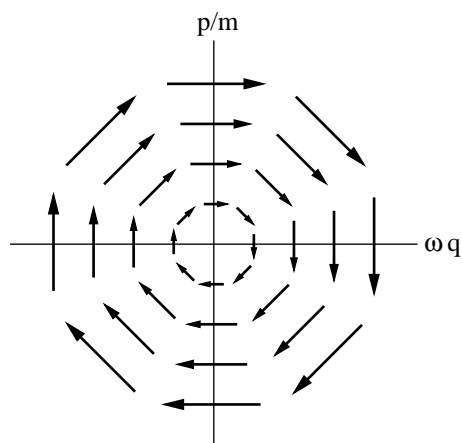
Wir betrachten als besonders einfachen Spezialfall den harmonischen Oszillator für $f = 1$. In diesem Fall sind Hamilton-Funktion H und Hamiltonsches Vektorfeld X_H gegeben durch

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2,$$

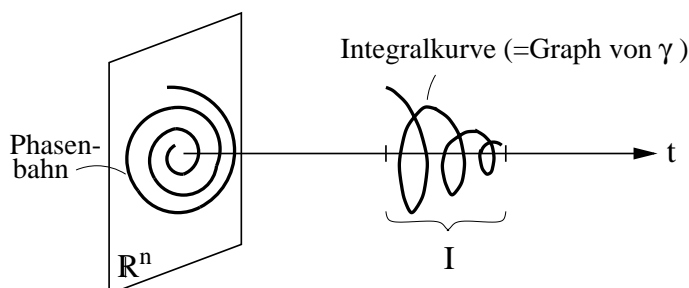
$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) = \left(\frac{p}{m}, -m\omega^2 q \right).$$

Das dynamische System $\dot{q} = p/m$, $\dot{p} = -m\omega^2 q$ erkennt man nach Elimination von p als die Bewegungsgleichung ($\ddot{q} = -\omega^2 q$) des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Schwingungsfrequenz ω .

Versuch einer graphischen Darstellung von X_H :



DEFINITION 1.17 Das dynamische System zu einem zeitunabhängigen (zeitabhängigen) Vektorfeld $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($X : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$) heißt **autonom (nichtautonom)**. Unter dem **erweiterten Phasenraum** versteht man das direkte Produkt $M \times \mathbb{R}$. Ist $\gamma : I \rightarrow M$ eine Integralkurve von X , so heißt die Punktmenge $\{\gamma(t) \mid t \in I\} \subset M$ eine **Phasenbahn**.



Bemerkung: Jedes nichtautonome System $\dot{x} = X(x, t)$ hat im erweiterten Phasenraum die **autonome Erweiterung** $\dot{x} = X(x, t)$, $\dot{t} = 1$.

Unser nächstes Thema ist das **Verhalten** von Vektorfeldern **unter Abbildungen**. Wir betrachten nur den Fall eines autonomen Systems. (Die Verallgemeinerung von Satz 1.5 unten auf nichautonome Systeme folgt sofort durch Übergang zur autonomen Erweiterung im erweiterten Phasenraum, siehe die vorangehende Bemerkung.) Sei also ein zeitunabhängiges Vektorfeld $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben und sei $\psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus von U nach V . Bei Anwendung von ψ auf eine Kurve $\gamma : I \rightarrow U$ entsteht die Bildkurve $\psi(\gamma) \equiv \psi \circ \gamma : I \rightarrow V$. Unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit von γ können wir zur ersten Ableitung übergehen und bekommen so eine Zuordnung

$$\gamma'(t) \mapsto (\psi \circ \gamma)'(t) = (D_{\gamma(t)}\psi)(\gamma'(t)),$$

wobei für das Gleichheitszeichen die Kettenregel der Differentialrechnung verwendet wurde und $D_x\psi$ das Differential der Abbildung ψ im Punkt x bezeichnet. Der Vektor $v = \gamma'(t)$ an der Stelle $x = \gamma(t)$ wird also auf den Vektor $(D_x\psi)(v)$ an der Stelle $\psi(x)$ abgebildet. Indem wir nun Punkt x und Vektor v variabel machen, erhalten eine Abbildung von Vektorfeldern.

DEFINITION 1.18 *Ist $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\psi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus, so ist das transformierte Vektorfeld $\psi_*X : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ erklärt durch*

$$(\psi_*X)(\psi(x)) := (D_x\psi)(X(x)).$$

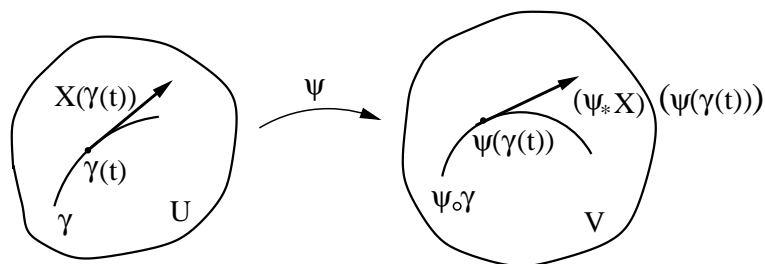
Bemerkung: In Komponenten sieht dies folgendermaßen aus:

$$(\psi_*X)^i(\psi(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(x) X^j(x).$$

(Vektorfelder transformieren sich durch “Anwenden der Jacobi-Matrix”.)

Die Abbildung ψ bildet die Integralkurven des Vektorfeldes X auf die Integralkurven des transformierten Vektorfeldes ψ_*X ab, denn aus $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ folgt

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma)(t) = (D_{\gamma(t)}\psi)(\dot{\gamma}(t)) = (D_{\gamma(t)}\psi)(X(\gamma(t))) = (\psi_*X)(\psi \circ \gamma(t)).$$



DEFINITION 1.19 $x_0 \in M$ heißt ein **singulärer (nichtsingulärer) Punkt** des Vektorfeldes $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, falls gilt $X(x_0) = 0$ ($X(x_0) \neq 0$).

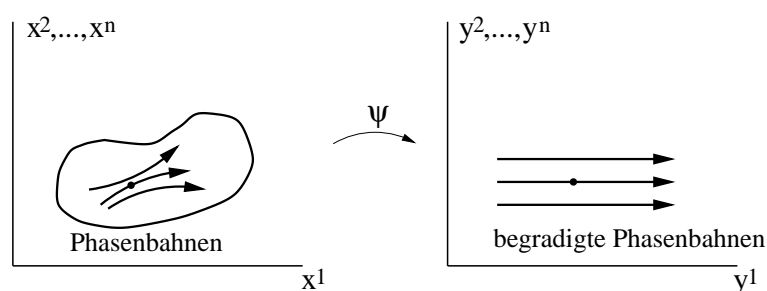
Der folgende Satz ist zentral in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.

SATZ 1.5 (“BEGRADIGUNG VON VEKTORFELDERN”, “REKTIFIZIERUNGSSATZ”)
 Ein autonomes, differenzierbares Vektorfeld X ist in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes nichtsingulären Punktes diffeomorph zum konstanten Feld $\partial_1 = (1, 0, \dots, 0)$; d.h. es existiert ein lokaler Diffeomorphismus ψ mit $\psi_*X = \partial_1$. (Ist X ein Vektorfeld der Klasse r , so ist ψ ein Diffeomorphismus der Klasse r mit demselben r .)

Beweis: siehe Arnold, gewöhnliche Differentialgleichungen.

Bemerkungen: Satz 1.5 zeigt, daß das Verhalten eines dynamischen Systems fern von singulären Punkten “qualitativ” (d.h. modulo Diffeomorphismen) lokal dasselbe ist wie für das Gleichungssystem

$$\dot{y}^1 = 1, \dot{y}^2 = 0, \dots, \dot{y}^n = 0. \quad (1.2)$$



Beachte, daß über das Verhalten in der Nähe eines singulären Punktes und über das globale Langzeitverhalten keine Aussage gemacht wird. Das letztere kann so kompliziert sein, daß es sich jeder analytischen und/oder numerischen Behandlung entzieht.

Da über das Gleichungssystem (1.2) alles bekannt ist, deduziert man aus Satz 1.5 mühelos eine Reihe wichtiger Aussagen.

KOROLLAR 1.5.1 (“EXISTENZSATZ”) *Zu jedem $x_0 \in M$ existiert eine Lösung γ von $\dot{x} = X(x)$ zur Anfangsbedingung $\gamma(t_0) = x_0$.*

Beweis: Wenn gilt $X(x_0) = 0$, dann ist $\gamma(t) = x_0$ eine Lösung. Ist $X(x_0) \neq 0$, so können wir Satz 1.5 anwenden: wir transformieren mit ψ zum System (1.2), lösen (1.2) zur Anfangsbedingung $\beta(t_0) = \psi(x_0)$ ($\beta := \psi \circ \gamma$) und transformieren schließlich mit ψ^{-1} zurück.

KOROLLAR 1.5.2 (“LOKALER EINDEUTIGKEITSSATZ”) *Sind γ_1 und γ_2 zwei Lösungen von $\dot{x} = X(x)$ zur selben Anfangsbedingung $\gamma_1(t_0) = x_0 = \gamma_2(t_0)$, so gibt es ein t_0 enthaltendes offenes Intervall, auf dem γ_1 und γ_2 übereinstimmen.*

Beweisskizze: Gehe zum erweiterten Phasenraum über und transformiere das “erweiterte” Vektorfeld $\bar{X} := (X, 1)$ (das offensichtlich keine singulären Punkte hat) auf $\psi_* \bar{X} = (0, \dots, 0, 1)$.

Bemerkung: Korollar 1.5.2 (wie auch Korollar 1.5.3 unten) setzt natürlich als Folgerung des Satzes 1.5 die Differenzierbarkeit des Vektorfeldes X voraus.

1.6.1 Lokale Flüsse

DEFINITION 1.20 *Gegeben sei ein autonomes Vektorfeld X auf (dem Phasenraum) $M \subset \mathbb{R}^n$ und ein Punkt $x_0 \in M$. Unter einem **lokalen** (Phasen-) **Fluß**, der durch das Vektorfeld X in einer Umgebung von x_0 bestimmt wird, versteht man ein Tripel (I, V_0, ϕ) , das aus einem Intervall $I = [-\varepsilon, +\varepsilon]$, einer Umgebung V_0 von x_0 und einer Abbildung $\phi : V_0 \times I \rightarrow M$ besteht, mit den folgenden Eigenschaften:*

- (1) *für festes $t \in I$ ist die durch $\phi_t(x) := \phi(x, t)$ definierte Abbildung $\phi_t : V_0 \rightarrow \phi_t(V_0) \subset M$ ein Diffeomorphismus;*
- (2) *für festes $x \in V_0$ ist die durch $\gamma(t) := \phi(x, t)$ definierte Abbildung $\gamma : I \rightarrow M$ eine Lösung von $\dot{x} = X(x)$ zur Anfangsbedingung $\gamma(0) = x$;*
- (3) *es gilt (lokal): $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x)$.*

KOROLLAR 1.5.3 *Das Vektorfeld X bestimmt einen lokalen Fluß in einer Umgebung jedes Punktes $x_0 \in M$.*

Erläuterungen zum Begriff des lokalen Flusses:

- (i) Aus Def. 1.20 (2) folgt $\phi(x, 0) = x$, d.h. $\phi_0 = \text{Id}$.

- (ii) Wenn wir uns eine **feste Zeitspanne** t vorgeben und fragen, wohin ein beliebiger Punkt $x \in V_0$ in dieser Zeitspanne unter der durch $\dot{x} = X(x)$ determinierten Bewegung wandert, dann liefert $\phi_t = \phi(\bullet, t)$ hierzu die Antwort: $x \mapsto \phi_t(x)$. Wenn wir uns andererseits einen **festen Punkt** x vorgeben (zur Zeit $t = 0$) und wissen wollen, welcher Phasenbahn er folgt, dann ist dies gerade die Kurve $\gamma(t) = \phi(x, t)$. In diesem Sinn beinhaltet ϕ die (lokal) vollständige Beschreibung der Lösungen von $\dot{x} = X(x)$.
- (iii) (3) sagt aus, daß die Diffeomorphismen ϕ_t eine (lokale) einparametrische Gruppe mit neutralem Element ϕ_0 bilden.
- (iv) Das Wort "Fluß" erklärt sich daraus, daß wir die den Integralkurven von X folgende Bewegung von Punkten x durch M als das Fließen einer Strömung auffassen können.

Beispiele:

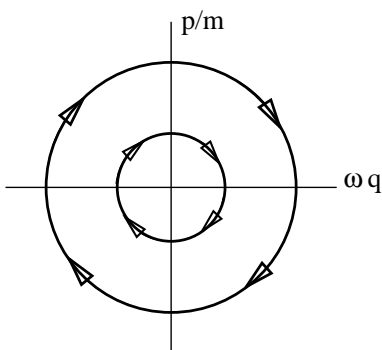
- (1) Der auf einem affinen Raum durch das konstante Vektorfeld $X(x) = v$ bestimmte Fluß ist

$$\phi(x, t) = x + vt.$$

- (2) Der durch das Hamiltonsche Vektorfeld $X_H = (p/m, -m\omega^2 q)$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators bestimmte Fluß ist

$$\phi(q, p, t) = \left(q \cos \omega t + \frac{p}{m\omega} \sin \omega t, -m\omega q \sin \omega t + p \cos \omega t \right).$$

Das "Fließen der Strömung" sieht hier folgendermaßen aus:



Der Begriff eines lokalen Flusses läßt sich auf nichtautonome Systeme ausdehnen. Wegen der fehlenden Invarianz unter Zeittranslationen braucht man dazu **zwei** Zeitargumente, eines für die Anfangsbedingung und eines für die Zeitentwicklung. (3) ist durch ein Kompositionsgesetz der Form $\phi_{t_3 t_2} \circ \phi_{t_2 t_1} = \phi_{t_3 t_1}$ zu ersetzen.

1.6.2 Picard–Abbildung

Der Existenz- und Eindeigkeitssatz für die Lösungen dynamischer Systeme läßt sich auch ohne die Begründung von Vektorfeldern beweisen, und zwar mittels der folgenden Strategie.

Zu lösen sei für ein differenzierbares Vektorfeld $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$, $\gamma(t_0) = x_0$. Im ersten Schritt wird die Aufgabenstellung als Integralgleichung umformuliert:

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(\gamma(\tau)) d\tau. \quad (1.3)$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sichert, daß jede Lösung dieser Integralgleichung auch Lösung des Anfangswertproblems ist und umgekehrt. Die Abbildung A , die eine Funktion $t \mapsto \gamma(t)$ in die Funktion

$$t \mapsto (A\gamma)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t X(\gamma(\tau)) d\tau$$

überführt, heißt **Picard–Abbildung**.

Nun betrachtet man einen geschickt definierten Banachraum (\mathcal{B}, d) , auf dem die Picard–Abbildung A wirkt. Die Differenzierbarkeit des Vektorfeldes X zusammen mit einer Beschränkung der Zeitdauer $|t - t_0|$ sorgt dafür, daß A auf \mathcal{B} kontrahierend ist, d.h. es existiert eine reelle Zahl $\lambda < 1$, so daß

$$d(A\gamma_1, A\gamma_2) \leq \lambda d(\gamma_1, \gamma_2)$$

für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{B}$ gilt.

Dem Banachschen Fixpunktsatz zufolge besitzt die Picard–Abbildung A genau einen Fixpunkt $\gamma = A\gamma$, und gegen diesen Fixpunkt konvergiert für jede Startfunktion γ_0 die Banachfolge $\gamma_0, A\gamma_0, A^2\gamma_0, \dots, A^n\gamma_0, \dots$. Die Fixpunktbedingung $\gamma = A\gamma$ ist äquivalent zur Integralgleichung (1.3), womit Existenz und Eindeutigkeit der Lösung lokal (für $|t - t_0| < \delta$) bewiesen ist.

Das Picardsche Beweisverfahren hat die attraktive Eigenschaft, konstruktiv zu sein und quasi als Nebenprodukt ein Approximationsschema mitzuliefern. Wir wählen z.B. $\gamma_0(t) \equiv x_0$ und iterieren $\gamma_{n+1}(t) = (A\gamma_n)(t)$ so lange, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

DEFINITION 1.21 *Ein differenzierbares Vektorfeld $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **global integrierbar**, wenn seine Integralkurven für alle Zeiten $t \in (-\infty, +\infty)$ definiert sind, wenn also der Fluß $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ des Vektorfeldes global existiert.*

Wie schon der Rektifizierungssatz liefert auch das Picardsche Verfahren zunächst nur eine lokale Aussage. Zur globalen Existenz und Eindeutigkeit gelangt man erst mit einer Zusatzforderung an das Vektorfeld des dynamischen Systems.

SATZ 1.6 *Gibt es für das Differential des differenzierbaren Vektorfeldes $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Schranke, d.h. existiert eine positive Zahl K , so daß $\|D_x X\| < K$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, dann ist X global integrierbar.*

Bemerkung: Daß auf die Beschränktheit des Differentials nicht verzichtet werden kann, sieht man schon an dem eindimensionalen Beispiel $\dot{x} = X(x)$ mit $X(x) = (1 + x^2)^\alpha$. Die Ableitung $X'(x)$ ist unbeschränkt für $\alpha > 1/2$. Wie die Lösung per Quadratur zeigt, terminieren die Integralkurven in diesem Fall nach einer endlichen Zeit.

1.6.3 Erste Integrale

DEFINITION 1.22 *Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein **erstes Integral** des dynamischen Systems $\dot{x} = X(x)$, falls für jede Lösung $\gamma : I \rightarrow M$ die Funktion $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ konstant ist.*

Die Bedingung zeitlicher Konstanz läßt sich auch noch etwas anders formulieren. Dazu benützen wir wieder einmal die Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = (df)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = (df)_{\gamma(t)}(X(\gamma(t))) =: (L_X f)(\gamma(t)).$$

Hierbei ist $(df)_x$ das Differential der Funktion f im Punkt x , und mit dem letzten Gleichheitszeichen haben wir die **Richtungsableitung** L_X eingeführt; im Komponenten:

$$(L_X f)(x) = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}.$$

Wir haben also äquivalent zu Def. 1.22:

f ist erstes Integral von $\dot{x} = X(x) \Leftrightarrow L_X f = 0$.

Beispiele für erste Integrale:

- (1) Die zehn erhaltenen Größen des abgeschlossenen N -Teilchensystems.
- (2) Sei X_H das Hamiltonsche Vektorfeld zu einer zeitunabhängigen Hamiltonfunktion H . Dann ist H ein erstes Integral von $\dot{x} = X_H(x)$, denn mit $x = (q, p)$ gilt

$$L_{X_H} H = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(- \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) = 0.$$

Mit der Identifikation $E = H$ heißt dies, daß die Energie E eines autonomen Hamiltonschen Systems erhalten ist.

1.7 Autonome Hamiltonsche Systeme mit einem Freiheitsgrad

(Straumann, Seiten 50ff.)

In Vorbereitung auf das eigentliche Thema dieses Abschnitts konstruieren wir die Lösung γ eines autonomen Systems für $n = 1$,

$$\dot{x} = X(x) \tag{1.4}$$

zu einer Anfangsbedingung $\gamma(t_0) = x_0$.

- (i) Wenn gilt $X(x_0) = 0$, dann ist die Lösung gegeben durch $\gamma(t) = x_0$.
- (ii) Sei jetzt $X(x_0) \neq 0$. Wegen $\dot{\gamma}(t_0) = X(x_0) \neq 0$ existiert nach dem Satz über implizite Funktionen die Umkehrfunktion $t = \tau(x)$ zu $x = \gamma(t)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 . Die Umkehrfunktion erfüllt $d\tau(x)/dx = 1/X(x)$, und Integration dieser Beziehung liefert $\tau(x) - \tau(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{X(y)}$. Damit ist das Problem der Lösung von (1.4) auf eine Quadratur (d.h. die Berechnung eines unbestimmten Integrals) und die Umkehrung einer Funktion zurückgeführt.

Nun betrachten wir das zur Newtonschen Bewegungsgleichung $m\ddot{q} = F(q)$ äquivalente autonome System

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = F(q).$$

Mit $F(q) = -U'(q)$ und $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$ wird dies zu

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{1.5}$$

Wenn wir jetzt noch $x = (q, p)$ und $X_H = (\partial H/\partial p, -\partial H/\partial q)$ setzen, dann nimmt dies die Gestalt $\dot{x} = X_H(x)$ an. Der Energiesatz (siehe das Ende von Abschnitt 1.6: $L_{X_H}H = 0 \Rightarrow H$ konstant auf jeder Phasenbahn) erlaubt die Konstruktion der Lösungen (1.5) mit dem gleichen Verfahren wie oben. Dazu vorweg die

DEFINITION 1.23 Die Punktmenge $\{(q, p) \in \mathbb{R}^2 \mid H(q, p) = E\}$ heißt die **Niveaueurve von H zur Energie E** .

DEFINITION 1.24 Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ein Punkt $x \in M$, in dem gilt $(df)_x = 0$, heißt **kritischer Punkt** von f .

Offensichtlich fallen die singulären Punkte des Vektorfeldes X_H mit den kritischen Punkten von H zusammen. In einer Umgebung jedes nichtkritischen Punktes (q_0, p_0) ist nach dem Satz über implizite Funktionen die Energieniveaukurve glatt. Lokal können wir dann die Gleichung $E = H(q, p)$ nach dem Impuls oder dem Ort auflösen, $p = f(q, E)$ oder $q = g(p, E)$, und die Auflösefunktion in die erste bzw. zweite Gleichung von (1.5) einsetzen:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, f(q, E)) \quad \text{oder} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(g(p, E), p).$$

Beide Probleme sind von der Form (1.4) und lassen sich somit wie oben beschrieben durch Quadratur und Umkehrung einer Funktion lösen. Das erste Verfahren funktioniert für $p_0 \neq 0$, das zweite für $U'(q_0) \neq 0$. ■

Einen Überblick über das qualitative Verhalten der Lösungen liefert das sogenannte **Phasenporträt**: zunächst einmal erklären wir den Definitionsbereich $M \subset \mathbb{R}^2$ der Hamilton-Funktion zum Phasenraum des Hamiltonschen Systems. Für eine Lösung $t \mapsto (q(t), p(t))$ von (1.5) zur Anfangsbedingung (q_0, p_0) zur Zeit t_0 liegen die Punkte für alle Zeiten t in der (q_0, p_0) enthaltenden Zusammenhangskomponente der Energieniveaukurve zu $E = H(q_0, p_0)$, d.h. die Phasenbahnen fallen mit den Zusammenhangskomponenten der Energieniveaukurve zusammen. Für die Phasenbahnen bestehen demnach folgende Möglichkeiten:

(A) Die Phasenbahn fällt mit einem kritischen Punkt zusammen.

Andernfalls ist die Phasenbahn eine glatte Kurve, welche

(B) geschlossen ist, ohne durch einen kritischen Punkt zu laufen;

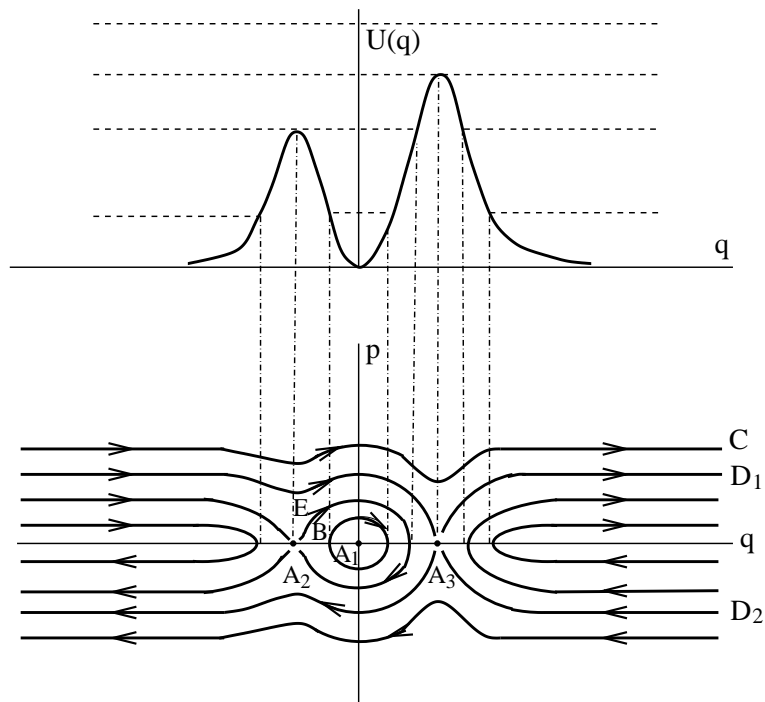
(C) beidseitig ins Unendliche läuft, ohne einen kritischen Punkt zu treffen;

(D) einseitig ins Unendliche läuft und im Endlichen in einem kritischen Punkt endet;

(E) beidseitig in einem (nicht notwendig demselben) kritischen Punkt endet.

Bemerkungen: Der Fall (A) entspricht einer stabilen oder instabilen Gleichgewichtslage. Im Fall (B) ist die Bewegung periodisch. In den Fällen (C) bis (E) erreicht oder verläßt das Teilchen den kritischen Punkt nicht in endlicher Zeit. (Andernfalls entstünde ein Konflikt zum Eindeutigkeitssatz.)

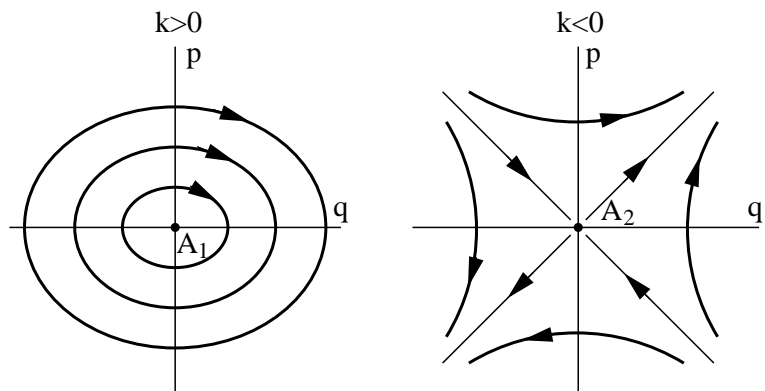
Die folgende Figur zeigt das Phasenporträt für $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$ und $U(q)$ wie skizziert. Die Niveaueurven sind gegeben durch $p = \pm \sqrt{2m(E - U(q))}$ und die kritischen Punkte von H durch $p = 0 = U'(q)$.



Wir untersuchen gesondert das Verhalten in der Nähe eines kritischen Punktes (q_0, p_0) , $p_0 = 0 = U'(q_0)$. Dazu entwickeln wir $U(q)$ in eine Taylorreihe um $q = q_0$:

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2}U''(q_0)(q - q_0)^2 + \dots$$

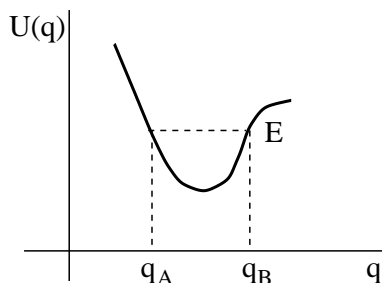
Wir betrachten nur den nichtentarteten (generischen) Fall $U''(q_0) \neq 0$. O.B.d.A. wählen wir $q_0 = 0$ und $U(q_0) = 0$. Die qualitativen Züge des Phasenflusses nahe $(q_0, p_0) = (0, 0)$ werden dann richtig erfasst, wenn wir $U(q) \equiv \frac{1}{2}kq^2$ setzen. Die Niveaukurven zu $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$ sind Ellipsen (Hyperbeln) für $k > 0$ ($k < 0$).



Der singuläre Punkt A_1 (A_2) heißt auch **elliptischer** (**hyperbolischer**) **Fixpunkt** von X_H . ■

Schwingungsdauer bei periodischer Bewegung.

Wir betrachten eine geschlossene Phasenbahn (Typ B von oben), d.h. die Situation sei wie in der folgenden Skizze:



Die durch $E = U(q_i)$ bestimmten Punkte q_A und q_B heißen **Umkehrpunkte**. Die Dauer eines vollständigen Durchlaufs der Phasenbahn – z.B. ausgehend von $(q, p) = (q_A, 0)$ über $(q_B, 0)$ zurück nach $(q, p) = (q_A, 0)$ – heißt **Schwingungsdauer**, τ . Als Funktion der Energie ist sie gegeben durch

$$\tau(E) = 2 \int_{q_A(E)}^{q_B(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}}.$$

Nun betrachten wir den Spezialfall eines homogenen Potentials vom Grade h : $U(q) = \alpha q^h$. h sei eine positive gerade ganze Zahl. Dann sind die Phasenbahnen bei **allen** Energien $E > 0$ geschlossen.

Behauptung: Die Schwingungsdauer τ eines Hamiltonschen Systems mit Hamiltonfunktion $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$, $U(q) = \alpha q^h$, $h \in 2\mathbb{N}$, variiert mit der Energie wie $E^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{h}}$.

Beweis: Für $s \in \mathbb{R}$ gilt $U(sq) = s^h U(q)$. Aus der Bestimmungsgleichung für die Umkehrpunkte, die im vorliegenden Fall für alle Energien $E > 0$ zwei Lösungen q_A und q_B hat, folgt $q_i(sE) = s^{1/h} q_i(E)$ ($i = A, B$). Nun ist

$$\tau(sE) = 2 \int_{q_A(sE)}^{q_B(sE)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(sE - U(q))}},$$

und die Variablensubstitution $q = s^{1/h} \bar{q}$ liefert

$$\tau(sE) = 2s^{-1/2+1/h} \int_{q_A(E)}^{q_B(E)} \frac{d\bar{q}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\bar{q}))}} = s^{-1/2+1/h} \tau(E).$$

Bemerkung: $h = 2$ ist der eindimensionale harmonische Oszillator. In diesem Fall ist die Schwingungsdauer von der Energie unabhängig durch $\tau(E) = 2\pi/\omega$ gegeben, wobei ω die Oszillatorfrequenz heißt. Für $h > 2$ nimmt τ mit wachsender Energie ab.

1.8 Das Zweikörper-Problem mit Zentralkräften

Wir untersuchen hier ein abgeschlossenes mechanisches System, das aus zwei Punkten 1 und 2 besteht, mit Massen m_1 und m_2 , Ortsvektoren \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_2 . Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{F}_{21},$$

und die Kräfte seien $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|} U'(|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|)$. Wir wissen bereits aus Abschnitt 1.5, daß für dieses System zehn Erhaltungssätze gelten. Durch konsequentes Ausnutzen dieser Erhaltungssätze führt man das Problem der Lösung der Bewegungsgleichungen wieder auf Quadraturen zurück. Der erste Schritt besteht in der Separation von Schwerpunkt- und Relativbewegung. Wir setzen

$$\mathbf{Q} := (m_1 + m_2)^{-1}(m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2) \quad (\text{Ortsvektor des Schwerpunkts})$$

und

$$\mathbf{q} := \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 \quad (\text{Ortsvektor der Relativbewegung}).$$

Die Umkehrtransformation hierzu ist

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{Q} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{q}, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{Q} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{q}.$$

Der Schwerpunkt bewegt sich nach Korollar 1.1.1 geradlinig und gleichförmig: $\ddot{\mathbf{Q}} = 0$ und somit $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{A} + t\mathbf{v}$. Aus $\ddot{\mathbf{q}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{q}}$ folgt dann

$$m \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}), \quad (1.6)$$

wobei $m := m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}$ die **reduzierte Masse** ist, und wir haben die Notation vereinfacht: $\mathbf{F}(\mathbf{q}) := \mathbf{F}_{12}(\mathbf{q})$. Da über die Bewegung des Schwerpunkts bereits alles gesagt ist, verbleibt nur das Problem der Lösung der Bewegungsgleichungen (1.6). Dieses ist lösbar, weil es sich bei dem Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = -\frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} U'(|\mathbf{q}|)$ um ein Zentralfeld handelt.

DEFINITION 1.25 Ein Vektorfeld $\mathbf{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt **zentral** mit Zentrum im Punkt O , wenn es unter den Euklidischen Bewegungen, die O fixieren, invariant ist.

Für eine Zentralkraft mit Zentrum O ist der Drehimpuls der Relativbewegung bzgl. O , $\mathbf{L}_{\text{rel}} = \mathbf{l} := m \mathbf{q} \wedge \dot{\mathbf{q}}$, erhalten:

$$\dot{\mathbf{l}} = m \mathbf{q} \wedge \ddot{\mathbf{q}} = -|\mathbf{q}|^{-1} U'(|\mathbf{q}|) \mathbf{q} \wedge \mathbf{q} = 0.$$

Wir betrachten hier nur den Fall $l \neq 0$. (Andernfalls liegt nämlich geradlinige, d.h. eindimensionale, Bewegung vor und wir können so verfahren wie in Abschnitt 1.7.) Ist $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ eine Lösung von (1.6), so hängt die von $\mathbf{q}(t)$ und $\dot{\mathbf{q}}(t)$ aufgespannte Ebene wegen $\dot{\mathbf{l}} = 0$ nicht von t ab. Die Relativbewegung findet daher in einer Ebene statt, die wir o.B.d.A. als die xy -Ebene wählen. Es ist günstig, in dieser Ebene Polarkoordinaten r, φ einzuführen:

$$q_x = r \cos \varphi, \quad q_y = r \sin \varphi.$$

Per Vereinbarung gilt $l_x = l_y = 0$ und kurze Rechnung zeigt $l_z = mr^2\dot{\varphi}$. Fürs folgende setzen wir $l_z = |\mathbf{l}| =: l$. Die kinetische Energie der Relativbewegung in ebenen Polarkoordinaten ist

$$\frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).$$

Nun benützen wir den Energiesatz zu Gleichung (1.6),

$$E := E_{\text{rel}} := \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \text{const}.$$

Mit $l = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$ folgt hieraus:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V(r), \\ V(r) &= U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Differentiation nach der Zeit liefert

$$m\ddot{r} = -V'(r), \tag{1.8}$$

d.h. die Radialbewegung genügt einer Newtonschen Bewegungsgleichung, wobei zum Potential $U(r)$ noch das **Zentrifugalpotential** $l^2/(2mr^2)$ hinzukommt. Das letztere ist abstoßend und divergiert für $r \rightarrow 0$. $V(r)$ heißt **effektives Potential** der Radialbewegung.

Gleichung (1.8) ist vom in Abschnitt 1.7 behandelten Typ und wird über den Energiesatz (1.7) gelöst durch Quadratur:

$$\int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - V(r)}}.$$

Die Bahnkurve $r(\varphi)$ läßt sich direkt bestimmen, indem man die Zeit eliminiert,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{l}{mr^2\dot{r}} = \frac{l}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}}.$$

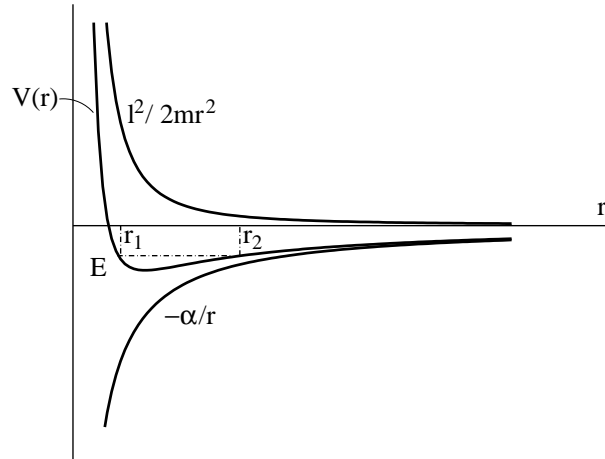
Dies führt auf die Quadratur

$$\int d\varphi = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r)}}.$$

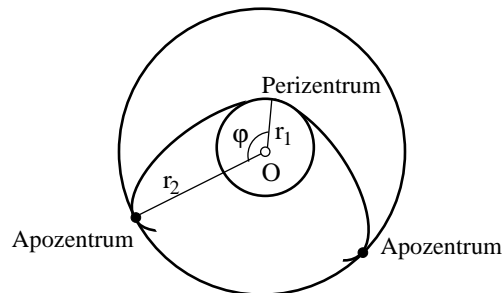
1.8.1 Untersuchung der Bahnkurven

(Arnold, Seiten 34 ff.)

Wir wählen den Wert des Drehimpulses l und der Energie E fest. Die zeitliche Änderung von r kann man sich leicht veranschaulichen, indem man den Graphen des effektiven Potentials $V(r)$ zeichnet. Beispiel: $1/r$ Potential.



Alle Bahnkurven zu den vorgegebenen Werten von l, E liegen im durch $V(r) \leq E$ definierten Gebiet. Auf dem Rand dieses Gebiets ($V(r) = E$) gilt $\dot{r} = 0$. Wegen $\dot{\varphi} = l/mr^2 \neq 0$ für $l \neq 0$ ist die Geschwindigkeit der Relativbewegung auch auf dem Rand im allgemeinen von Null verschieden. Die Ungleichung $V(r) \leq E$ liefert ein ringförmiges Gebiet $0 \leq r_1 \leq r \leq r_2 \leq \infty$ (oder mehrere solche Gebiete). Wenn gilt: $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$, dann ist die Bewegung beschränkt und spielt sich innerhalb des Rings zwischen den Kreisen mit Radien r_1 und r_2 ab. Der Verlauf einer Bahn ist in der nächsten Figur gezeigt:



Der Winkel φ ändert sich monoton, während r periodisch zwischen r_1 und r_2 oszilliert. Die Punkte, wo $r = r_1$ ($r = r_2$) gilt, heißen perizentral (apozentral). Jeder Strahl vom Ursprung durch einen perizentralen oder apozentralen Punkt ist eine Symmetrieachse der Bahn. Die Bahn ist i.a. nicht geschlossen: der Winkel ϕ zwi-

schen aufeinanderfolgenden Perizentren und Apozentren ist gegeben durch

$$\phi = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r)}}.$$

Der Winkel zwischen sukzessiven Perizentren ist doppelt so groß. Die Bahn ist genau dann geschlossen, wenn 2ϕ kommensurabel mit 2π ist, d.h. $2\phi = 2\pi \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$. Für $r_1 = r_2$ liegt Entartung zu einer Kreisbahn vor.

Wir betrachten jetzt noch den Fall $r_2 = \infty$. Falls $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = U_\infty < \infty$, können Bahnen ins Unendliche reichen. Wenn $E > U_\infty$, dann geht r nach ∞ mit endlicher Geschwindigkeit $\dot{r}_\infty = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_\infty)}$.

Mitteilung: Es läßt sich zeigen, daß $U(r) = -\alpha/r$ ($\alpha > 0$) und $U(r) = \alpha r^2$ ($\alpha > 0$) die einzigen Potentiale sind, für die alle beschränkten Bahnen geschlossen sind.

1.8.2 Kepler–Problem

(Bewegung eines Planeten um die Sonne.)

Wir spezialisieren jetzt zum Newtonschen Gravitationspotential,

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = Gm_1m_2 > 0.$$

G ist die universelle Gravitationskonstante. Das effektive Potential $V(r)$ wurde bereits oben skizziert. Die minimalen und maximalen Radien r_1 und r_2 sind die Lösungen von $E = V(r_i) = -\frac{\alpha}{r_i} + \frac{l^2}{2mr_i^2}$, woraus folgt:

- (i) Für $E = 0$: $r_1 = l^2/2m\alpha$, $r_2 = \infty$.
- (ii) Für $E > 0$: $r_1 = -\frac{\alpha}{2E} + \sqrt{(\alpha/2E)^2 + (l^2/2mE)}$, $r_2 = \infty$.
- (iii) Für $0 > E \geq V_{\min} = -\alpha^2 m/2l^2$: $r_{1,2} = -\frac{\alpha}{2E} \pm \sqrt{(\alpha/2E)^2 + (l^2/2mE)}$.

Für $E \geq 0$ sind alle Bahnen unbeschränkt; für $0 > E \geq V_{\min}$ liegen beschränkte Bahnen vor, von denen wir unten sehen werden, daß sie alle geschlossen sind; für $E = V_{\min}$ ist die Bahn zu einer Kreisbahn mit Radius $r_1 = r_2 = -\alpha/(2E)$ entartet. Das Integral $\varphi(r) - \varphi(r_0) = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{ds}{s^2} \left(E + \frac{\alpha}{s} - \frac{l^2}{2ms^2} \right)^{-1/2}$ läßt sich analytisch berechnen. Hierzu ist es geschickt, dimensionslose Größen einzuführen. Definiere die Länge ρ durch $l^2/m\rho^2 = \alpha/\rho$ und setze $s = \rho \cdot \xi$ (ξ ist eine "dimensionslose Länge") und $E = \varepsilon \cdot \alpha/2\rho$ (ε ist eine "dimensionslose Energie"). Beachte auch, daß $E \geq V_{\min}$ der Ungleichung $\varepsilon \geq -1$ entspricht. Das obige Integral wird dann zu

$$\int_{r/\rho_0}^{r/\rho} \frac{d\xi}{\xi^2} \left(\varepsilon + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} \right)^{-1/2} \stackrel{u=\xi^{-1}}{=} \int_{\rho/r}^{\rho/r_0} \frac{du}{(\varepsilon + 2u - u^2)^{1/2}}.$$

Nun ergänzen wir quadratisch, $\varepsilon + 2u - u^2 = (\varepsilon + 1) - (1 - u)^2$. Mit der Definition $\eta^2 := \varepsilon + 1$ und der Variablensubstitution $v = (1 - u)/\eta$ geht das unbestimmte Integral in $\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \arcsin v + c$ über. Es folgt das Resultat $\varphi - \varphi_0 = \arcsin v \Big|_{v=(1-\frac{\rho}{r})/\eta}$, oder nach r aufgelöst:

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{\rho}{1 - \eta \sin(\varphi - \varphi_0)}}; \quad \rho = \frac{l^2}{m\alpha}; \quad \eta = \left(1 + 2E \frac{l^2}{m\alpha^2}\right)^{1/2}.$$

Durch Übergang zu kartesischen Koordinaten sieht man leicht, daß es sich bei der durch $r(\varphi)$ beschriebenen Bahn handelt um:

- (i) eine Parabel für $\eta = 1$ ($\Leftrightarrow E = 0$);
- (ii) eine Ellipse für $0 \leq \eta < 1$ ($\Leftrightarrow V_{\min} \leq E < 0$);
- (iii) eine Hyperbel für $\eta > 1$ ($\Leftrightarrow E > 0$).

Kapitel 2

Lagrange–Mechanik

Bei der Untersuchung mechanischer Systeme ist es häufig nützlich, zu krummlinigen Koordinaten überzugehen, z.B. zum Zweck der Berücksichtigung von Zwangsbedingungen. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen haben den Nachteil, nur in Galileischen Koordinatensystemen ihre einfache Gestalt $m\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t)$ anzunehmen. In den folgenden Abschnitten entwickeln wir die Lagrange–Formulierung der Mechanik, mit der Lagrange–Funktion als zentraler Größe, die eine viel größere Freiheit in der Koordinatenwahl läßt. Insbesondere gestattet sie eine durchsichtige Formulierung des Zusammenhangs zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen. Ferner ist die Lagrange–Funktion die fundamentale Größe in der relativistisch kovarianten Formulierung der Quantenfeldtheorie.

2.1 Variationsrechnung

(Arnold, Seiten 55ff.)

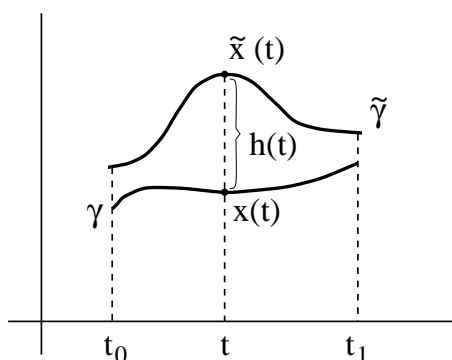
Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit den Extrema von Funktionen, deren Definitionsbereich ein unendlichdimensionaler Raum ist: eine Menge von Kurven. Solche Funktionen heißen **Funktionale**.

Ein Beispiel für ein Funktional ist die Länge L des Graphen einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t)$, im Euklidischen \mathbb{R}^{n+1} :

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + |\dot{x}(t)|^2} dt.$$

Allgemeiner ist ein Funktional Φ irgendeine Abbildung vom Raum der Kurven in die reellen Zahlen.

Nun betrachten wir neben $\gamma : t \mapsto x(t)$ eine zweite Kurve, $\tilde{\gamma} : t \mapsto \tilde{x}(t) = x(t) + h(t)$, und schreiben $\tilde{\gamma} = \gamma + h$.



Als Funktionenraum legen wir den Banachraum $C^0(I)$ aller stetigen beschränkten Funktionen $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit Norm $\|h\| = \sup_{t \in I} |h(t)|$ zugrunde.

DEFINITION 2.1 Ein Funktional Φ heißt **differenzierbar** (in γ), wenn sich das Inkrement $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma)$ wie

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F(\gamma, h) + R(\gamma, h)$$

schreiben läßt, wobei F linear von h abhängt und R stärker als von 1. Ordnung mit h gegen Null geht, d.h. falls $\|h\| < \varepsilon$, dann soll gelten: $|R(\gamma, h)| < C\varepsilon^\alpha$ mit $\alpha > 1$. Der lineare Anteil, F , heißt die **Variation** von Φ . Man schreibt auch $F(\gamma, h) = D_\gamma \Phi(h)$ und nennt $D_\gamma \Phi$ die **Funktionalableitung** von Φ in γ .

Mitteilung: Es läßt sich zeigen, daß die Variation eines differenzierbaren Funktionals eindeutig bestimmt ist.

Für die klassische Mechanik sind Funktionale der Form

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

interessant, mit L einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $L : V \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir bleiben vorerst beim Fall $f = 1$ und verlangen $\gamma \in C^1[t_0, t_1]$, damit $\Phi(\gamma)$ definiert ist.

SATZ 2.1 Das Funktional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$ ist differenzierbar und hat die Variation

$$F(\gamma, h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(L(x + h, \dot{x} + \dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Hieraus liest man ab:

$$F(\gamma, h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \quad \text{und} \quad R(\gamma, h) = \mathcal{O}(h^2).$$

Partielles Integrieren liefert

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} dt = - \int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1},$$

und somit die Behauptung.

Bemerkung: Das Symbol $\frac{d}{dt}$ steht für **totale Zeitableitung**, d.h. für die Ableitung nach der variablen Zeit einer Kurve $\gamma : t \mapsto x(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} h(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

Dagegen stehen $\partial L / \partial x$, $\partial L / \partial \dot{x}$, $\partial L / \partial t$ für die partielle Ableitung von L nach dem ersten, zweiten bzw. dritten Argument.

DEFINITION 2.2 Ein differenzierbares Funktional Φ heißt **extremal** in γ , wenn gilt $F(\gamma, h) = 0$ für alle h .

SATZ 2.2 Auf der eingeschränkten Menge von differenzierbaren Kurven, die durch die Punkte $x(t_0) = x_0$ und $x(t_1) = x_1$ passieren, ist das Funktional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$ genau dann extremal in γ , wenn längs γ gilt $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$.

Bemerkung: Mit $T\gamma(t) := (x(t), \dot{x}(t), t)$ lautet die Bedingung ausführlich geschriebenen $\left(\frac{\partial L}{\partial x} \circ T\gamma \right)(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \circ T\gamma \right)(t) = 0$ für alle $t \in [t_0, t_1]$.

Beweis des Satzes: Eine Beweisrichtung (\Leftarrow) ist trivial. Der andere Schluß (\Rightarrow) folgt mit der Einschränkung an die zulässigen Kurven ($h(t_0) = h(t_1) = 0$) aus Satz 2.1 zusammen mit dem Fundamentallema der Variationsrechnung, nämlich der Aussage: verschwindet für eine stetige Funktion $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ das Integral $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt$ für alle $h \in C^0[t_0, t_1]$, so gilt $f \equiv 0$.

Beispiel: Wir verifizieren, daß die Extrema der Kurvenlänge $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$ Geraden sind. Wir haben $L(x, \dot{x}, t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ und

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \frac{\ddot{x}}{(1 + \dot{x}^2)^{3/2}} = 0.$$

Es folgt $\ddot{x} = 0$ und damit $x(t) = c_1 t + c_2$.

DEFINITION 2.3 *Die Gleichung*

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

heißt die **Euler-Lagrange-Gleichung** zum Funktional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$.

$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)$ nennen wir die **Euler-Ableitung** von L .

Die Verallgemeinerung der Definitionen und Sätze in diesem Abschnitt auf ein Funktional $\Phi = \int L dt$ mit $L : V \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f > 1$ ist so offensichtlich, daß wir sie nicht kommentieren.

2.2 Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichungen

Es soll nun erläutert werden, was der Inhalt von Abschnitt 2.1 mit der klassischen Mechanik zu tun hat. Im folgenden verwenden wir die Schreibweise $\partial L / \partial \mathbf{q}_i = (\partial L / \partial q_{ix}, \partial L / \partial q_{iy}, \partial L / \partial q_{iz})$.

Wir betrachten ein mechanisches System von N Punkten (im \mathbb{R}^3) mit Massen m_1, \dots, m_N , Ortsvektoren $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$, und konservativen Kräften mit potentieller Energie $U(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$. Wir vergleichen die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{q}}_i) = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (2.1)$$

mit den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.2)$$

zu einem noch zu definierenden Funktional

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_N(t), \dot{\mathbf{q}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{q}}_N(t), t) dt.$$

SATZ 2.3 (“HAMILTONSCHES PRINZIP DER KLEINSTEN WIRKUNG”) *Lösungen des mechanischen Systems (2.1) zu den Randwerten $\mathbf{q}_i(t_0) = \mathbf{q}_i^{(0)}$, $\mathbf{q}_i(t_1) = \mathbf{q}_i^{(1)}$, ($i = 1, \dots, N$) sind Extrema des Funktionals $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ (mit denselben Randwerten für die zulässigen Kurven), wobei $L = T - U$ die Differenz von kinetischer und potentieller Energie ist.*

Beweis: Nach Satz 2.2 ist lediglich zu verifizieren, daß die Gleichungen (2.1) und (2.2) äquivalent sind. Dies sieht man aber sofort aus $\partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$ und $\partial L / \partial \mathbf{q}_i = -\partial U / \partial \mathbf{q}_i$ für $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i^2 - U(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$.

DEFINITION 2.4 $L = T - U$ heißt **Lagrange-Funktion**, $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ **Wirkung**, und die Gleichungen $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i}$ ($i = 1, \dots, N$) heißen **Lagrange-Gleichungen**.

Bemerkung 1: Der Name von Satz 2.3 hat historischen Gründe. Besser wäre ‘‘Hamiltonsches Prinzip der extremalen Wirkung’’.

Bemerkung 2: Daß die Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung die Teilchenorte zu *verschiedenen* Zeiten vorgibt und festhält, widerspricht scheinbar dem Geist der Newtonschen Mechanik, wo ja der *Anfangszustand*, also alle Orte und Geschwindigkeiten zur Anfangszeit, vorzugeben sind. Eine tiefere Einsicht in den Sinn des Wirkungsprinzips gewinnt man erst im Licht der Feynmanschen Formulierung der Quantenmechanik.

Der hier eingeführte Formalismus ist unter anderem deshalb nützlich, weil sich die Bewegungsgleichungen für eine sehr große Klasse von mechanischen Systemen in der Form von Lagrange-Gleichungen zu einem Wirkungsfunktional mit Lagrange-Funktion L schreiben lassen.

Beispiel: Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten hier

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = e\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + e\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \quad (2.3)$$

wobei \mathbf{E} (\mathbf{B}) das elektrische (magnetische) Feld ist. In der Elektrodynamik wird gezeigt, daß \mathbf{E} und \mathbf{B} sich folgendermaßen schreiben lassen:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad (2.4)$$

mit differenzierbaren Funktionen $\varphi(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$.

Behauptung: Eine Lagrange-Funktion für dieses System ist:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - e\varphi(\mathbf{x}, t) + e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

Beweis: Wir stellen die zugehörigen Lagrange-Gleichungen durch explizite Rechnung in Komponenten auf.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -e \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + e \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}. \\ \text{(ii)} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) &= m\ddot{x}_i + e \frac{d}{dt} A_i = m\ddot{x}_i + e \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Die Gleichung $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ lautet demnach

$$m\ddot{x}_i = e \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + e \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = eE_i + e(\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B})_i,$$

was mit der i -ten Komponente von (2.3) übereinstimmt.

Wir betonen, daß sich **nicht für alle** mechanischen Systeme eine Lagrange-Funktion finden läßt. In dieser Vorlesung werden nur solche Systeme betrachtet, für die eine Lagrange-Funktion existiert. Solche Systeme nennen wir **Lagrange-Systeme**. Ist f die Zahl der Freiheitsgrade, so schreiben wir

$$L : \quad \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ (q, \dot{q}, t) \quad \mapsto \quad L(q, \dot{q}, t),$$

wobei q und \dot{q} abkürzend für (q_1, \dots, q_f) und $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ stehen.

Wir fragen nun, wann zwei Lagrange-Funktionen L_1 und L_2 dieselben Euler-Ableitungen besitzen und somit zu denselben Lagrange-Gleichungen führen.

SATZ 2.4 Die Euler-Ableitungen zweier Lagrange-Funktionen $L_1, L_2 : \mathbb{U} \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit einfach zusammenhängendem Definitionsgebiet $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^f$ sind genau dann identisch, wenn die Differenz $L_1 - L_2$ die totale Zeitableitung einer Funktion $M : \mathbb{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

Beweis:

(\Leftarrow) Sei $L_1 - L_2 = dM/dt$. Integration über die Zeit liefert

$$\int_{t_i}^{t_f} L_1 dt = \int_{t_i}^{t_f} L_2 dt + M \Big|_{t_i}^{t_f}.$$

Die Euler-Ableitung einer Lagrange-Funktion L ist gegeben durch die Variation des Funktional $\int_{t_i}^{t_f} L dt$ unter der Nebenbedingung, daß am Rand $t = t_i$ und $t = t_f$ nicht variiert wird. Wegen dieser Nebenbedingung trägt der Term $M \Big|_{t_i}^{t_f}$ nicht zur Euler-Ableitung bei, und es folgt sofort die Behauptung.

(\Rightarrow) Sei jetzt die Euler-Ableitung von $G := L_1 - L_2$ gleich Null. Als Konsequenz von Satz 2.1 ist dann das Integral

$$\int_{t_i}^{t_f} G(q(t) + h(t), \dot{q}(t) + \dot{h}(t), t) dt$$

von h unabhängig, vorausgesetzt es gilt $h(t_i) = h(t_f) = 0$. Diese Unabhängigkeit ermöglicht die Einführung einer Stammfunktion M für G . Dazu fixieren wir eine Anfangszeit t_i und einen Anfangsort q_i . Für beliebige Enddaten (t_f, q_f) wählen wir dann irgendeine differenzierbare Kurve $t \mapsto q(t)$ mit $q(t_i) = q_i$ und $q(t_f) = q_f$ und setzen

$$M(q_f, t_f) := \int_{t_i}^{t_f} G(q(t), \dot{q}(t), t) dt.$$

Auf diese Weise wird eine Funktion $M : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt. Für die totale Zeitableitung dieser Funktion gilt $dM/dt = L_1 - L_2$, denn

$$\frac{d}{dt} M(q(t), t) = \frac{d}{dt} \int_{t_i}^t G(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau) d\tau = G(q(t), \dot{q}(t), t).$$

Beispiel: Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld. Die durch (2.4) gegebenen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} bleiben unter sogenannten **Eichtransformationen**

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \text{grad}\chi, \quad \varphi \mapsto \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

$(\chi(\mathbf{x}, t) \in C^2, \text{sonst beliebig})$ ungeändert, was man mit $\text{rot grad} = 0$ und $\text{grad } \frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} = 0$ sofort einsieht. Die Lagrange-Funktion (2.5) ändert sich dabei um eine totale Zeitableitung:

$$L \mapsto L + e \left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial\chi}{\partial x_k} \dot{x}_k \right) = L + \frac{d}{dt}(e\chi),$$

weshalb die zugehörigen Lagrange-Gleichungen unter Eichtransformationen invariant sind. In (2.3), wo nur die "eichinvarianten" Größen \mathbf{E} und \mathbf{B} eingehen, ist diese Eigenschaft explizit.

2.2.1 Invarianz unter Punkttransformationen

Wie verhalten sich die Lagrange-Gleichungen unter Koordinatenwechsel?

Als grundlegende Eigenschaft verlangen wir von jeder Lagrange-Funktion, daß sie eine koordinatenunabhängige Bedeutung hat. Für die schon angesprochenen Beispiele, insbesondere für $L = T - U$, ist diese Eigenschaft offensichtlich. Wir deklarieren sie hier als allgemeines Prinzip.

Die koordinatenfreie Bedeutung der Lagrange-Funktion L überträgt sich auf das Wirkungsfunktional $S = \int L dt$. Die Lagrange-Gleichungen folgen aus $S = \int L dt$ per Variation unter Nebenbedingungen. Da auch letztere Operation koordinatenfrei erklärt ist, haben die Lagrange-Gleichungen immer dieselbe Form, unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

DEFINITION 2.5 Eine Abbildung $U \times \mathbb{R} \rightarrow U \times \mathbb{R}$ der Form $(q, t) \mapsto (\varphi(q, t), t)$ heißt **Punkttransformation**.

SATZ 2.5 Die Lagrange-Gleichungen behalten unter Punkttransformationen ihre Form.

Beispiel: Teilchen im Zentralkraftfeld, $L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - U(|\mathbf{x}|)$, in zwei Dimensionen. Die Einführung von ebenen Polarkoordinaten durch

$$x_1 = r \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \phi,$$

führt auf $L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r)$. Die Lagrange-Gleichungen in diesen Koordinaten sind

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + U'(r) \quad \text{und} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi}). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung besagt, daß der Drehimpuls $l = mr^2 \dot{\phi}$ erhalten ist. Wenn wir $\dot{\phi} = l/mr^2$ in die erste Gleichung einsetzen, dann entsteht

$$m\ddot{r} + V'(r) = 0 \quad \text{mit} \quad V(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

Dies ist die in 1.8 ausführlich diskutierte Bewegungsgleichung für die Radialkoordinate r .

DEFINITION 2.6 Wir benützen die folgende Terminologie. Ist $L(q, \dot{q}, t)$ die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems, so nennen wir q_k ($k = 1, \dots, f$) **verallgemeinerte Koordinaten**, \dot{q}_k **verallgemeinerte Geschwindigkeiten**, $\partial L / \partial \dot{q}_k =: p_k$ **verallgemeinerte Impulse** und $\partial L / \partial q_k$ **verallgemeinerte Kräfte**.

Beachte, daß im obigen Beispiel der verallgemeinerte Impuls zur Winkelkoordinate ϕ gerade der Drehimpuls ist. Wie man dort sehen konnte, folgt Drehimpulserhaltung aus der Winkelunabhängigkeit von L . Dies motiviert die folgende

DEFINITION 2.7 Eine verallgemeinerte Koordinate heißt **zyklisch**, wenn die Lagrange-Funktion von ihr unabhängig ist.

SATZ 2.6 Der verallgemeinerte Impuls p_k zu einer zyklischen Koordinate q_k ist erhalten: $\dot{p}_k = \text{const.}$

Beweis: $\dot{p}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$.

2.3 Symmetrien und Erhaltungssätze

In diesem Abschnitt wird der soeben formulierte Zusammenhang zwischen der Existenz von zyklischen Koordinaten und der Gültigkeit von Erhaltungssätzen erweitert.

Wir betrachten ein Lagrange-System mit Lagrange-Funktion $L : U \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zu einer einparametrischen Schar von Abbildungen $\varphi^s : V \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^f$ seien $\tilde{T}\varphi^s$ die induzierten Abbildungen

$$\tilde{T}\varphi^s : (q, \dot{q}, t) \mapsto \left(\varphi^s(q, t), \frac{d}{dt}\varphi^s(q, t), t \right).$$

Für jedes feste Paar s, t sei $\varphi^s(\bullet, t) : V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus.

SATZ 2.7 (“NOETHER-THEOREM”) *Es gelte $\varphi^0(q, t) = q$ und $L \circ \tilde{T}\varphi^s = L + \frac{dM_s}{dt}$, wobei $\frac{dM_s}{dt}$ die totale Zeitableitung einer Funktion $M_s : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei. Dann ist*

$$I := \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\varphi_k^s}{ds} - \frac{dM_s}{ds} \right) \Big|_{s=0}$$

ein erstes Integral der Bewegung des Lagrange-Systems mit Lagrange-Funktion L .

Beweis: Gemäß Definition 1.22 ist nachzuweisen, daß für jede Lösung $\gamma : t \mapsto q(t)$ des Lagrange-Systems gilt $\frac{d}{dt}I(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$. Dazu differenzieren wir die Gleichung $L \circ \tilde{T}\varphi^s - \frac{dM_s}{dt} = L$ nach s an der Stelle $s = 0$ und erhalten

$$\frac{d}{ds}(L \circ \tilde{T}\varphi^s) \Big|_{s=0} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dM_s}{ds} \right) \Big|_{s=0} = 0. \quad (2.6)$$

Der erste Term auf der linken Seite ist (beachte $\varphi^{s=0}(\bullet, t) = \text{Id}$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(L \circ \tilde{T}\varphi^s) \Big|_{s=0} &= \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{d\varphi_k^s}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi_k^s}{ds} \right) \right) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\varphi_k^s}{ds} \right) \Big|_{s=0}, \end{aligned}$$

wobei für das zweite Gleichheitszeichen die Bewegungsgleichung $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ verwendet wurde. In (2.6) einsetzen liefert jetzt die Aussage des Satzes.

Bemerkung: Die Bedingung $L \circ \tilde{T}\varphi^s = L + \frac{dM_s}{dt}$ läßt sich folgendermaßen interpretieren. Nach Satz 2.4 sind die Euler-Ableitungen von L und $L + \frac{dM_s}{dt}$ identisch. Durch $Q(t) := \varphi^s(q(t), t)$ wird deshalb jede Lösung $q(t)$ der Lagrange-Gleichungen zur Lagrange-Funktion L auf eine Lösung $Q(t)$ derselben Gleichungen abgebildet. Eine Abbildung φ^s mit dieser Eigenschaft nennen wir eine **Symmetrie-Transformation** von L . Mit diesem Begriff können wir den Inhalt des Satzes auch so umschreiben:

Zu jeder einparametrischen (die Identität enthaltenden) Schar von Symmetrie-Transformationen existiert ein Erhaltungssatz.

Beispiele: Die zehn Erhaltungssätze für das abgeschlossene N -Teilchensystem. Diese Erhaltungssätze werden wir nun in mehr Detail diskutieren.

(i) Invarianz unter **Raumtranslationen** und **Impulserhaltung**.

Wir betrachten ein System von N Punkten im \mathbb{R}^3 mit Lagrange-Funktion $L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t)$. Zu den Raumtranslationen

$$\varphi^s : \mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{x}_i + s\mathbf{a} \quad (i = 1, \dots, N)$$

gehören die Abbildungen

$$T\varphi^s : (\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i) \mapsto (\mathbf{x}_i + s\mathbf{a}, \dot{\mathbf{x}}_i) \quad (i = 1, \dots, N).$$

Invarianz von L unter Raumtranslationen ist gleichbedeutend mit $L \circ \tilde{T}\varphi^s = L$.

Diese Bedingung ist z.B. erfüllt für

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \sum_{i < j} U_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|). \quad (2.7)$$

Wir haben $\left. \frac{d\varphi_i^s}{ds} \right|_{s=0} = \mathbf{a}$ und erhalten mit dem Noether-Theorem

$$I = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \cdot \mathbf{a} = \text{const} \text{ oder, da } \mathbf{a} \text{ beliebig ist, } \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \partial L / \partial \dot{\mathbf{x}}_i = \text{const}.$$

Dies ist die Aussage des Impulssatzes. Für die spezielle Lagrange-Funktion

(2.7) erhalten wir den Impuls des Systems in der uns bekannten Form $\mathbf{P} =$

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i.$$

(ii) Invarianz unter **Raumdrehungen** und **Drehimpulserhaltung**.

Um konkret zu sein, betrachten wir eine Schar von Drehungen um die 3-Achse:

$$\varphi^s : \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ x_i^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(s)x_i^1 - \sin(s)x_i^2 \\ \sin(s)x_i^1 + \cos(s)x_i^2 \\ x_i^3 \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, N).$$

L ist invariant unter Drehungen um die 3-Achse, falls gilt $L \circ \tilde{T}\varphi^s = L$. Dies

ist z.B. erfüllt für die Lagrange-Funktion (2.7). Wir haben

$$\left. \frac{d\varphi_i^s}{ds}(x) \right|_{s=0} = \begin{pmatrix} -x_i^2 \\ +x_i^1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus folgt

$$I = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^1} (-x_i^2) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^2} x_i^1 \right) = \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{x}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \right)_3 = \text{const}.$$

Invarianz unter Drehungen um eine **beliebige** Achse liefert

$$\mathbf{L} := \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} = \text{const}.$$

Dies ist die Aussage des Drehimpulssatzes. Für die Lagrange-Funktion (2.7) erhalten wir speziell $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \wedge m_i \dot{\mathbf{x}}_i$.

(iii) **Spezielle Galilei-Transformationen und Schwerpunktsatz.**

Wir betrachten eine Schar von speziellen Galilei-Transformationen mit den Geschwindigkeiten $s\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned} \varphi^s : \quad \mathbf{x}_i &\mapsto \mathbf{x}_i + s\mathbf{w}t, \\ T\varphi^s : \quad (\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i) &\mapsto (\mathbf{x}_i + s\mathbf{w}t, \dot{\mathbf{x}}_i + s\mathbf{w}) \end{aligned}$$

($i = 1, \dots, N$). In der weiteren Rechnung beschränken wir uns auf das Beispiel (2.7). Wir zeigen zunächst, daß φ^s eine Schar von Symmetrie-Transformationen der Lagrange-Funktion (2.7) ist. In der Tat gilt:

$$L \circ \tilde{T}\varphi^s - L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left((\dot{\mathbf{x}}_i + s\mathbf{w})^2 - \dot{\mathbf{x}}_i^2 \right) = \frac{dM_s}{dt},$$

wobei $M_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (2s\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{w} + ts^2\mathbf{w}^2)$. Hierfür ist $\left. \frac{dM_s}{ds} \right|_{s=0} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{w}$, woraus folgt:

$$I = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \cdot \mathbf{w}t - m_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{w} \right) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{P}t - M\mathbf{Q}) = \text{const},$$

wobei \mathbf{Q} der Ortsvektor des Schwerpunkts und M die Gesamtmasse ist. In Kombination mit dem Impulssatz ($\mathbf{P} = \text{const}$) ist die zeitliche Konstanz von $\mathbf{P}t - M\mathbf{Q}$ zur Aussage des Schwerpunktsatzes äquivalent.

(iv) Invarianz unter **Zeittranslationen** und **Energieerhaltung**.

Wir behaupten, Energieerhaltung sei eine Konsequenz der Invarianz der Lagrange-funktion unter Zeittranslationen, d.h. wenn $L(a, b, c + s) = L(a, b, c)$ und $L = T - U$, dann ist $E := T + U$ ein erstes Integral der Bewegung. Leider gehören Zeittranslationen nicht zu der hier betrachteten Klasse von Transformationen. Wir können daher aus der obigen Formulierung des Noether-Theorems **nicht** auf den Energiesatz schließen. (Er folgt allerdings aus einer kleinen separaten Überlegung, die hier nicht aufgeschrieben ist.) In der kanonischen Mechanik werden wir das Noether-Theorem neu formulieren, und zwar so, daß auch der Energiesatz erfaßt wird.

2.4 Zwangsbedingungen

In vielen physikalischen Systemen läßt sich eine grobe Einteilung der wirkenden Kräfte in zwei Kategorien vornehmen: “stark” und “schwach”. Zum Beispiel sind die chemischen Bindungskräfte zwischen den Kohlenstoffatomen eines Diamanten sehr viel stärker als die auf die Einzelatome wirkende gravitative Anziehung durch die Erde. Wie man in einem solchen Fall, wo eine klare Trennung zwischen “starken” und “schwachen” Kräften vorliegt, vorzugehen hat, ist Thema des gegenwärtigen Abschnitts.

Wir wollen von der Annahme ausgehen, daß infolge der Wirkung der “starken” Kräfte die Bewegung eines Teils der Freiheitsgrade des mechanischen Systems auf eine sehr kleine Umgebung eines bestimmten Unterraums des Phasenraums eingeschränkt wird. Zum Beispiel ändern sich unter normalen Bedingungen die Abstände zwischen den Kohlenstoffatomen in einer Diamantstruktur nur geringfügig als Funktion der Zeit, wogegen der Diamant als ganzes relativ leicht beweglich ist. In diesem Fall ist es eine für viele Zwecke vernünftige mathematische Idealisierung, den Grenzübergang zu unendlich starken Bindungskräften durchzuführen und die Relativbewegung der Kohlenstoffatome überhaupt zu unterdrücken.

Das Beispiel des Diamanten deutet einen allgemeinen Mechanismus an, wie “starke” Kräfte zu einer Einschränkung der Bewegung der konstituierenden Massenpunkte führen. Ein einfaches und pragmatisches Vorgehen besteht nun darin, die Einschränkung der Bewegung durch die Vorgabe von sogenannten **Zwangsbedingungen** zu bewerkstelligen. Im genannten Beispiel würde man als die Zwangsbedingungen die Gesamtheit aller Bedingungen wählen, die die Relativpositionen aller Kohlenstoffatome festsetzen. Weitere Beispiele für mechanische Systeme, bei denen sich eine Behandlung mittels Zwangsbedingungen empfiehlt, sind:

- (i) Die Bewegung eines Punkts (oder mehrerer Punkte) verläuft auf einer vorgegebenen Fläche.
- (ii) Gasteilchen, die in ein Volumen eingeschlossen sind.

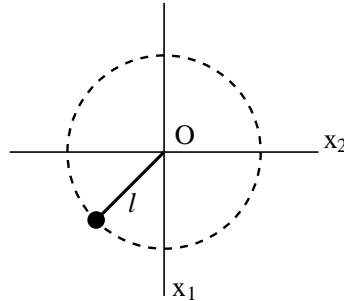
Wir bezeichnen mit n die Zahl der Freiheitsgrade **vor** Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (also $n = 3N$ für ein System von N Punkten im \mathbb{R}^3) und mit x_1, \dots, x_n die Gesamtheit der Koordinaten des mechanischen Systems.

DEFINITION 2.8 *Eine Zwangsbedingung heißt **holonom**, wenn sie sich in der Form einer Gleichung*

$$f(x_1, \dots, x_n, t) = 0$$

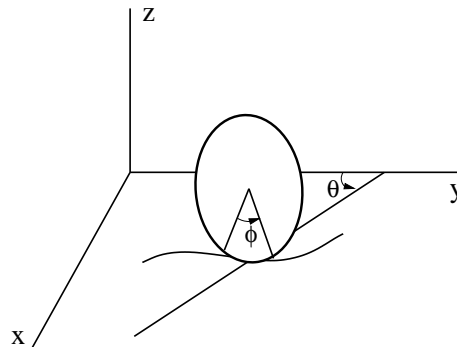
ausdrücken läßt.

Beispiel: Die Bewegung des ebenen Pendels unterliegt der holonomen Zwangsbedingung $x_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0$.



In dieser Vorlesung werden nur holonome Zwangsbedingungen diskutiert. Ein einfaches Beispiel für ein System mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen ist das folgende (siehe Goldstein, Mechanik).

Betrachten wir eine Scheibe, die auf der horizontalen xy -Ebene rollt. Sie sei gezwungen, sich so zu bewegen, daß die Ebene der Scheibe stets vertikal ist. (Die Scheibe könnte eines von zwei Rädern sein, die auf einer gemeinsamen Achse angebracht sind.) Zur Beschreibung der Bewegung kann man als Koordinaten die zwei Koordinaten x, y des Scheibenzentrums, einen Drehwinkel ϕ um die Scheibenachse und einen Winkel θ zwischen Scheibenachse und, sagen wir, der y -Achse wählen.



Vertikale Scheibe, die auf einer horizontalen Ebene rollt.

Infolge des Zwangs (die Scheibe rollt ohne Schlupf) ist der Betrag der Geschwindigkeit des Scheibenzentrums proportional zu $\dot{\phi}$: $v = a\dot{\phi}$, wobei a der Radius der Scheibe ist, und der Geschwindigkeitsvektor steht senkrecht zur Scheibenachse: $\dot{x} = v \cos \theta$, $\dot{y} = v \sin \theta$. Kombinieren wir diese Bedingungen, so erhalten wir zwei Differentialgleichungen für die Zwangsbedingungen

$$dx - a \cos \theta d\phi = 0,$$

$$dy - a \sin \theta d\phi = 0,$$

und diese können nicht integriert werden, ehe man nicht das vollständige Problem tatsächlich gelöst hat. Solche **nichtintegrierbaren** Zwangsbedingungen sind nur spezielle Fälle nichtholonomer Zwangsbedingungen; die Zwangsbedingungen können auch in Form von Ungleichungen auftreten.

Im allgemeinsten hier betrachteten Fall liegen r holonome Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, t) &= 0, \\ &\vdots \\ f_r(x_1, \dots, x_n, t) &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

vor. Die Funktionen f_k seien genügend oft stetig differenzierbar. Wir wollen annehmen, daß die Zwangsbedingungen unabhängig sind, d.h. es gelte

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right)_{k=1, \dots, r; l=1, \dots, n} = r$$

für alle x_1, \dots, x_n, t , die (2.8) erfüllen.

Vom Newtonschen Standpunkt aus gesehen signalisiert die Existenz von Zwangsbedingungen die Anwesenheit von sogenannten **Zwangskräften**, die dafür sorgen, daß die Bewegung des mechanischen Systems auf der durch (2.8) festgelegten (möglicherweise zeitabhängigen) Teilmenge des \mathbb{R}^n verläuft. Gäbe es diese Kräfte nämlich nicht und verschwänden auch alle anderen Kräfte, so wäre die Bewegung der Punkte gleichförmig geradlinig und könnte im allgemeinen nicht die Bedingungen (2.8) erfüllen.

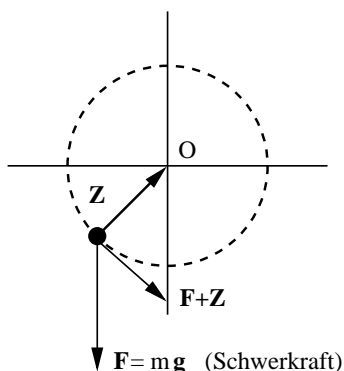
Die Zwangskräfte sind per Postulat **idealer** Natur: sie leisten keine Arbeit, d.h. sie "stehen senkrecht" auf der durch (2.8) ausgezeichneten Teilmenge des \mathbb{R}^n , auf der die Bewegung verläuft. (Eine präzise Formulierung dieses Sachverhalts wird unten im d'Alembertschen Prinzip gegeben.) Bezeichnen wir die Summe der inneren und/oder äußeren Kräfte, die das mechanische System antreiben, mit F und die Zwangskräfte mit Z , so lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_k \ddot{x}_k = F_k + Z_k \quad (k = 1, \dots, n). \tag{2.9}$$

Die Notation ist hier so gewählt, daß für ein System von N Punkten im \mathbb{R}^3 ($n = 3N$) gilt: $m_1 = m_2 = m_3 =$ Masse des ersten Punkts, $m_4 = m_5 = m_6 =$ Masse des zweiten Punkts usw.

Beispiel: Beim ebenen Pendel wirkt zusätzlich zur Schwerkraft $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ eine Zwangskraft \mathbf{Z} in Richtung der Pendelachse, und zwar so, daß die Vektorsumme $\mathbf{F} + \mathbf{Z}$ tangential zum Kreis des Pendels liegt.

Die Beschreibung der Bewegung des Systems anhand von Koordinaten (2.9) ist unökonomisch: sie erfordert mehr Koordinaten als wegen der Existenz der Zwangs-



bedingungen (2.8) nötig ist, und sie involviert die (zunächst) unbestimmten Funktionen Z_k . Es liegt auf der Hand, welches Ziel man hier verfolgen sollte: man wird versuchen, zu $f = n - r$ Bewegungsgleichungen für f verallgemeinerte Koordinaten überzugehen, wo die Zwangskräfte nicht mehr zur Erscheinung treten. Für den Fall holonomer Zwangsbedingungen läßt sich dieses Ziel in der Tat erreichen. Wir geben zunächst die Vorschrift an, nach der man in der Praxis vorgeht, und schicken eine Begründung hinterher.

Gebrauchsanweisung:

Gegeben sei ein System mit Lagrange-Funktion $L(x, \dot{x}, t)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

- (A) Löse die Bedingungen (2.8) durch die Einführung von $f = n - r$ verallgemeinerten Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_f)$, d.h. konstruiere Funktionen $\varphi_l(q_1, \dots, q_f, t)$ ($l = 1, \dots, n$) mit der Eigenschaft, daß die Gleichungen

$$f_k(\varphi_1(q, t), \dots, \varphi_n(q, t), t) = 0 \quad (k = 1, \dots, r)$$

für alle $(q, t) \in V \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}$ erfüllt sind. Die (lokale) Existenz solcher Funktionen ist durch den Satz über implizit definierte Funktionen und die Bedingung an den Rang von $\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right)$ gesichert.

- (B) Definiere die Lagrange-Funktion des Systems **mit** Zwangsbedingungen, $\bar{L}(q, \dot{q}, t)$, durch Einsetzen der Funktionen φ_l in die Lagrange-Funktion L des Systems ohne Zwangsbedingungen:

$$\bar{L}(q, \dot{q}, t) := L(\varphi_1(q, t), \dots, \varphi_n(q, t), \dot{\varphi}_1(q, t), \dots, \dot{\varphi}_n(q, t), t).$$

Wie zuvor ist $\dot{\varphi}_k(q, t) = \sum_{l=1}^f \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l}(q, t) \dot{q}_l + \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}(q, t)$.

- (C) Stelle die Lagrange-Gleichungen zu \bar{L} auf:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f).$$

Dies sind die in den verallgemeinerten Koordinaten q_1, \dots, q_f ausgedrückten Bewegungsgleichungen des Lagrange-Systems mit Zwangsbedingungen.

Bemerkung: Folgt man dieser Vorschrift, so sind die Zwangsbedingungen identisch erfüllt, und die Einführung von Zwangskräften erübrigt sich.

Beispiel: Ebenes Pendel.

Hierunter verstehen wir einen Punkt mit Masse m , der sich unter dem Einfluß der Schwerkraft auf einer Kreislinie im \mathbb{R}^2 bewegt, die wir o.B.d.A. als die Lösungsmenge der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0$ wählen. Zur Implementierung dieser Zwangsbedingung empfiehlt sich die Einführung eines Winkels θ durch

$$x_1 = \varphi_1(\theta) = l \cos \theta, \quad x_2 = \varphi_2(\theta) = l \sin \theta.$$

Die Lagrange-Funktion $L = (m/2)(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + mgx_1$ reduziert sich dann zu $\bar{L}(\theta, \dot{\theta}) = (m/2)l^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$. Die Bewegungsgleichung für θ ist die Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta} = 0 = ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta.$$

Äquivalent gilt

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$$

mit $\omega = (g/l)^{1/2}$.

2.4.1 Begründung der Gebrauchsanweisung

In diesem Abschnitt begründen wir, warum die Gebrauchsanweisung richtig ist (Arnold, Seiten 91ff.).

Die Einfachheit halber betrachten wir ein autonomes System mit Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 - U(x), \quad |\dot{x}|^2 = \sum_{k=1}^n \dot{x}_k^2 \quad (2.10)$$

und zeitunabhängigen holonomen Zwangsbedingungen

$$f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0. \quad (2.11)$$

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten in diesem Fall

$$m\ddot{x} + \text{grad}U = Z, \quad (2.12)$$

mit Z der Zwangskraft.

Wir bezeichnen mit M die Lösungsmenge der holonomen Bedingungen (2.11),

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f_l(x) = 0; l = 1, \dots, r \right\},$$

und definieren zu jedem $x \in M$ einen linearen Raum

$$T_x M := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid (df_l)_x(\xi) = 0; l = 1, \dots, r \right\}.$$

$T_x M$ heißt der **Tangentialraum** an die differenzierbare Mannigfaltigkeit M im Punkt x .

D'Alembertsches Prinzip: Die Zwangskraft Z steht in jedem Punkt $x \in M$ senkrecht auf $T_x M$:

$$\langle Z, \xi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \xi \in T_x M. \quad (2.13)$$

Hierbei ist $\langle \bullet, \bullet \rangle$ das vom Euklidischen \mathbb{R}^3 ererbte Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n : $\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^n a^k b^k$. Wir sagen auch: **Zwangskräfte leisten keine virtuelle Arbeit.**

Bemerkung: Das d'Alembertsche Prinzip läßt sich nicht aus (2.11) und (2.12) deduzieren, sondern muß hier als zusätzliches physikalisches Postulat investiert werden. Es impliziert, daß das System auf dem durch die Zwangsbedingungen (2.11) eingeschränkten Konfigurationsraum, nämlich auf M , "ideal gleitet", daß also insbesondere Reibungsverluste – die ja in realen Systemen immer vorliegen – vernachlässigbar sind. Mit (2.12) können wir anstelle von (2.13) auch schreiben:

$$\langle m\ddot{x} + \text{grad}U, \xi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \xi \in T_x M.$$

Sei nun $\varphi : V \subset \mathbb{R}^f \rightarrow M$, $q \mapsto \varphi(q) = (\varphi_1(q), \dots, \varphi_n(q))$ die Abbildung von Schritt (A) der Gebrauchsanweisung, und

$$\begin{aligned} T\varphi : V \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f &\rightarrow TM \\ (q, \dot{q}) &\mapsto (\varphi(q), D_q\varphi(\dot{q})) \end{aligned}$$

die zugehörige **Tangentialabbildung**. Wie in Schritt (B) bilden wir

$$\bar{L} := L \circ T\varphi.$$

SATZ 2.8 Sei $\gamma : [t_0, t_1] \in \mathbb{R} \rightarrow V$, $t \mapsto q(t)$ eine Kurve und $\varphi \circ \gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$, $t \mapsto x(t)$ ihr Bild unter φ . Wir schreiben $q(t_j) = q^{(j)}$, $x(t_j) = x^{(j)}$ ($j = 0, 1$). Dann sind die folgenden Aussagen zueinander äquivalent:

(i) Das Wirkungsfunktional $\bar{S}(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}(q(t), \dot{q}(t)) dt$ ist extremal in γ auf der durch $q(t_0) = q^{(0)}$ und $q(t_1) = q^{(1)}$ eingeschränkten Menge von differenzierbaren Kurven.

(ii) Das d'Alembertsche Prinzip ist erfüllt:

$$\langle m\ddot{x} + \text{grad}U, \xi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \xi \in T_x M.$$

Bemerkung: Es wird also die Äquivalenz des d'Alembertschen Prinzips zum Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung (für die Bewegung auf TM) behauptet.

Beweis des Satzes:

Die Extremalität von \bar{S} in γ bedeutet

$$0 = D_\gamma \bar{S}(h) := \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t)) dt \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Um diese Bedingung auszuwerten, gehen wir zu $\varphi \circ \gamma$ über:

$$\begin{aligned} \varphi(q(t) + \varepsilon h(t)) &= x(t) + \varepsilon \xi(t) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{\varphi}(q(t) + \varepsilon h(t)) &= \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{\xi}(t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

wobei $\xi(t) := D_{q(t)}\varphi(h(t))$. Dann entsteht:

$$\begin{aligned} 0 = D_\gamma \bar{S}(h) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} L(x + \varepsilon \xi, \dot{x} + \varepsilon \dot{\xi}) dt \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m}{2} |\dot{x} + \varepsilon \dot{\xi}|^2 - U(x + \varepsilon \xi) \right) dt \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\langle m\dot{x}, \dot{\xi} \rangle - (dU)_x(\xi) \right) dt \\ &\stackrel{\xi(t_0)=\xi(t_1)=0}{=} - \int_{t_0}^{t_1} \langle m\ddot{x} + \text{grad}U, \xi \rangle dt = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Da $h(t)$ beliebig gewählt werden kann, ist auch $\xi(t) \in T_{x(t)}M$ beliebig. Damit folgt aus Gleichung (2.14) die Äquivalenz von (i) und (ii). ■

Hiermit ist aber jetzt die Richtigkeit der Gebrauchsanweisung gezeigt, denn aus dem Hamiltonschen Extremalprinzip für \bar{S} , (i), folgen die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f).$$

2.5 Kleine Schwingungen

(Arnold, Seiten 98ff.)

In diesem Abschnitt behandeln wir lineare Lagrangesche Systeme. Solche Systeme lassen sich in geschlossener Form lösen. (Sie sind in einem später definierten Sinn **integrierbar**.) In vielen nichtlinearen Problemen liefert eine lineare Näherung qualitativ richtige oder zufriedenstellende Ergebnisse. Selbst wenn dem nicht so ist, kann die Untersuchung des linear genäherten Systems häufig ein nützlicher Schritt auf dem Weg zum Verständnis des nichtlinearen Problems sein.

2.5.1 Gleichgewichtslagen

Betrachte das autonome dynamische System

$$\dot{x} = X(x). \quad (2.15)$$

Nach Definition 1.19 heißt ein Punkt x_0 des Definitionsbereichs von X singulär, wenn gilt $X(x_0) = 0$. Da für singuläres x_0 die konstante Funktion $x(t) = x_0$ die Gleichung (2.15) löst, nennen wir x_0 auch eine **Gleichgewichtslage** des dynamischen Systems.

Im folgenden beschäftigen wir uns mit einem autonomen Lagrangeschen System mit Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= T - U : V \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \rightarrow \mathbb{R}, \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad U = U(q). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die kinetische Energie hat positiv zu sein: $T \geq 0$ und $T = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$. (Eine kinetische Energie der hier vorgegebenen nicht diagonalen Form wird uns in der Theorie starrer Körper begegnen.)

Die Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ ($k = 1, \dots, f$) lassen sich als ein System von $2f$ Gleichungen erster Ordnung, also in der Form (2.15), schreiben. Hierzu setzen wir $p_k := \partial L / \partial \dot{q}_k = \sum_{l=1}^f m_{kl}(q) \dot{q}_l$. Dann entsteht:

$$\dot{q}_k = \sum_{l=1}^f m_{kl}^{-1}(q) p_l, \quad \dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f).$$

SATZ 2.9 *Ein Punkt (q_0, \dot{q}_0) ist eine Gleichgewichtslage des durch (2.16) definierten Lagrange-Systems genau dann, wenn gilt: $\dot{q}_0 = 0$ und q_0 ist kritischer Punkt von U .*

Beweis: Eine Richtung (\Leftarrow) ist klar. Für die andere Richtung (\Rightarrow) schreiben wir die Lagrange-Gleichungen in der Form

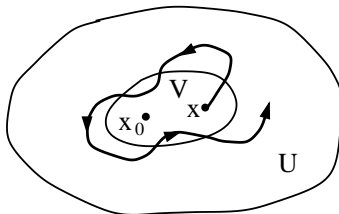
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f).$$

Wegen $q(t) \equiv q_0$ für eine Gleichgewichtslage muß notwendig gelten $\dot{q}_0 = 0$. Für $\dot{q}_0 = 0$ verschwindet aber $\partial T / \partial q_k$ wie auch $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dot{p}_k$. Deshalb ist $q(t) = q_0$ genau dann eine Lösung, wenn gilt: $(dU)_{q_0} = 0$.

2.5.2 Stabilität von Gleichgewichtslagen

Wir untersuchen nun die Bewegung zu Anfangsbedingungen in der Nähe einer Gleichgewichtslage.

DEFINITION 2.9 Eine Gleichgewichtslage x_0 eines Vektorfeldes X heißt **Liapunov-stabil**, falls es in jeder Umgebung U von x_0 eine Umgebung $V \subseteq U$ von x_0 gibt, sodaß für den Fluß ϕ_t von X gilt: $\phi_t(x) \in U$ für alle $x \in V$, $t \geq 0$.



Ein Liapunov-stabiler Punkt x_0

SATZ 2.10 Betrachte das Lagrange-System mit Lagrange-Funktion (2.16). Wenn q_0 ein striktes lokales Minimum der potentiellen Energie ist, dann ist die Gleichgewichtslage $(q_0, 0)$ Liapunov-stabil.

Beweis: Wir setzen $h := U(q_0)$. Durch geeignete Wahl von $\varepsilon > 0$ können wir diejenige Zusammenhangskomponente der Menge $\{q | U(q) \leq h + \varepsilon\}$, die q_0 enthält, beliebig klein machen. Seien $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ die verallgemeinerten Impulse und $H := T + U$ die Energie des Systems. Dann ist die entsprechende Zusammenhangskomponente Z_0 des Gebiets $\{(q, p) | H(q, p) \leq h + \varepsilon\}$ im Phasenraum eine beliebig kleine Umgebung des Punkts $(q, p) = (q_0, 0)$. Z_0 ist aber aufgrund des Energiesatzes unter dem Phasenfluß invariant. Deshalb verbleibt jede Phasenbahn $(q(t), p(t))$ in der Nähe von $(q_0, 0)$, wenn die Anfangsbedingung $(q(0), p(0))$ nahe genug bei $(q_0, 0)$ liegt.

2.5.3 Linearisierung

Wir kehren zu dem allgemeinen System (2.15) zurück. Bei der Untersuchung der Lösungen von (2.15) in der Nähe einer Gleichgewichtslage benutzen wir häufig eine lineare Approximation. (Siehe z.B. Abschnitt 1.7 dieses Skriptes.)

Taylor-Entwicklung des Vektorfeldes X um die Gleichgewichtslage x_0 liefert:

$$X(x) = D_{x_0} X(x - x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2),$$

und mit $K := D_{x_0} X$ erhalten wir für $y := x - x_0$ das linearisierte dynamische System

$$\dot{y} = Ky.$$

Das linearisierte System hat den Vorteil, daß es linear ist und der Fluß sofort angegeben werden kann:

$$\phi_t = \exp tK = \text{Id} + tK + \frac{1}{2!}t^2K^2 + \dots.$$

Wir möchten wissen, wie “gut” die Approximation ist. Falls die Gleichgewichtslage x_0 Liapunov-stabil ist, verweilt die Bewegung für alle Zeiten in der Nähe von x_0 (sofern die Anfangsbedingung nahe genug bei x_0 liegt), und die lineare Approximation gibt eine qualitativ richtige Beschreibung. In Abwesenheit von Liapunov-Stabilität wird nur die Kurzzeitdynamik richtig wiedergegeben.

Wir wenden uns wieder dem Lagrangeschen System mit Lagrange-Funktion (2.16) zu und linearisieren um eine Gleichgewichtslage, die wir o.B.d.A. am Punkt $q_0 = 0$ wählen. Dazu genügt es offensichtlich, die kinetische Energie $T = \frac{1}{2} \sum_{k,l} m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$ durch ihren Ausdruck für $q = q_0 = 0$ zu ersetzen,

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,l} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad A_{kl} := m_{kl}(0),$$

und die potentielle Energie quadratisch zu nähern,

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,l} B_{kl} q_k q_l, \quad B_{kl} := \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_l}(0).$$

Die Matrix K des linearisierten Systems hat in diesem Fall die Gestalt

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^{-1} \\ -\mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A} = (A_{kl}) \text{ und } \mathcal{B} = (B_{kl}),$$

und der Phasenfluß ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \phi_t = \exp(tK) &= \cosh(tK) + \sinh(tK) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}}) & \mathcal{A}^{-1} \frac{\sin(t\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}})}{\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}}} \\ -\mathcal{B} \frac{\sin(t\sqrt{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}})}{\sqrt{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}}} & \cos(t\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $\cos \sqrt{X} := \sum_{n=0}^{\infty} (-X)^n / (2n)!$ und $\sqrt{X}^{-1} \sin \sqrt{X} = \sum_{n=0}^{\infty} (-X)^n / (2n+1)!$. Ein anderes Verfahren zur Konstruktion dieses Phasenflusses ist Thema des nächsten Abschnitts.

2.5.4 Normalschwingungen

Wir betrachten jetzt das Problem **kleiner Schwingungen**, d.h. Bewegungen des linearisierten Lagrange-Systems mit Lagrange-Funktion

$$L = T - U, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f B_{kl} q_k q_l. \quad (2.17)$$

Zur vollständigen Lösung der Lagrange-Gleichungen ist es günstig zu abstrahieren. Sei $\{e_1, \dots, e_f\}$ eine Basis des Vektorraums \mathbb{R}^f . (Beachte, daß wir hier keine Euklidische Struktur auf \mathbb{R}^f voraussetzen!) Wir definieren zwei quadratische Formen

$A, B : \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Forderungen:

$$A(e_k, e_l) = A_{kl} \quad \text{und} \quad B(e_k, e_l) = B_{kl} \quad (k, l = 1, \dots, f).$$

Als quadratische Formen sind A und B symmetrisch in ihren Argumenten, $A(x, y) = A(y, x)$ und $B(x, y) = B(y, x)$. Wir setzen $x := \sum_{k=1}^f q_k e_k$ und können hiermit T und U koordinatenfrei aufschreiben:

$$T = \frac{1}{2} A(\dot{x}, \dot{x}) \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{2} B(x, x).$$

Da die kinetische Energie positiv definit ist, wird durch

$$\langle x, y \rangle_A := A(x, y)$$

ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^f erklärt.

SATZ 2.11 *Es existiert eine bezüglich $\langle \bullet, \bullet \rangle_A$ orthonormale Basis $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_f)$, welche die quadratische Form B auf Diagonalgestalt bringt: $B(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) = \lambda_k \delta_{kl}$.*

Bemerkung: Die Zahlen λ_k heißen die **Eigenwerte von B relativ zu A** .

Beweis des Satzes: Siehe Vorlesung/Textbuch über lineare Algebra.

KOROLLAR 2.11.1 *Die Zahlen λ_k sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda) = \det((B_{kl} - \lambda A_{kl}))$.*

Beweis: In der Basis $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_f$ gilt: $(B - \lambda A)(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) = (\lambda_k - \lambda) \delta_{kl}$. Die Determinante der Matrix von $B - \lambda A$ in dieser Basis ist somit $\prod_{k=1}^f (\lambda_k - \lambda)$, mit den Nullstellen $\lambda = \lambda_k$ ($k = 1, \dots, f$). Das Verschwinden der Determinante ist eine Eigenschaft, die nicht von der Wahl der Basis abhängt.

KOROLLAR 2.11.2 *Die Basisvektoren $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_f$ genügen den Gleichungen*

$$(B - \lambda_k A)(\tilde{e}_k, \bullet) = 0 \quad (k = 1, \dots, f).$$

Beweis: Diese Aussage folgt aus $(B - \lambda_k A)(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) = 0$ für alle $k, l = 1, \dots, f$ und der linearen Unabhängigkeit der $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_f$. ■

Wir bezeichnen die Koordinaten von $x = \sum_{k=1}^f q_k e_k$ bezüglich $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_f\}$ mit Q : $x = \sum_{k=1}^f Q_k \tilde{e}_k$. In diesen Koordinaten haben T und U die Diagonalgestalt

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \dot{Q}_k^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \lambda_k Q_k^2.$$

Das Lagrange-System zerfällt daher in f entkoppelte Gleichungen:

$$\ddot{Q}_k = -\lambda_k Q_k. \quad (2.18)$$

Für jedes der eindimensionalen Systeme (2.18) gibt es drei mögliche Fälle:

- (i) $\lambda = \omega^2 > 0$; die Lösung ist $Q = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$.
- (ii) $\lambda = 0$; die Lösung ist $Q = c_1 + c_2 t$ ("neutrales Gleichgewicht").
- (iii) $\lambda = -\nu^2 < 0$; die Lösung ist $Q = c_1 \cosh \nu t + c_2 \sinh \nu t$ ("Instabilität").

Zu jedem positiven Eigenwert $\lambda_k = \omega_k^2 > 0$ gibt es also eine Lösung $x(t) = (c_1 \cos \omega_k t + c_2 \sin \omega_k t) \tilde{e}_k$, oder in den ursprünglichen Koordinaten q ,

$$q_l(t) = (c_1 \cos \omega_k t + c_2 \sin \omega_k t) \xi_l^{(k)} \quad (l = 1, \dots, f), \quad (2.19)$$

wobei $\xi_l^{(k)}$ die Komponenten von \tilde{e}_k bezüglich $\{e_1, \dots, e_f\}$ sind.

DEFINITION 2.10 Die periodische Bewegung (2.19) heißt eine **Normalschwingung** des Systems mit Lagrange-Funktion (2.17), und die Zahl ω_k heißt **charakteristische Frequenz**.

Wir benützen dieselbe Terminologie für nicht-positive Eigenwerte, obwohl die Bewegung dann nicht periodisch ist. Damit können wir zusammenfassen:

- (i) Das Lagrange-System mit Lagrange-Funktion (2.17) hat f Normalschwingungen, deren Richtungen paarweise orthogonal bezüglich des durch die kinetische Energie bestimmten Skalarprodukts $\langle \bullet, \bullet \rangle_A$ sind.
- (ii) Jede kleine Schwingung ist eine Summe von f Normalschwingungen.

Anleitung: Gegeben sei das linearisierte Lagrange-System mit Lagrange-Funktion (2.17). In der Praxis geht man am besten folgendermaßen vor.

- (A) Berechne das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \det((B_{kl} - \lambda A_{kl}))$ und bestimme seine Nullstellen, $\lambda = \lambda_n$ ($n = 1, \dots, f$).
- (B) Für jede Nullstelle λ_n löse das lineare Gleichungssystem

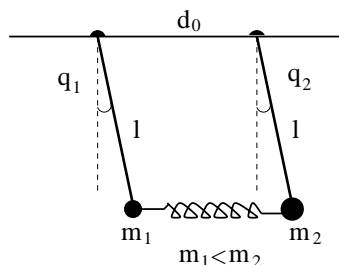
$$\sum_{l=1}^f (B_{kl} - \lambda_n A_{kl}) \xi_l^{(n)} = 0 \quad (k = 1, \dots, f).$$

- (C) Normiere (falls gewünscht) das System von Eigenvektoren $\xi_i^{(n)}$ durch

$$\sum_{k,l=1}^f A_{kl} \xi_k^{(m)} \xi_l^{(n)} = \delta_{mn}.$$

Dann sind $\omega_n = \lambda_n^{1/2}$ die charakteristischen Frequenzen, und die Vektoren $\tilde{e}_n = \sum_{l=1}^f \xi_l^{(n)} e_l$ definieren die Richtungen der Normalschwingungen.

2.5.5 Beispiel: Gekoppelte Pendel mit verschiedenen Massen, gleichen Längen.



Die Lagrange-Funktion ist:

$$L = \frac{m_1}{2} l^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{q}_2^2 - m_1 g l (1 - \cos q_1) - m_2 g l (1 - \cos q_2) - \frac{\alpha}{2} (d(q_1, q_2) - d_0)^2,$$

wobei $d(q_1, q_2) = l ((\cos q_1 - \cos q_2)^2 + (\frac{d_0}{l} - \sin q_1 + \sin q_2)^2)^{1/2}$. Linearisierung um die Gleichgewichtslage $q_1 = q_2 = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ gibt

$$L_2 = \frac{m_1}{2} l^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{q}_2^2 - \frac{m_1}{2} g l q_1^2 - \frac{m_2}{2} g l q_2^2 - \frac{\alpha}{2} l^2 (q_1 - q_2)^2.$$

Hieraus lesen wir die Matrizen von kinetischer und potentieller Energie ab:

$$A = \begin{pmatrix} m_1 l^2 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m_1 g l + \alpha l^2 & -\alpha l^2 \\ -\alpha l^2 & m_2 g l + \alpha l^2 \end{pmatrix}.$$

Nach kurzer Rechnung finden wir:

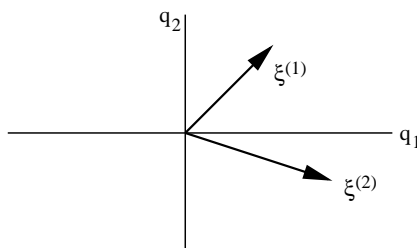
$$\det(B - \lambda A) = (m_1 + m_2) l^2 (m(g - \lambda)^2 + \alpha l(g - \lambda)),$$

mit $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Die charakteristischen Frequenzen sind:

$$\omega_1^2 = g/l, \quad \omega_2^2 = g/l + \alpha/m,$$

und die Richtungen der Normalschwingungen sind gegeben durch

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}.$$



2.6 Parametrische Resonanz

(Zur Theorie der Schaukel.)

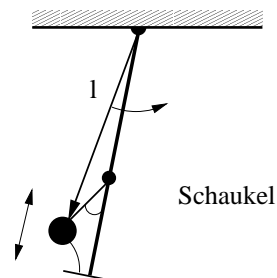
Wenn die Parameter eines Systems periodisch von der Zeit abhängen, dann kann eine Gleichgewichtslage instabil sein, selbst wenn sie für jeden festen Wert der Parameter stabil ist. Diese Instabilität ermöglicht das Aufschaukeln auf z.B. einer Kinderschaukel, wie im folgenden gezeigt werden soll. Dazu betrachten wir den eindimensionalen, harmonischen Oszillator mit periodisch variierender Frequenz,

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0, \quad \omega(t+T) = \omega(t), \quad (2.20)$$

oder das äquivalente Hamiltonsche System

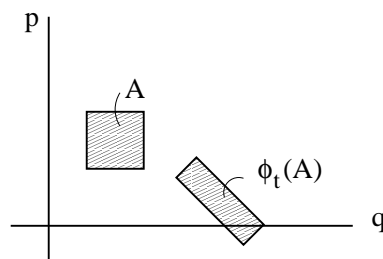
$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega^2(t)q, \quad \omega(t+T) = \omega(t). \quad (2.21)$$

Gleichung (2.20) ist ein einfaches Modell für die Schaukel: ein Pendel mit periodisch variierender Länge $l(t)$ und zugehöriger Frequenz $\omega(t) = \sqrt{g/l(t)}$.



Sei $\phi_t \equiv \phi_{t,0}$ der Fluß von (2.21). Da das System nichtautonom ist, gilt im allgemeinen keine Gruppeneigenschaft: $\phi_t \circ \phi_s \neq \phi_{t+s}$. Jedoch gilt aufgrund der Periodizität: $\phi_T \circ \phi_t = \phi_{T+t}$. Hieraus folgt insbesondere $\phi_{nT} = (\phi_T)^n$. Beachte auch, daß ϕ_t linear ist: $\phi_t(q, p) = (a_t q + b_t p, c_t q + d_t p)$. Wir schreiben $J_t := \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix}$.

SATZ 2.12 (SPEZIALFALL DES LIOUVILLESCHEN SATZES) *Der Fluß ϕ_t ist flächentreu, d.h. $\int_{\phi_t(A)} dqdp = \int_A dqdp$.*



Beweis: Setze $\Omega(t) := \int_{\phi_t(A)} dqdp$. Dann gilt nach dem Transformationssatz: $\Omega(t) = \det J_t \cdot \int_A dqdp$. Bis zur linearen Ordnung in t gilt:

$$\phi_t(q, p) = (q + pt, p - \omega^2(0)qt) + \mathcal{O}(t^2).$$

Deshalb ist

$$J_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\omega^2(0)t & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(t^2)$$

und $\det J_t = 1 + \mathcal{O}(t^2)$. Es folgt: $\frac{d}{dt}\Omega(t)\Big|_{t=0} = 0$. Der Zeitpunkt $t = 0$ ist aber durch nichts ausgezeichnet, und mit der gleichen Argumentation zeigt man: $\frac{d}{dt}\Omega(t)\Big|_{t=t_0} = 0$. Folglich ist $\Omega(t) = \Omega(0) = \text{const.}$

KOROLLAR 2.12.1 ϕ_T ist flächentreu.

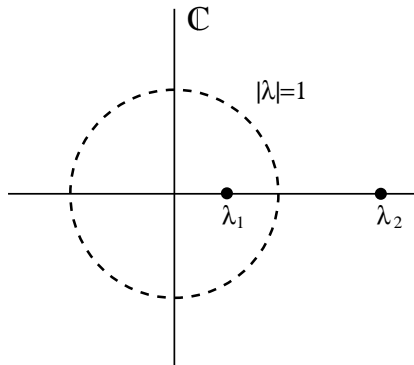
Nun ist die Gleichgewichtslage $(q, p) = (0, 0)$ ein Fixpunkt des Flusses ϕ_t : $\phi_t(0, 0) = (0, 0)$. Wir fragen nach der **Stabilität** dieser Gleichgewichtslage.

SATZ 2.13 Sei A eine lineare, flächentreue Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dann ist die Abbildung stabil¹, falls $|\text{tr}A| < 2$, und instabil, falls $|\text{tr}A| > 2$.

Beweis: Seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von A . Sie genügen der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - \lambda(\text{tr}A) + \det A = 0$. Da A flächentreu ist, gilt $\det A \equiv 1$. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung ergeben sich somit zu

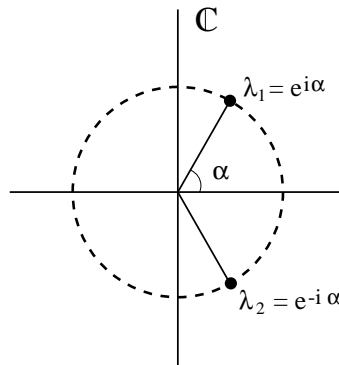
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}A \pm \sqrt{(\text{tr}A)^2 - 4} \right).$$

Für $|\text{tr}A| > 2$ liegen zwei reelle Eigenwerte vor, einer dem Betrag nach kleiner als Eins, der andere dem Betrag nach größer als Eins. Die Abbildung ist dann instabil.



Für $|\text{tr}A| < 2$ liegen die Eigenwerte auf dem Einheitskreis in der komplexen λ -Ebene: $1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \bar{\lambda}_1$. Die Abbildung ist in diesem Fall stabil. ■

¹Eine lineare Abbildung A eines normierten Vektorraums heißt **stabil**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß unter der Voraussetzung $|x| < \delta$ gilt: $|A^n x| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.



Wir erinnern an $\phi_{nT} = (\phi_T)^n$ und bezeichnen die Matrix der linearen Abbildung ϕ_T mit J_T . Nach Satz 2.13 reduziert sich die Stabilitätsanalyse auf die Berechnung von $\text{tr} J_T$. Diese Berechnung läßt sich nur in Spezialfällen explizit durchführen.

Wir betrachten hier den Grenzfall einer schwachen Störung, $\omega(t) = (1 + \varepsilon f(t))\omega$, $f(t) = f(t+T)$, ε klein. In diesem Fall gewinnt man bereits durch die Betrachtung des zeitunabhängigen Systems ($\varepsilon = 0$) eine wesentliche Einsicht. Für $\varepsilon = 0$ ist $\phi_T(q, p) = (q \cos \omega T + \frac{p}{\omega} \sin \omega T, -q\omega \sin \omega T + p \cos \omega T)$, und

$$J_T = \begin{pmatrix} \cos \omega T & (1/\omega) \sin \omega T \\ -\omega \sin \omega T & \cos \omega T \end{pmatrix}.$$

Man sieht: $|\text{tr} J_T| = 2|\cos \omega T| \leq 2$. Da $|\text{tr} J_T|$ stetig von ε abhängt, hat jeder Punkt $(T, 0)$ in der $T\varepsilon$ -Ebene mit $0 < T \neq \frac{\pi n}{\omega}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine offene Umgebung, in der $|\text{tr} J_T| < 2$ gilt. Man spricht dann von **starker Stabilität**.

Für $\omega T = \pi n$ ($n \in \mathbb{N}$) kann jedoch bereits eine infinitesimale Störung zu $|\text{tr} J_T| > 2$, also zu Instabilität, führen. Dies sieht man explizit im folgenden

Beispiel: Sei

$$f(t) = \begin{cases} +1/\omega & \text{für } 0 < t < T/2, \\ -1/\omega & \text{für } T/2 < t < T. \end{cases}$$

So ruckartig schaukelt kein Kind, aber das Ergebnis ist qualitativ dasselbe.

Aus dem obigen Ergebnis sehen wir:

$$J_T = A_2 A_1, \quad A_k = \begin{pmatrix} \cos \omega_k T/2 & (1/\omega_k) \sin \omega_k T/2 \\ -\omega_k \sin \omega_k T/2 & \cos \omega_k T/2 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2),$$

mit $\omega_1 = \omega + \varepsilon$, $\omega_2 = \omega - \varepsilon$. Der Rand der stabilen Zone ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$2 = |\text{tr} J_T| = \left| 2 \cos \omega_1 T/2 \cdot \cos \omega_2 T/2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \sin \omega_1 T/2 \cdot \sin \omega_2 T/2 \right|.$$

Nach einigen Umformungen entsteht hieraus die Gleichung

$$|\omega^2 \cos \omega T - \varepsilon^2 \cos \varepsilon T| = \omega^2 - \varepsilon^2.$$

Für die Funktionen $T \mapsto \varepsilon(T)$, deren Graphen in der $T\varepsilon$ -Ebene mit dem Rand der stabilen Zone übereinstimmen, erhalten wir durch Entwicklung um $\omega T = n\pi$

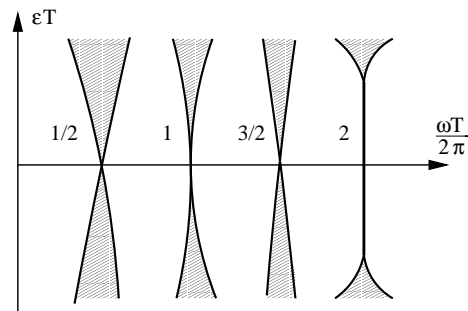
$$\varepsilon(T) = \pm \frac{\omega}{2}(\omega T - n\pi)$$

im Fall von ungeradem n und

$$\varepsilon(T) = \pm \sqrt{\omega/T} \cdot \sqrt{|\omega T - n\pi|}$$

im Fall von geradem n .

Die Zonen der Instabilität sind in der folgenden Figur schraffiert:



In realen Systemen mit Dämpfung durch Reibungsverluste beobachtet man Instabilität ("parametrische Resonanz") meist nur für $n = 1, 2$, selten für $n = 3$.

Kapitel 3

Starre Körper

In diesem Kapitel studieren wir die Kinematik und die Dynamik starrer Körper. Insbesondere untersuchen wir den kräftefreien und den schweren symmetrischen Kreisel mit Fixpunkt.

3.1 Exkurs über die Drehgruppe

Sei \mathbb{R}^3 der dreidimensionale Euklidische Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Auf \mathbb{R}^3 werde durch das Vektorprodukt $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Orientierung festgelegt (“Rechte-Hand-Regel”).

DEFINITION 3.1 Die *spezielle orthogonale Gruppe* (oder: *eigentliche Drehgruppe*) in drei Dimensionen, $SO(3)$, ist die Invarianzgruppe des Tripels $(\mathbb{R}^3, \langle \bullet, \bullet \rangle, \wedge)$; d.h. die Elemente von $SO(3)$ sind lineare Abbildungen $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die das Skalarprodukt invariant lassen, $\langle Rv, Rw \rangle = \langle v, w \rangle$, und die Orientierung erhalten: $R(v \wedge w) = Rv \wedge Rw$.

Wir erinnern an einige Definitionen aus der linearen Algebra.

- (i) Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $Q : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n \text{ mal}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Volumenform. Dann ist die **Determinante** einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ definiert durch:

$$Q(Av_1, Av_2, \dots, Av_n) = Q(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot \det A.$$

$\det A$ ist unabhängig von der gewählten Volumenform Q .

- (ii) Sei V ein reeller Vektorraum und $\langle \bullet, \bullet \rangle$ ein Skalarprodukt auf V . Dann ist die zu einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ **adjungierte Abbildung** $A^T : V \rightarrow V$ definiert durch:

$$\langle v_1, Av_2 \rangle = \langle A^T v_1, v_2 \rangle \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Gilt $A^T = -A$ ($A^T = -A$), so heißt A **symmetrisch (schief)**.

SATZ 3.1 Sei R eine lineare Abbildung: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$R \in \text{SO}(3) \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & RR^T = \text{Id}, \\ (ii) & \det R = 1. \end{cases}$$

Beweis:

(\Rightarrow) Sei also $R \in \text{SO}(3)$.

(i) Es gilt: $\langle v, Rw \rangle = \langle R^T v, w \rangle = \langle RR^T v, w \rangle$. Da v und w beliebig sind, folgt $RR^T = \text{Id}$.

(ii) Betrachte die durch das Spatprodukt gegebene Volumenform

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (a, b, c) &\mapsto Q(a, b, c) = \langle a, b \wedge c \rangle. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$Q(Ra, Rb, Rc) = \langle Ra, Rb \wedge Rc \rangle = \langle Ra, R(b \wedge c) \rangle = \langle a, b \wedge c \rangle = Q(a, b, c).$$

Folglich ist $\det R = 1$.

(\Leftarrow) Durch Rückwärtslesen derselben Argumentation.

Bemerkung: Da \mathbb{R}^3 endliche Dimension hat, ist $RR^T = \text{Id}$ äquivalent zu $R^{-1} = R^T$ und $R^T R = \text{Id}$.

Sei nun $\{e_1, e_2, e_3\}$ eine orientierte Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 . **Orientiert** soll hier heißen, daß gilt: $e_1 \wedge e_2 = e_3$ und somit $Q(e_1, e_2, e_3) = \langle e_1, e_2 \wedge e_3 \rangle = +1$. Eine solche Basis nennen wir **kanonisch**. Die Koeffizienten eines Elements $R \in \text{SO}(3)$ bezüglich einer fest gewählten kanonischen Basis bezeichnen wir mit $R_{kl} := \langle e_k, R e_l \rangle$ und die zugehörige Matrix mit $R := (R_{kl})$.

(Achtung! Wir notieren lineare Abbildung und ihre Matrix bezüglich der kanonischen Basis mit demselben Symbol. Es kann aber keine Verwirrung entstehen: in der Gleichung $w = Rv$ ist die lineare Abbildung gemeint und v, w sind abstrakte Vektoren; in der Gleichung $\mathbf{w} = R\mathbf{v}$ ist die Matrixdarstellung gemeint und \mathbf{v}, \mathbf{w} sind die Spaltenvektoren bezüglich der kanonischen Basis.)

Die in Satz 3.1 behaupteten Eigenschaften (i) und (ii) übertragen sich auf die Matrixdarstellung eines Elements $R \in \text{SO}(3)$, d.h. es gilt:

$$(R^{-1})_{kl} = (R^T)_{kl} = R_{lk} \quad \text{und} \quad \det(R_{kl}) = 1.$$

SATZ 3.2 Gegeben sei eine Kurve $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{SO}(3)$, $t \mapsto R_t$. Dann ist die durch $A := \left(\frac{d}{dt} R_t \right) R_t^{-1} \Big|_{t=0}$ definierte lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ schief.

Beweis: Wir differenzieren die Identität $\text{Id} = R_t R_t^{-1}$ nach t an der Stelle $t = 0$ und erhalten:

$$0 = \dot{R}_{t=0} R_{t=0}^{-1} + R_{t=0} \frac{d}{dt} R_t^{-1} \Big|_{t=0}.$$

Hiermit berechnen wir nun ausgehend von $A = \dot{R}_0 R_0^{-1}$ die adjungierte Abbildung:

$$A^T = (R_0^{-1})^T \dot{R}_0^T = R_0 \frac{d}{dt} R_t^{-1} \Big|_{t=0} = -\dot{R}_0 R_0^{-1} = -A.$$

Bemerkung: Der Zeitpunkt $t = 0$ ist offensichtlich durch nichts ausgezeichnet, und eine entsprechende Aussage gilt daher auch für irgendein $t = t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

SATZ 3.3 Sei $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear und schief. Dann existiert ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, so daß

$$Av = \mathbf{a} \wedge v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^3.$$

Beweis (konstruktiv): Wir stellen A und v in der kanonischen Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ dar:

$$(A_{kl}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad v = \sum_{k=1}^3 v_k e_k, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort:

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 v_3 - a_3 v_2 \\ a_3 v_1 - a_1 v_3 \\ a_1 v_2 - a_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Die rechte Seite erkennt man als das Vektorprodukt von $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit \mathbf{v} :

$$A\mathbf{v} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{v}.$$

Wenn wir also $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ definieren durch $\mathbf{a} := \sum_{k=1}^3 a_k e_k$, dann ist dies gerade der Vektor, dessen Existenz zu zeigen war. ■

Die Rechnung im Beweis von Satz 3.3 legt die Einführung dreier Matrizen

$$J_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nahe. Hiermit können wir den Zusammenhang zwischen einer schiefen Matrix A und dem ihr zugeordneten Spaltenvektor \mathbf{a} auch folgendermaßen aufschreiben:

$$A = \sum_{k=1}^3 a_k J_k.$$

Die Matrizen J_k ($k = 1, 2, 3$) heißen ein Satz von **Generatoren** der Drehgruppe.

SATZ 3.4 Jedes Element $R \in \text{SO}(3)$ hat einen invarianten Vektor v : $Rv = v$.

Beweis: Betrachte das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \det(R - \lambda \cdot \text{Id}) = -\lambda^3 + \cdots + \underbrace{\det R}_{=1}.$$

Aus $\chi(0) = +1$ und $\chi(+\infty) = -\infty$ folgt aufgrund der Stetigkeit von $\chi(\lambda)$ die Existenz (mindestens) eines Eigenwerts im Intervall $(0, \infty)$. Sei λ dieser Eigenwert: $Rv = \lambda v$. Da gilt: $\langle v, v \rangle = \langle Rv, Rv \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$, folgt $\lambda = \pm 1$ und wegen $\lambda \in (0, \infty)$: $\lambda = +1$.

SATZ 3.5 Der Raum der invarianten Vektoren eines Elements $R \in \text{SO}(3)$, $R \neq \text{Id}$, ist eindimensional.

Beweis (durch Widerspruch): Seien a, b zwei linear unabhängige invariante Vektoren: $Ra = a$ und $Rb = b$. Die Gerade $(a, b)^\perp := \{c \in \mathbb{R}^3 \mid \langle c, a \rangle = \langle c, b \rangle = 0\}$ ist dann ebenfalls unter R invariant, weshalb $\lambda \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^3$ existieren, so daß $Rc = \lambda c$. Wegen $\det R = 1$ folgt $\lambda = 1$ und somit $R = \text{Id}$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

DEFINITION 3.2 Wir nennen den Raum der invarianten Vektoren von $R \neq \text{Id}$ die **Drehachse** von R .

Wie läßt sich die Drehachse zu einem vorgegebenen R finden? Dazu betrachtet man die lineare Abbildung $\Omega := \frac{1}{2}(R - R^T)$. Da Ω schief ist, existiert nach Satz 3.3 ein Vektor ω , so daß gilt: $\Omega v = \omega \wedge v$.

SATZ 3.6 Die invarianten Vektoren v von $R \in \text{SO}(3)$, $R \neq R^{-1}$, sind Vielfache des Vektors ω : $v = \lambda \omega$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Beweis: Sei v ein invarianter Vektor von R : $Rv = v$. Es gilt dann auch $v = R^{-1}v$, und somit folgt $\Omega v = \frac{1}{2}(R - R^{-1})v = \frac{1}{2}(v - v) = 0 = \omega \wedge v$. Also ist v zu ω parallel. ■

Bezüglich einer adaptierten orientierten Orthonormalbasis $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ mit $\tilde{e}_3 := \omega/|\omega|$ (Einheitsvektor in Richtung der Drehachse) hat die Matrixdarstellung $\tilde{R} := (\langle \tilde{e}_k, R\tilde{e}_l \rangle)$ von R die Gestalt:

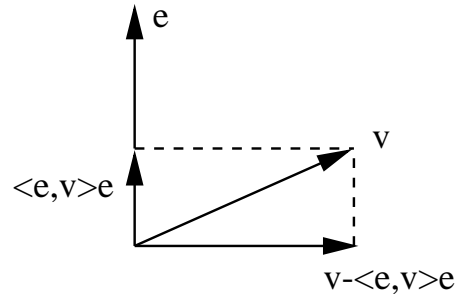
$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Dies repräsentiert eine Drehung um die ω -Achse um den Winkel φ , im mathematisch positiven Sinn.

Neben (3.1) benötigen wir auch noch eine basisunabhängige Darstellung von R .

SATZ 3.7 Sei $R \in \text{SO}(3)$ eine Drehung um die ω -Achse mit Drehwinkel φ , und sei $e := \tilde{e}_3 = \omega/|\omega|$. Dann operiert R wie $Rv = \langle e, v \rangle e + (v - \langle e, v \rangle e) \cos \varphi + e \wedge v \sin \varphi$.

Beweis: Betrachte die folgende Figur:



$e \wedge v$ zeigt in die Zeichenebene hinein und hat dieselbe Länge wie $v - \langle e, v \rangle e$, nämlich $(|v|^2 - |\langle e, v \rangle|^2)^{1/2}$. Nun ist $v = \langle e, v \rangle e + (v - \langle e, v \rangle e)$, und mit $Re = e$ und $R(v - \langle e, v \rangle e) = (v - \langle e, v \rangle e) \cos \varphi + (e \wedge v) \sin \varphi$ folgt die Behauptung. ■

Die Drehungen zu fester Drehachse e , $R_{\varphi e}$, bilden eine einparametrische Untergruppe von $\text{SO}(3)$:

$$R_{\varphi_1 e} \circ R_{\varphi_2 e} = R_{(\varphi_1 + \varphi_2) e}. \quad (3.2)$$

Dies ist anschaulich klar und folgt rechnerisch leicht aus (3.1).

Schließlich etablieren wir noch einen alternativen Ausdruck für R . Wir setzen $\omega := \varphi e$ und schreiben R_ω für $R_{\varphi e}$. Wir erinnern an Satz 3.3, dessen Aussage sich offenbar auch umkehren läßt: jedem Vektor wird durch $\Omega v := \omega \wedge v$ eine schiefe lineare Abbildung $\Omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zugeordnet. Wir schreiben $\Omega \equiv C_\omega$.

SATZ 3.8 Es gilt $R_\omega = \exp C_\omega$.

Beweis: Nach (3.2) genügt $R_{\varphi e}$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\varphi} R_{\varphi e} = \Omega R_{\varphi e} \quad \text{mit} \quad \Omega = \left. \frac{d}{d\varphi} R_{\varphi e} \right|_{\varphi=0}.$$

Aus der Aussage von Satz 3.7 erhält man durch Differenzieren von $R_{\varphi e} v$ nach φ an der Stelle $\varphi = 0$:

$$\Omega v = e \wedge v = C_e v.$$

Derselben Differentialgleichung genügt aber $\exp C_{\varphi e}$, denn:

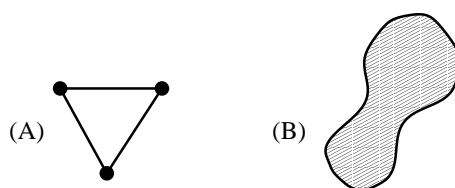
$$\frac{d}{d\varphi} \exp C_{\varphi e} = \left(\frac{d}{d\varphi} C_{\varphi e} \right) \exp C_{\varphi e} = C_e \exp C_{\varphi e}.$$

Da $R_0 = \exp C_0 = \text{Id}$, folgt mit dem Eindeigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen (Satz 1.6) die Behauptung.

3.2 Kinematik des starren Körpers

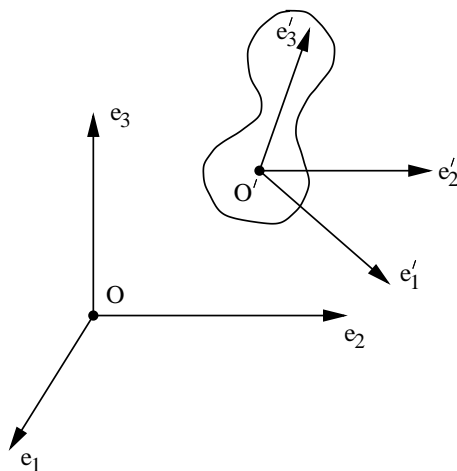
Wir betrachten im folgenden zwei mathematische Idealisierungen realer Körper, die wir den **starren Körper** nennen:

- (A) Ein System von N Punkten mit Massen m_1, m_2, \dots, m_N , deren Abstände konstant sind.
- (B) Eine starre Massenverteilung ρ .



Die Gesamtmasse M ist im Fall (A): $M = \sum_{i=1}^N m_i$, im Fall (B): $M = \int_{\mathbb{R}^3} \rho$.

Sei E_3 der dreidimensionale Euklidische Raum und \mathbb{R}^3 sein Differenzraum. Zur Beschreibung der Bewegung des starren Körpers führen wir in $(E_3, \mathbb{R}^3, \langle \bullet, \bullet \rangle, \wedge)$ zwei kartesische Koordinatensysteme ein:



- (i) Ein **raumfestes** Koordinatensystem: $K = \{O; e_1, e_2, e_3\}$. K sei ein Inertialsystem, d.h. in Abwesenheit von Kräften sei die Bewegung eines Körpers bzgl. K geradlinig und gleichförmig.
- (ii) Ein **körperfestes** Koordinatensystem: $K' = \{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$, das mit dem starren Körper fest verbunden ist.

Manchmal wird es sich als günstig erweisen, O' als den Schwerpunkt des starren Körpers zu wählen. Außerdem sollen $\{e_1, e_2, e_3\}$ und $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ gleich orientiert sein (Rechte-Hand-Regel).

Wir drücken K' durch K aus:

$$O' = O + u \quad (u \in \mathbb{R}^3); \quad e'_k = R e_k \quad (k = 1, 2, 3; R \in \text{SO}(3)). \quad (3.3)$$

Offensichtlich wird durch die Angabe von K' bezüglich K die Lage des starren Körpers bezüglich K vollständig festgelegt. Im allgemeinen bewegt sich K' relativ zu K . Die Beziehungen (3.3) sind dann zeitabhängig. Wir schreiben $u \equiv u(t)$, $R \equiv R(t)$, $O' \equiv O(t)$, $e'_k \equiv e_k(t)$ und haben hiermit:

$$O(t) - O = u(t); \quad e_k(t) = R(t)e_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Ohne Verlust an Allgemeinheit wählen wir $K = K'$ zur Zeit $t = 0$; d.h. $u(0) = 0$, $R(0) = \text{Id}$, $e_k(0) = e_k$, $O(0) = O$.

Betrachte nun einen ausgewählten, mit dem starren Körper fest verbundenen Punkt. Einen solchen Punkt nennen wir hier einen **Aufpunkt**. Der Aufpunkt befinde sich zur Zeit $t = 0$ am Ort $A(0) \in E_3$. Wir möchten wissen, an welchem Ort $A(t)$ er sich dann zum Zeitpunkt t befindet. Da die Zeitentwicklung des den Aufpunkt und den Koordinatenursprung verbindenden Differenzvektors $A(t) - O(t)$ vermöge der Definition von $R(t)$ durch

$$A(t) - O(t) = R(t)(A(0) - O(0)), \quad (3.4)$$

gegeben ist, lautet die Antwort

$$A(t) = O + R(t)(A(0) - O(0)) + u(t).$$

Um den entsprechenden Koordinatenausdruck aufzustellen, schreiben wir:

- (i) $A(t) - O = \sum_{k=1}^3 q_k(t)e_k$, d.h. $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ sind die Koordinaten des Aufpunkts bezüglich K .
- (ii) $A(t) - O(t) = \sum_{k=1}^3 x'_k e_k(t)$, d.h. $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ sind die Koordinaten des Aufpunkts bezüglich K' .
- (iii) $O(t) - O = \sum_{k=1}^3 Q_k(t)e_k$, d.h. $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ sind die Koordinaten von $O' = O(t)$ bezüglich K .

Beachte, daß \mathbf{x}' nicht von der Zeit abhängt. Der Aufpunkt ist ja mit dem starren Körper fest verbunden, und K' ist ein körperfestes Koordinatensystem.

Mit $A(t) - O = (A(t) - O(t)) + (O(t) - O)$ und $e_l(t) = R(t)e_l = \sum_k e_k R_{kl}(t)$ erhalten wir die Beziehung

$$q_k(t) = Q_k(t) + \sum_{l=1}^3 R_{kl}(t)x'_l,$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t) + R(t)\mathbf{x}' . \quad (3.5)$$

Das Paar $(\mathbf{Q}(t), R(t))$ definiert zu jeder festen Zeit t ein Element der Euklidischen Bewegungsgruppe (siehe das Ende von Abschnitt 1.3) durch

$$\mathbf{x}' \mapsto g(\mathbf{x}') = \mathbf{Q} + R\mathbf{x}' .$$

Merke: Der **Konfigurationsraum** (= Raum der verallgemeinerten Koordinaten) des starren Körpers ist die Euklidische Bewegungsgruppe. Er ist sechsdimensional.

3.2.1 Winkelgeschwindigkeit

Wir setzen $x(t) := A(t) - O(t)$, $x := A(0) - O(0)$, und schreiben hiermit (3.4) in der Form

$$x(t) = R(t)x .$$

Differenzieren nach der Zeit gibt

$$\dot{x}(t) = \dot{R}(t)x = (\dot{R}(t)R^{-1}(t))x(t) .$$

Nach Satz 3.2 ist $\dot{R}R^{-1}$ schief. Nach Satz 3.3 existiert daher ein Vektor $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$, so daß

$$\boxed{\dot{x}(t) = \omega(t) \wedge x(t)} . \quad (3.6)$$

Dieses Ergebnis können wir auch folgendermaßen formulieren.

Satz 3.9 *Ein starrer Körper rotiere um einen raumfesten Punkt O' . Dann existiert zu jedem Zeitpunkt eine momentane Drehachse, nämlich eine Gerade durch O' (die ω -Achse) mit der Eigenschaft, daß sich alle auf ihr liegenden Punkte momentan in Ruhe befinden. Die Geschwindigkeit aller übrigen Punkte steht auf dieser Geraden senkrecht und ist zum Abstand von ihr proportional.*

Der Vektor $\omega(t)$ heißt die **momentane Winkelgeschwindigkeit**. Die Komponenten von ω bezüglich $\{e_1, e_2, e_3\}$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Man erhält sie aus

$$\langle e_k, \dot{R}R^{-1}e_l \rangle = \sum_{i=1}^3 \omega_i (J_i)_{kl} .$$

Die Komponenten von ω bezüglich $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, $\boldsymbol{\omega}' = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$, erhält man aus

$$\langle e'_k, \dot{R}R^{-1}e'_l \rangle = \langle e_k, R^{-1}\dot{R}e_l \rangle = \sum_{i=1}^3 \omega'_i (J_i)_{kl} . \quad (3.7)$$

Wegen $\omega = \sum_k \omega_k e_k = \sum_l \omega'_l e'_l$ und $e'_l = R e_l = \sum_k e_k R_{kl}$ gilt $\omega_k = \sum_l R_{kl} \omega'_l$ oder in Matrixschreibweise

$$\omega = R \omega'.$$

3.3 Trägheitstensor

Betrachte die mathematische Idealisierung (A). Für die Koordinaten und Geschwindigkeiten des i -ten Punkts des starren Körpers gilt nach Gleichungen (3.5) und (3.6) von Abschnitt 3.2:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i(t) &= \mathbf{Q}(t) + R(t) \mathbf{x}'_i, \\ \dot{\mathbf{q}}_i(t) &= \dot{\mathbf{Q}}(t) + \omega(t) \wedge \mathbf{x}_i(t), \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei $\mathbf{x}_i(t) = R(t) \mathbf{x}'_i$.

Zentral für die Theorie des starren Körpers ist der Begriff des Trägheitstensors. Um ihn einzuführen, betrachten wir zunächst (3.8) für $\dot{\mathbf{Q}} = 0$, d.h. O' sei bezüglich K fixiert. Die kinetische Energie des starren Körpers ist dann

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega \wedge \mathbf{x}_i)^2.$$

Mit der Identität $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ formen wir T um in:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 I_{kl} \omega_k \omega_l, \quad (3.9)$$

wobei

$$I_{kl} = \sum_{i=1}^N m_i (|\mathbf{x}_i|^2 \delta_{kl} - (\mathbf{x}_i)_k (\mathbf{x}_i)_l). \quad (3.10a)$$

Für eine kontinuierliche Massenverteilung ist

$$I_{kl} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) (|\mathbf{x}|^2 \delta_{kl} - x_k x_l) d^3 x. \quad (3.10b)$$

Wir definieren eine quadratische Form $I : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $I(e_k, e_l) = I_{kl}$. Damit haben wir einen basisunabhängigen Ausdruck für T :

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I(\omega, \omega)}.$$

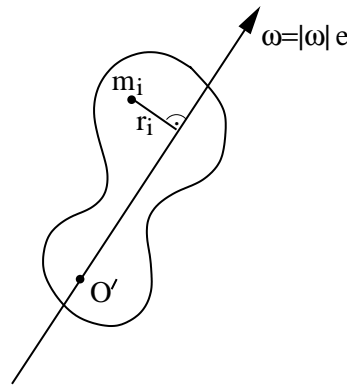
DEFINITION 3.3 Die durch $I : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\omega, \eta) \mapsto I(\omega, \eta)$ erklärte quadratische Form heißt der **Trägheitstensor** des starren Körpers relativ zu O' .

Mitteilung: Mathematisch präzise gesprochen ist I eine linksinvariante quadratische Form auf dem Tangentialbündel von $\text{SO}(3)$, siehe z.B. Arnold, Appendix 2.

SATZ 3.10 *Dreht sich ein starrer Körper, der am Punkt O' fixiert ist, mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\omega|e$ um die e -Achse, so hat er die kinetische Energie*

$$T = \frac{1}{2} I_e |\omega|^2,$$

wobei $I_e = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ und r_i der Abstand des i -ten Punkts von der e -Achse ist.



Beweis: Da I basisunabhängig definiert ist, genügt es, den Satz speziell für $\omega = |\omega|e_3$ zu beweisen. In diesem Fall folgt aber aus (3.9) und (3.10a) sofort $T = I_{e_3} |\omega|^2 / 2$ mit $I_{e_3} = I_{33} = \sum_{i=1}^N m_i (|\mathbf{x}_i|^2 - (x_i^3)^2) = \sum_i m_i ((x_i^1)^2 + (x_i^2)^2) = \sum_i m_i r_i^2$.

Wir fragen nun, wie sich I ändert, wenn wir den Koordinatenursprung O' verschieben.

SATZ 3.11 (STEINER) *Ist O' der Schwerpunkt des starren Körpers, so transformiert sich der Trägheitstensor I unter einer Translation $O' \mapsto O' - a$ gemäß*

$$I \mapsto I + m (|a|^2 \langle \bullet, \bullet \rangle - \langle a, \bullet \rangle^2).$$

Beweis: Aus $A - O' = \sum_k x_k e_k$ und $a = \sum_k a_k e_k$ folgt $A - (O' - a) = \sum_k (x_k + a_k) e_k$, d.h. unter einer Translation $O' \mapsto O' - a$ ändern sich die Koordinaten \mathbf{x}_i eines Aufpunkts bezüglich $\{O'; e_1, e_2, e_3\}$ wie: $\mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{x}_i + \mathbf{a}$. Führen wir diese Transformation in (3.10a) durch und benützen, daß per Definition des Schwerpunkts gilt: $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i = 0$, so finden wir:

$$I_{kl} \mapsto I_{kl} + m (|a|^2 \delta_{kl} - a_k a_l).$$

Dies ist aber gerade der Koordinatenausdruck des behaupteten Transformationsgesetzes für I . ■

Da sich der starre Körper im allgemeinen relativ zu K dreht, sind die $I_{kl}(t)$ i.a. von der Zeit abhängig. Die Koeffizienten von I bezüglich der körperfesten Basis $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ sind hingegen zeitunabhängig:

$$I'_{kl} := I(e'_k, e'_l) = \text{const}.$$

Aus $I'_{kl} = I(Re_k, Re_l) = \sum_{m,n} I_{mn} R_{mk} R_{nl}$ sieht man mit $\sum_k R_{mk} R_{jk} = \delta_{jm}$, daß die Koeffizienten I_{kl} und I'_{kl} folgendermaßen zusammenhängen:

$$I_{kl} = \sum_{m,n} R_{km} R_{ln} I'_{mn}.$$

Wir sagen auch: der Trägheitstensor transformiert sich wie ein **Tensor zweiter Stufe**.

Wir wählen die Basisvektoren e'_1, e'_2, e'_3 ab jetzt so, daß der Trägheitstensor in dieser Basis diagonal ist:

$$I(e'_k, e'_l) = I'_k \delta_{kl}.$$

DEFINITION 3.4 Die Zahlen I'_k ($k = 1, 2, 3$) heißen die **Hauptträgheitsmomente**, die Vektoren e'_k ($k = 1, 2, 3$) die **Haupt(trägheits)achsen** des starren Körpers.

Bemerkung: Sind mindestens zwei der Hauptträgheitsmomente gleich, so sind die Hauptträgheitsachsen nicht eindeutig bestimmt.

Beispiele: Siehe Übungen.

DEFINITION 3.5 Den starren Körper mit Hauptträgheitsmomenten $I'_1 \neq I'_2 \neq I'_3 \neq I'_1$ ($I'_1 = I'_2 \neq I'_3$; $I'_1 = I'_2 = I'_3$) nennen wir den **unsymmetrischen Kreisel** (**symmetrischen Kreisel**; **Kugelkreisel**).

Wir erinnern uns an Gleichung (3.8) und legen O' jetzt in den Schwerpunkt des starren Körpers.

SATZ 3.12 Die kinetische Energie T des starren Körpers hat die Zerlegung

$$T = T_t + T_r,$$

wobei $T_t = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{Q}}^2$ die kinetische Energie der Translationsbewegung des Schwerpunkts und $T_r = \frac{1}{2} I(\omega, \omega)$ die kinetische Energie der Drehbewegung um den Schwerpunkt ist.

Beweis: $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{q}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_i)^2 = (M/2) \dot{\mathbf{Q}}^2 + \dot{\mathbf{Q}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \sum_i m_i \mathbf{x}_i) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_i)^2 = T_t + T_r$. Der Mischterm verschwindet wegen $\sum_i m_i \mathbf{x}_i = 0$ per Definition des Schwerpunkts.

SATZ 3.13 *Der Drehimpuls L des starren Körpers relativ zu O hat die Zerlegung*

$$L = L_t + L_r,$$

wobei L_t der Drehimpuls des Schwerpunkts relativ zu O und L_r der Drehimpuls des starren Körpers relativ zum Schwerpunkt ist.

Beweis: Wir rechnen wieder in Komponenten bzgl. K :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i m_i \mathbf{q}_i \wedge \dot{\mathbf{q}}_i = \sum_i m_i (\mathbf{Q} + \mathbf{x}_i) \wedge (\dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{x}}_i) \\ &= m \mathbf{Q} \wedge \dot{\mathbf{Q}} + \sum_i m_i \mathbf{x}_i \wedge \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{L}_t + \mathbf{L}_r. \end{aligned}$$

Auch hier verschwinden die Mischterme wegen $\sum_i m_i \mathbf{x}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i = 0$. ■

Mit $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ können wir $\mathbf{L}_r = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \wedge \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_i)$ auch noch etwas anders schreiben:

$$\mathbf{L}_r = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_i) = \sum_i m_i (|\mathbf{x}_i|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{x}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{x}_i).$$

In basisunabhängiger Notation lautet dieses Ergebnis:

$$\boxed{\langle L_r, \bullet \rangle = I(\boldsymbol{\omega}, \bullet)}.$$

3.4 Der freie Kreisel: geometrische Konstruktion

In Abwesenheit äußerer Kräfte bewegt sich der Schwerpunkt des starren Körpers geradlinig und gleichförmig: $\ddot{\mathbf{Q}} = 0$. Deshalb gilt:

$$\frac{d}{dt} T_t = 0, \quad \frac{d}{dt} L_t = 0.$$

Aus den Erhaltungssätzen für Energie und Drehimpuls folgt dann:

$$\frac{d}{dt} T_r = \frac{d}{dt} (T - T_t) = 0, \quad \frac{d}{dt} L_r = \frac{d}{dt} (L - L_t) = 0.$$

Für die folgende Diskussion ist es geschickt, die Koordinatenursprünge von K und K' identisch zu wählen, d.h. $\mathbf{Q}(t) \equiv 0$. Dann ist $T_t = 0$, $L_t = 0$ und $T_r = T$, $L_r = L$. In diesem Fall lassen sich Energiesatz und Drehimpulssatz,

$$2T = I(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) = \langle \boldsymbol{\omega}, L \rangle = \text{const}, \quad (3.11)$$

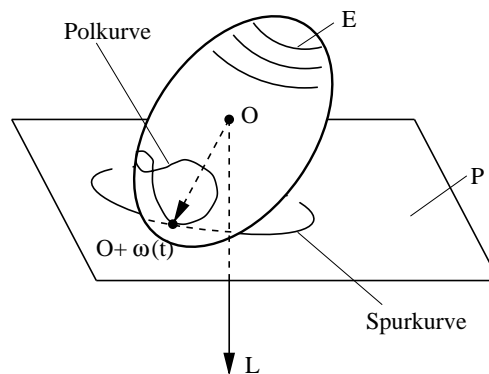
$$\langle L, \bullet \rangle = I(\boldsymbol{\omega}, \bullet) = (dT)_{\boldsymbol{\omega}} = \text{const}, \quad (3.12)$$

in der folgenden Weise geometrisch deuten.

Wir nennen die Lösungsmenge der Gleichung $2T = \sum_{k,l} I_{kl}(t)\omega_k(t)\omega_l(t) = \text{const}$ für ω das “Energieellipsoid”. Das Zentrum des Energieellipsoids identifizieren wir o.B.d.A. mit dem Schwerpunkt des starren Körpers, der gleichzeitig der Ursprung von K und K' ist.

Nach Gleichung (3.11) liegt die Spitze des Vektors ω (d.h. der Punkt $O + \omega$) zum einen in der durch $\langle \omega(t), L \rangle = \text{const}$ festgelegten Ebene, P , und zum anderen auf dem Energieellipsoid, E . Da L nach (3.12) nicht von der Zeit abhängt, ist P raumfest und wird als die “invariable Ebene” bezeichnet.

Wie liegen nun invariable Ebene und Energieellipsoid relativ zueinander? Nach (3.12) steht $L = \text{grad}_\omega T$ auf der Tangentialebene zum Energieellipsoid im Punkt $O + \omega$ senkrecht. Deshalb berühren sich P und E in genau einem Punkt, nämlich $O + \omega$:



Beachte auch, daß die Achsen des Energieellipsoids mit den Hauptachsen des starren Körpers zusammenfallen. Da $\omega(t)$ in Richtung der momentanen Drehachse durch O zeigt, ist $\omega(t)$ momentan in Ruhe und es gilt:

SATZ 3.14 (POINSON) *Das Energieellipsoid rollt ohne Schlupf auf der invariablen Ebene.*

Die Kurve, die durch den Berührungspunkt auf dem Energieellipsoid beschrieben wird, heißt **Polkurve**. Die entsprechende Kurve auf der invariablen Ebene nennt man **Spurkurve**.

Bei gegebenen Anfangsbedingungen ist es ein rein geometrisches Problem, Spurkurve und Polkurve zu bestimmen. Damit kennt man die Bahn $t \mapsto O + \omega(t)$, ohne den zeitlichen Verlauf zu kennen.

Mitteilung: Wie nach der analytischen Lösung in 3.5 klar sein wird, ist die Polkurve geschlossen, während die Spurkurve im allgemeinen nicht geschlossen ist. Für den

symmetrischen Kreisel ist das Energieellipsoid ein Rotationsellipsoid. Polkurve und Spurkurve sind in diesem Fall Kreise. Auch diese werden wir bei der analytischen Lösung noch genauer besprechen.

3.5 Die Eulerschen Gleichungen

Als Ausgangspunkt für die Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen des starren Körpers benutzen wir den Impulssatz 1.2 und den Drehimpulssatz 1.3,

$$M\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}^{(\text{ext})}, \quad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{D},$$

wobei $\mathbf{F}^{(\text{ext})}$ die Summe der äußeren Kräfte und \mathbf{D} das gesamte Drehmoment relativ zu O ist. Aus der Definition von \mathbf{L}_t folgt:

$$\dot{\mathbf{L}}_t = M\mathbf{Q} \wedge \ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \wedge \mathbf{F}^{(\text{ext})} =: \mathbf{D}_t,$$

und daher mit $\mathbf{q}_i = \mathbf{Q} + \mathbf{x}_i$ auch $\dot{\mathbf{L}}_r = \mathbf{D}_r$, wobei $\mathbf{D}_r = \sum_i \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}$ die Summe der Drehmomente relativ zum Schwerpunkt O' ist. Die Gleichungen

$$M\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}^{(\text{ext})} \tag{3.13}$$

$$\dot{\mathbf{L}}_r = \mathbf{D}_r \tag{3.14}$$

sind ein System von sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung in t für die verallgemeinerten Koordinaten des starren Körpers, nämlich für das Element $(\mathbf{Q}(t), R(t))$ der Euklidischen Bewegungsgruppe.

Es ist zweckmäßig, (3.14) ins körperfeste System umzuschreiben. Betrachte dazu:

$$\dot{\mathbf{L}}_r = \frac{d}{dt}(R\mathbf{L}'_r) = \dot{R}\mathbf{L}'_r + R\dot{\mathbf{L}}'_r = R(R^{-1}\dot{R}\mathbf{L}'_r + \dot{\mathbf{L}}'_r).$$

Mit $\mathbf{D}_r =: R\mathbf{D}'_r$ und $R^{-1}\dot{R}\mathbf{L}'_r = \boldsymbol{\omega}' \wedge \mathbf{L}'_r$ erhalten wir dann die **Eulersche Gleichung**:

$$\dot{\mathbf{L}}'_r + \boldsymbol{\omega}' \wedge \mathbf{L}'_r = \mathbf{D}'_r. \tag{3.15}$$

Aus $\langle L_r, \bullet \rangle = I(\boldsymbol{\omega}, \bullet)$ folgt $L'_{r,k} = I'_k \omega'_k$ ($k = 1, 2, 3$), wobei I'_k die Hauptträgheitsmomente des starren Körpers bezüglich seines Schwerpunkts sind. Äquivalent zu (3.15) gelten damit in Komponenten die Gleichungen

$$I'_1 \dot{\omega}'_1 + \omega'_2 \omega'_3 (I'_3 - I'_2) = D'_{r,1} \quad \text{und zyklisch.} \tag{3.16}$$

Dies sind drei nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit für $\boldsymbol{\omega}' = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$. Das Gleichungssystem (3.13) und (3.16) ist unter Hinzunahme

der Gleichungen $R^{-1}(t)\dot{R}(t) = \sum_k \omega'_k(t)J_k$ (siehe (3.7) von Abschnitt 3.2.1), aus denen für vorgegebenes $\omega'(t)$ die Kurve $t \mapsto R(t)$ bestimmt werden kann, dem System (3.13)–(3.14) äquivalent.

Wir spezialisieren wieder zum **kräftefreien Fall**: $\mathbf{F}^{(\text{ext})} = 0$ und $\mathbf{D}_r = 0$ und wählen wie in Abschnitt 3.4: $O \equiv O' =$ Schwerpunkt des starren Körpers, d.h. $\mathbf{Q}(t) = 0$. Zunächst betrachten wir den symmetrischen Kreisel.

3.5.1 Symmetrischer Kreisel

Hier gilt $I'_1 = I'_2 \neq I'_3$ ($I'_1 \neq 0$, $I'_3 \neq 0$), und die dritte Eulersche Gleichung hat die einfache Gestalt $I'_3 \dot{\omega}'_3 = 0$, woraus folgt: $\omega'_3 = \text{const.}$ Wir setzen

$$\omega'_{pr} := \omega'_3 \frac{I'_3 - I'_1}{I'_1} = \text{const.}$$

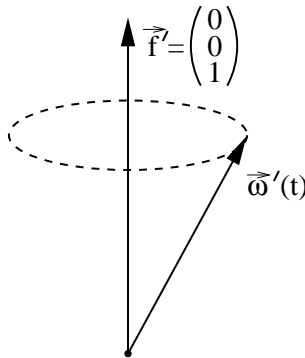
Dann lauten die verbleibenden zwei Gleichungen:

$$\dot{\omega}'_1 = -\omega'_{pr} \omega'_2, \quad \dot{\omega}'_2 = +\omega'_{pr} \omega'_1.$$

Sie haben die allgemeine Lösung

$$\omega'_1(t) = \omega'_\perp \cos(\omega'_{pr} t + \tau), \quad \omega'_2(t) = \omega'_\perp \sin(\omega'_{pr} t + \tau),$$

wobei ω'_\perp und τ Integrationskonstanten sind. Offensichtlich gilt: $|\omega'(t)|^2 = (\omega'_3)^2 + (\omega'_\perp)^2 = \text{const.}$, und ω' führt eine **reguläre Präzession** mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω'_{pr} um die Figurenachs $\mathbf{f}' := (0, 0, 1)$ aus.



Anwendung (Euler): In der Näherung, daß die Erde als kräftefreier symmetrischer Kreisel angesehen werden kann, rotiert der kinematische Nordpol (in Richtung ω) um den geographischen Nordpol (in Richtung Figurenachs $f = e'_3$) mit der Periode $T_{pr} = 2\pi/\omega'_{pr} = (2\pi/\omega'_3) \cdot I'_1/(I'_3 - I'_1) \simeq 300$ Tage, da $(I'_3 - I'_1)/I'_1 \simeq 1/300$ (Abplattung der Erde). Etwas Ähnliches wird auch beobachtet. Die Amplitude der Präzession ist sehr klein: kinematischer und geographischer Nordpol sind nie weiter

als 4.5m voneinander entfernt. Die Bahn ist aber sehr unregelmäßig, und die mittlere Periode ist ungefähr 430 Tage. Diese Abweichungen von der Eulerschen Vorhersage werden verschiedenen Störungen zugeschrieben (atmosphärische Bewegungen; Erde nicht starr).

Wie sieht nun die Bewegung bezüglich des raumfesten Koordinatensystems aus? Um diese Frage zu beantworten, nützen wir die Vereinfachungen aus, die sich aus $\mathbf{Q}(t) \equiv 0$ und $I'_1 = I'_2$ für den kräftefreien symmetrischen Kreisel ergeben. Die explizite Konstruktion von $R(t)$ aus $R^{-1}\dot{R} = \sum_k \omega'_k J_k$ läßt sich dann vermeiden. Beachte, daß wegen $(L'_1, L'_2, L'_3) = (I'_1\omega'_1, I'_1\omega'_2, I'_3\omega'_3)$ und $\mathbf{f}' = (0, 0, 1)$ die Vektoren \mathbf{L}' , $\boldsymbol{\omega}'$ und \mathbf{f}' linear abhängig sind: es gilt $\mathbf{L}' - I'_1\boldsymbol{\omega}' + (I'_1 - I'_3)\omega'_3\mathbf{f}' = 0$. Daher sind \mathbf{L}' , $\boldsymbol{\omega}'$ und \mathbf{f}' **koplanar**, d.h. sie liegen in einer Ebene.

SATZ 3.15 *Figurenachse $f(t) := e_3(t)$ und momentane Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ des kräftefreien symmetrischen Kreisels liegen zu allen Zeiten koplanar zum Drehimpuls L_r , um den sie eine reguläre Präzession mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_{pr} ausführen. ω_{pr} ist der Koeffizient b in der Zerlegung $\omega = af + bL_r/|L_r|$, ($a, b \in \mathbb{R}$).*

Beweis: O.B.d.A. wählen wir $O = O' =$ Schwerpunkt und haben $L_t = 0$, $L = L_r$. Mit \mathbf{L}' , $\boldsymbol{\omega}'$, \mathbf{f}' sind auch die (abstrakten) Vektoren L, ω, f koplanar. $\omega(t)$ und $f(t)$ sind zeitabhängig, und L ist zeitunabhängig. Die Länge von ω ist erhalten: $|\omega(t)| = |\boldsymbol{\omega}'(t)| = \text{const}$. Ebenso sind die Winkel zwischen L, ω und f erhalten, denn

$$\langle L, \omega \rangle = 2T = \text{const} > 0 \quad \text{und} \quad \langle \omega, f \rangle = \omega'_3 = \text{const}.$$

ω und f überstreichen also Kegel um L mit derselben Winkelgeschwindigkeit, ω_{pr} . Zur Berechnung von ω_{pr} benützt man Gleichung (3.6) von Abschnitt 3.2.1 für f :

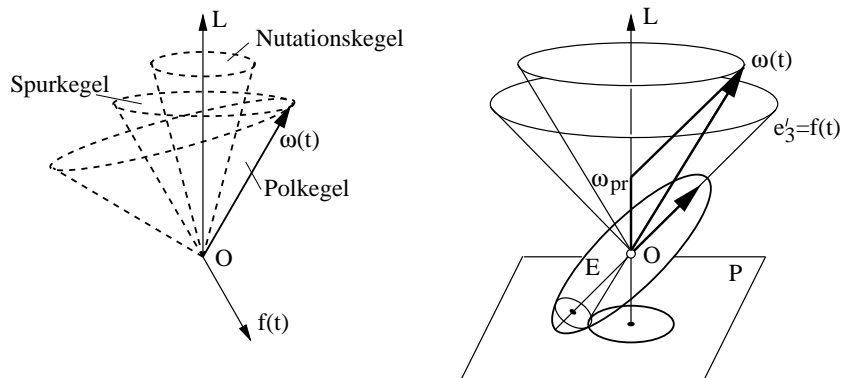
$$\dot{f}(t) = \omega(t) \wedge f(t).$$

Da der zu L senkrechte Anteil von f um L mit Winkelgeschwindigkeit ω_{pr} rotiert, gilt

$$\omega_{pr}(t) = \frac{|\omega(t) \wedge f(t)|}{|e_L \wedge f(t)|},$$

wobei $e_L := L/|L|$. Aus der Zerlegung $\omega = af + be_L$ folgt dann sofort: $\omega_{pr} = b$. Da gilt: $|\omega(t) \wedge f(t)| = (|\omega(t)|^2 - \langle \omega(t), f(t) \rangle^2)^{1/2} = \omega'_\perp = \text{const}$ und $|e_L \wedge f(t)| = (1 - \langle e_L, f(t) \rangle^2)^{1/2} = \text{const}$, folgt außerdem $\omega_{pr} = \text{const}$.

Die Aussage von Satz 3.15 ist in den beiden Figuren dargestellt. In der rechten Figur erkennt man neben Spurkegel (ω) und Nutationskegel (f) auch noch das auf der



invariablen Ebene P rollende Energieellipsoid E von Abschnitt 3.4. Beachte, daß der Kosinus des Winkels zwischen L und ω wegen $\langle \omega, L \rangle = 2T > 0$ immer positiv ist.

Bemerkung: Im allgemeinen gilt $\omega_{pr} \neq \omega'_{pr}$.

3.5.2 Unsymmetrischer Kreisel

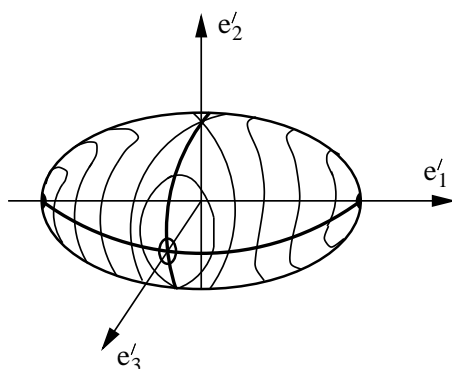
Nach wie vor gelte: $O = O'$, $L_r = L$.

Wir gehen ähnlich wie bei der Poinsoischen Konstruktion vor, nur arbeiten wir jetzt im körperfesten Koordinatensystem K' . Die Euler-Gleichungen (3.15) haben für $\mathbf{D}'_r = 0$ zwei quadratische erste Integrale, nämlich die kinetische Energie: $2T = L_1'^2/I_1' + L_2'^2/I_2' + L_3'^2/I_3'$, und das Längenquadrat des Drehimpulses: $|L|^2 = L_1'^2 + L_2'^2 + L_3'^2$. Deshalb liegt \mathbf{L}' im Durchschnitt eines Ellipsoids und einer Sphäre. Um die Struktur der Durchschnitte zu untersuchen, fixieren wir das Ellipsoid $T > 0$ und variieren den Radius $|L|$ der Sphäre.

Die Halbachsen des Ellipsoids sind $\sqrt{2TI_1'} > \sqrt{2TI_2'} > \sqrt{2TI_3'}$, wenn wir o.B.d.A. annehmen: $I_1' > I_2' > I_3' > 0$. Ist der Radius $|L|$ der Sphäre kleiner (größer) als die kleinste (größte) Halbachse, so ist der Durchschnitt leer und es existiert keine reale Bewegung zu diesen Werten von T und $|L|$. Wenn der Radius der Sphäre gleich der kleinsten Halbachse ist, dann besteht der Durchschnitt aus zwei Punkten. Vergrößern wir den Radius, so daß $\sqrt{2TI_3'} < |L| < \sqrt{2TI_2'}$, so entstehen zwei geschlossene Kurven um die Enden der kleinsten Halbachsen. In gleicher Weise bekommen wir für $|L| < \sqrt{2TI_1'}$ zwei Punkte, und für $\sqrt{2TI_2'} < |L| < \sqrt{2TI_1'}$ zwei geschlossene Kurven in der Nähe der Enden der großen Halbachsen. Für $|L| = \sqrt{2TI_2'}$ besteht der Durchschnitt aus zwei Kreisen.

Graphische Illustration:

Jedem der sechs Enden der Halbachsen des Ellipsoids entspricht eine stationäre Lösung $\mathbf{L}' = \text{const}$ der Euler-Gleichungen (3.15). Für eine solche Lösung ist ω'



zu \mathbf{L}' (und somit ω zu L) parallel: der Körper rotiert ganz einfach mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine seiner Hauptachsen e'_k ($k = 1$ oder 2 oder 3), die in diesem Fall raumfest ist. Eine solche Bewegung nennen wir **stationäre Drehung**.

SATZ 3.16 *Die stationären Drehungen um die größte und kleinste Halbachse des Energieellipsoids sind Liapunov-stabil. Hingegen ist die stationäre Drehung um die mittlere Halbachse instabil.*

Beweis: Betrachte die obige Figur: wird die Anfangsbedingung $\mathbf{L}' = (L', 0, 0)$ oder $\mathbf{L}' = (0, 0, L')$ leicht abgeändert, so ist die Kurve $t \rightarrow \mathbf{L}'(t)$ eine kleine geschlossene Bahn. Dagegen resultiert eine kleine Störung der Anfangsbedingung $\mathbf{L}' = (0, L', 0)$ in einer großen Bahn.

3.6 Die Eulerschen Winkel

Ziel dieses Abschnitts ist die Verwandlung der Gleichung $R^{-1}\dot{R} = \sum_k \omega'_k J_k$ in ein geeignetes System von Differentialgleichungen. Dazu führen wir nach Euler geeignete Koordinaten auf $SO(3)$ ein.

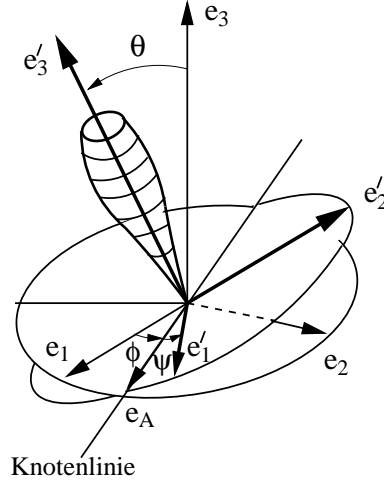
Die raumfeste Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ läßt sich in der folgenden Weise durch drei sukzessive Drehungen in die körperfeste Basis überführen. Die durch e_1 und e_2 aufgespannte Ebene schneidet die durch e'_1 und e'_2 aufgespannte Ebene im allgemeinen in einer Geraden, die wir die **Knotenlinie** nennen. In der Knotenlinie liege der Einheitsvektor e_A :

1. Drehe um e_3 durch einen Winkel ϕ , bis e_1 mit e_A übereinstimmt:

$$\{e_A, e_B, e_C\} := \{e_1 \cos \phi + e_2 \sin \phi, -e_1 \sin \phi + e_2 \cos \phi, e_3\}.$$

2. Drehe um e_A durch einen Winkel θ , bis $e_C = e_3$ mit e'_3 übereinstimmt:

$$\{e_\alpha, e_\beta, e_\gamma\} := \{e_A, e_B \cos \theta + e_C \sin \theta, -e_B \sin \theta + e_C \cos \theta\}.$$



3. Drehe um $e_\gamma = e'_3$ durch einen Winkel ψ , bis das körperfeste System $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ entsteht:

$$\{e'_1, e'_2, e'_3\} = \{e_\alpha \cos \psi + e_\beta \sin \psi, -e_\alpha \sin \psi + e_\beta \cos \psi, e_\gamma\}.$$

Alle Drehungen sind Drehungen im mathematisch positiven Sinn, d.h. im Gegen-
uhrzeigersinn.

Verketten der drei Drehungen gibt:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{-\psi J_3} := S_{-\psi} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = e^{-\theta J_1} := \tilde{S}_{-\theta}$$

können wir dies auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = S_{-\psi} \tilde{S}_{-\theta} S_{-\phi} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Vergleich mit $e'_k = R e_k = \sum_{l=1}^3 e_l R_{lk} = \sum_l (R^T)_{kl} e_l$ ($k = 1, 2, 3$) liefert:

$$R^T = S_{-\psi} \tilde{S}_{-\theta} S_{-\phi}$$

oder

$$\boxed{R = S_\phi \tilde{S}_\theta S_\psi = e^{\phi J_3} e^{\theta J_1} e^{\psi J_3} =: R(\phi, \theta, \psi)}. \quad (3.17)$$

Nun drücken wir $R^{-1}\dot{R}$ durch die **Euler-Winkel** ϕ, θ, ψ und ihre Zeitableitungen aus:

$$\begin{aligned} R^{-1}\dot{R} &= S_\psi^{-1} \tilde{S}_\theta^{-1} S_\phi^{-1} (\dot{S}_\phi \tilde{S}_\theta S_\psi + S_\phi \dot{\tilde{S}}_\theta S_\psi + S_\phi \tilde{S}_\theta \dot{S}_\psi) \\ &= S_\psi^{-1} \tilde{S}_\theta^{-1} (S_\phi^{-1} \dot{S}_\phi) \tilde{S}_\theta S_\psi + S_\psi^{-1} (\tilde{S}_\theta^{-1} \dot{\tilde{S}}_\theta) S_\psi + S_\psi^{-1} \dot{S}_\psi. \end{aligned}$$

Nach einer Rechnung moderater Länge erhalten wir

$$R^{-1}\dot{R} = \sum_k \omega'_k J_k \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Diese Gleichungen lösen wir nach $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ auf:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{\sin \theta} (\omega'_1 \sin \psi + \omega'_2 \cos \psi); \\ \dot{\theta} &= \omega'_1 \cos \psi - \omega'_2 \sin \psi; \\ \dot{\psi} &= \omega'_3 - \cot \theta (\omega'_1 \sin \psi + \omega'_2 \cos \psi). \end{aligned}$$

Für vorgegebene Winkelgeschwindigkeit $(\omega'_1(t), \omega'_2(t), \omega'_3(t))$, die aus der Lösung der Euler-Gleichungen (3.15) folgt, ist dies ein System von drei nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit für die drei Euler-Winkel ϕ, θ, ψ . Im Falle des kräftefreien Kreisel ist das System mit dem Drehimpulssatz durch Quadratur lösbar (siehe z.B. Landau/Lifschitz).

Nachdem wir mit den Euler-Winkeln einen Satz von geeigneten Koordinaten auf $SO(3)$ eingeführt haben, sind wir nun in der Lage, eine Lagrange-Funktion für den starren Körper anzugeben. Wir benützen die Koordinaten $(Q_1, Q_2, Q_3; \phi, \theta, \psi)$ mit den Geschwindigkeiten $(\dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \dot{Q}_3; \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$, wobei \mathbf{Q} die Koordinaten des Schwerpunkts ($\equiv O'$) bezüglich K sind. Die Lagrange-Funktion ist dann gegeben durch $L = T - U$ mit $T = T_t + T_r$, $T_t = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{Q}}^2$

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2} \sum_k I'_k (\omega'_k)^2 = \frac{I'_1}{2} (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi)^2 \\ &+ \frac{I'_2}{2} (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi)^2 + \frac{I'_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

wobei wir die Gleichungen (3.18) benutzt haben.

Behauptung: Aus den Lagrange-Gleichungen zur Lagrange-Funktion $L = T_r - U$ folgen die Euler-Gleichungen (3.15) von Abschnitt 3.5.

Beweis (partiell): Betrachte z.B. die Lagrange-Gleichung für den Euler-Winkel ψ , $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \psi}$. Es gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T_r}{\partial \omega'_3} \frac{\partial \omega'_3}{\partial \dot{\psi}} = I'_3 \omega'_3$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial T_r}{\partial \omega'_1} \frac{\partial \omega'_1}{\partial \psi} + \frac{\partial T_r}{\partial \omega'_2} \frac{\partial \omega'_2}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \psi} = (I'_1 - I'_2) \omega'_1 \omega'_2 - \frac{\partial U}{\partial \psi}.$$

Da es sich bei ψ um den Drehwinkel um die e'_3 -Achse handelt, ist $-\frac{\partial U}{\partial \psi}$ die zugehörige verallgemeinerte Kraft, nämlich das Drehmoment um die e'_3 -Achse, $D'_{r,3}$.

Also folgt die dritte Euler–Gleichung

$$I'_3 \dot{\omega}'_3 = (I'_1 - I'_2) \omega'_1 \omega'_2 + D'_{r,3}.$$

Die anderen zwei Gleichungen erfordern etwas mehr Aufwand.

3.7 Der schwere symmetrische Kreisel

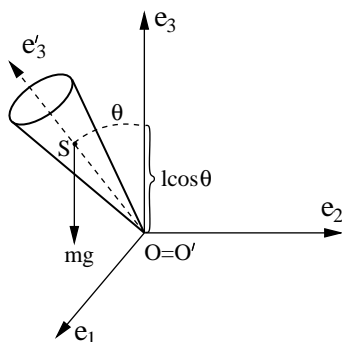
(Arnold, Seiten 148ff)

Betrachte den unsymmetrischen Kreisel, welcher an einem raumfesten Punkt $O = O'$ festgehalten wird und der Schwerkraft unterliegt. Die Bestimmung der Bewegung eines solchen Systems ist ein im allgemeinen ungelöstes Problem, was daran liegt, daß das System drei Freiheitsgrade hat, aber nur zwei erste Integrale bekannt sind: die Energie $E = T + U$, und die Projektion des Drehimpulses auf die dem Schwerfeld parallele Achse, $L_3 = \langle e_3, L \rangle$.

Hier werden wir einen exakt lösbaren Spezialfall behandeln: den symmetrischen Kreisel mit Fixpunkt $O = O'$ (\neq Schwerpunkt) auf seiner Symmetrieachse. In diesem Fall läßt eine Drehung um die Figurenachse e'_3 die Lagrange–Funktion invariant, und nach dem Noether–Theorem existiert daher ein weiteres erstes Integral, nämlich die Projektion des Drehimpulses auf e'_3 , $L'_3 = \langle e'_3, L \rangle$.

An dieser Stelle soll noch einmal besonders hervorgehoben werden, daß Drehimpuls, Drehmoment, Winkelgeschwindigkeit und Trägheitstensor immer **relativ zu einem Punkt** definiert sind. In den Abschnitten 3.4 und 3.5 war es zweckmäßig, diesen Punkt O' in den Schwerpunkt des starren Körpers zu legen. (Wir hatten dann insbesondere die Zerlegungen $T = T_t + T_r$ und $L = L_t + L_r$, wobei L der Drehimpuls relativ zu O und L_r der Drehimpuls relativ zu O' war.) Hier wird es sich nun als vorteilhaft erweisen, eine andere Wahl zu treffen:

Die Größen L, ω und I beziehen sich im folgenden auf den Fixpunkt $O = O'$.



Schwerer symmetrischer Kreisel mit Fixpunkt auf seiner Symmetrieachse. S =Schwerpunkt, $l = |S - O|$.

Wir bezeichnen die Hauptträgheitsmomente bezüglich $O = O'$ mit $I_1 = I_2$ und I_3 . Mit den Ergebnissen von Abschnitt 3.3 und Gleichung (3.18) von Abschnitt 3.6 haben wir dann die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta.$$

Die Koordinaten ϕ und ψ sind zyklisch (für den unsymmetrischen Kreisel wäre nur ϕ zyklisch), weshalb die zugehörigen verallgemeinerten Impulse erhalten sind:

$$L_3 = p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\psi}I_3 \cos \theta = \text{const}, \quad (3.20)$$

$$L'_3 = p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\phi}I_3 \cos \theta + \dot{\psi}I_3 = \text{const}. \quad (3.21)$$

Behauptung: Die Bewegung des Neigungswinkels θ , den die Symmetrieachse e'_3 mit der Vertikalen e_3 bildet, ist dieselbe wie für das System mit Energie

$$E' = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta), \quad (3.22)$$

wobei das effektive Potential durch die Formel

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(L_3 - L'_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta$$

gegeben ist.

Beweis: Wir lösen die Gleichungen (3.20) und (3.21) nach $\dot{\phi}$ und $\dot{\psi}$ auf:

$$\dot{\phi} = \frac{L_3 - L'_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{L'_3}{I_3} - \cos \theta \frac{L_3 - L'_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (3.23)$$

Diese Ausdrücke setzen wir in die Energie $E = T + U$ ein und erhalten

$$E = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{L'_3{}^2}{2I_3} + mgl \cos \theta + \frac{(L_3 - L'_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta}.$$

Die Zahl $L'_3{}^2/2I_3 =: E - E'$ hat auf die Bewegungsgleichung für θ keinen Einfluß. Zum Studium des eindimensionalen Systems mit Energie (3.22) empfiehlt sich die Substitution $\cos \theta = u$. Außerdem setzen wir:

$$\frac{L_3}{I_1} =: a, \quad \frac{L'_3}{I_1} =: b, \quad \frac{2E'}{I_1} =: \alpha, \quad \frac{2mgl}{I_1} =: \beta.$$

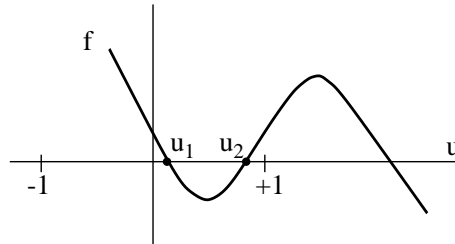
Dann wird der Energiesatz zu

$$\dot{u}^2 + f(u) = 0,$$

wobei $f(u) = -(\alpha - \beta u)(1 - u^2) + (a - bu)^2$, und die zeitliche Änderung des Azimutwinkels ϕ wird nach (3.23) durch die Gleichung

$$\dot{\phi} = \frac{a - bu}{1 - u^2} \quad (3.24)$$

bestimmt. Beachte, daß f ein Polynom dritten Grades ist und die speziellen Funktionswerte $f(\pm\infty) = \mp\infty$ und $f(\pm 1) = +(a \mp b)^2 > 0$ (falls $a \mp b \neq 0$) annimmt. Ferner entspricht eine reale Bewegung des Kreisels solchen Werten der Konstanten a, b, α und β , für die gilt: $f(u) \leq 0$ auf einem Intervall zwischen $u = -1$ und $u = +1$. Also hat f (im realen Fall) genau zwei reelle Nullstellen u_1 und u_2 mit $-1 \leq u_1 \leq u_2 \leq +1$:

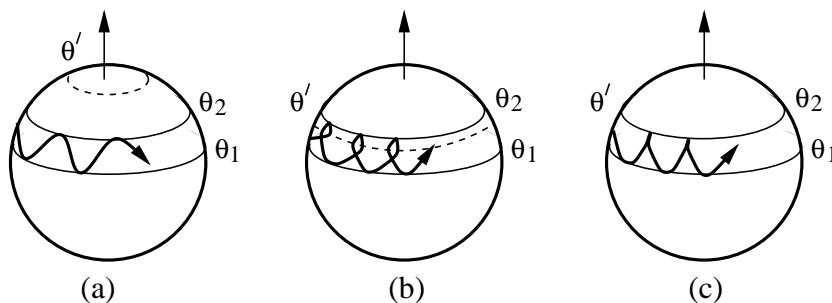


Folglich variiert der Neigungswinkel θ periodisch zwischen $\theta_1 := \arccos u_1$ und $\theta_2 = \arccos u_2$. Diese periodische Bewegung des Neigungswinkels heißt **Nutation**.

Wir betrachten jetzt die durch Gleichung (3.24) bestimmte Bewegung des Azimutwinkels ϕ . Der Punkt, an dem die Symmetrieachse des Kreisels die um O zentrierte Einheitssphäre durchstößt, bewegt sich in dem Ring zwischen den Polarwinkeln θ_1 und θ_2 . Wir definieren u' als die Lösung der Gleichung $a - bu = 0$ (Nullstelle des Zählers der rechten Seite von (3.24)) und setzen $\theta' := \arccos u'$.

Fallunterscheidung:

- (a) $u' \notin [u_1, u_2]$: dann hat $\dot{\phi}$ immer das gleiche Vorzeichen und es entsteht eine Kurve wie in Figur (a).
- (b) $u' \in (u_1, u_2)$: dann ändert $\dot{\phi}$ periodisch sein Vorzeichen und es entsteht eine Kurve wie in Figur (b).
- (c) $u' = u_2$ (oder $u' = u_1$): es entsteht eine Kurve mit Spitzkehren wie in Figur (c).



Der letzte Fall ist ein Spezialfall, der sich experimentell dadurch realisieren läßt, daß man den Kreisel beim Neigungswinkel θ_2 ohne Anfangsgeschwindigkeit (genauer $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$, $\dot{\psi} \neq 0$) losläßt. Der Kreisel fällt dann zunächst, um sich später wieder aufzurichten. Die azimuthale Bewegung des Kreisels heißt **Präzession**. Die vollständige Bewegung des Kreisels besteht aus: (i) Drehung um seine Symmetrieachse (ψ), (ii) Nutation (θ), und (iii) Präzession (ϕ). Jede der drei Einzelbewegungen hat ihre eigene Frequenz. Sind diese Frequenzen inkommensurabel, so kehrt der Kreisel nie zu seiner Ausgangsposition zurück, obwohl er ihr beliebig nahe kommt. Die angegebenen Formeln reduzieren das Problem der Lösung der Bewegungsgleichungen des schweren symmetrischen Kreisels auf Quadraturen. Man wird auf sogenannte elliptische Integrale geführt. In vielen Situationen läßt sich jedoch nützliche qualitative Information auch ohne Quadraturen gewinnen.

Schlafender Kreisel. Wir betrachten die spezielle Lösung der Bewegungsgleichungen, wo die Symmetrieachse immer senkrecht steht ($\theta = 0$) und die Winkelgeschwindigkeit konstant ist ("schlafender Kreisel"). In diesem Fall gilt offensichtlich: $L_3 = L'_3 = I_3 \omega_3$. Wir betrachten nun die Bewegung der Symmetrieachse des Kreisels (nicht die Bewegung des Kreisels selbst!) und fragen, ob die Gleichgewichtslage $\theta = 0$ stabil ist. Dazu entwickeln wir U_{eff} nach Potenzen von θ um $\theta = 0$ und finden:

$$U_{\text{eff}}(\theta) = C + A\theta^2 + \dots \quad \text{mit} \quad A = \frac{\omega_3^2 I_3^2}{8I_1} - \frac{mgl}{2}.$$

Die Gleichgewichtslage $\theta = 0$ des eindimensionalen Systems mit Energie (3.22) ist stabil (instabil), wenn gilt $A > 0$ ($A < 0$). Die Bedingung für Stabilität ist daher $\omega_3^2 > 4mglI_1/I_3^2$. Ein schlafender Kreisel "erwacht", sobald ω_3 durch die Wirkung von Reibungskräften unter den kritischen Wert absinkt.

Kapitel 4

Hamiltonsche Formulierung der Mechanik

In diesem Kapitel entwickeln wir die Hamiltonsche (oder “kanonische”) Formulierung der Mechanik, die den Ausgangspunkt für die Quantenmechanik bildet. Die Bewegungsgleichungen für ein mechanisches System mit f Freiheitsgraden schreiben wir als ein System von $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit. Wir werden sehen, daß solche Hamiltonschen Systeme unter einer sehr großen Gruppe Transformationen, den sogenannten kanonischen Transformationen, forminvariant sind.

Den Übergang von der Lagrange-Funktion zur Hamilton-Funktion vollziehen wir mit der Legendre-Transformation.

4.1 Legendre-Transformation

Um das folgende zu motivieren, erinnern wir an die Lagrange-Funktion des N -Teilchensystems mit konservativen Kräften,

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i^2 - U(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N).$$

Die Impulse \mathbf{p}_i sind durch $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}_i$ gegeben, und die Hamilton-Funktion ist gleich der Energie:

$$H = T + U = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + U(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N).$$

Wie man sieht, hängen Lagrange-Funktion und Hamilton-Funktion folgendermaßen zusammen:

$$H(q, p) = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i - L(q, \dot{q}),$$
$$\left(q = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N), \dot{q} = (\dot{\mathbf{q}}_1, \dots, \dot{\mathbf{q}}_N), p = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \right)$$

wobei auf der rechten Seite $\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{p}_i/m_i$ einzusetzen ist. Diesen Zusammenhang wollen wir nun formalisieren und verallgemeinern.

Wir erläutern den Begriff der Legendre-Transformation zunächst für Funktionen einer einzigen Veränderlichen und geben später den allgemeinen Fall an.

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare konvexe Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Konvexität einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion f bedeutet $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$. Wir definieren die Funktion g durch $g(x) := f'(x)$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen besitzt g eine Umkehrfunktion $h: h \circ g = \text{Id}$. Diese Funktion gewinnt man durch Auflösen der Gleichung $y = g(x)$ nach $x: x = h(y)$.

DEFINITION 4.1 Die **Legendre-Transformierte** $\mathcal{L}f$ von f ist erklärt durch

$$(\mathcal{L}f)(y) := yh(y) - f(h(y)).$$

Beispiele:

- (i) Sei $f(v) = mv^2/2$. Dann ist $g(v) = f'(v) = mv =: p$ und $h(p) = p/m$. Folglich ist

$$(\mathcal{L}f)(p) = p \frac{p}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} \right)^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

- (ii) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha/\alpha$. Dann ist $(\mathcal{L}f)(y) = y^\beta/\beta$, wobei $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$. Konvexität erfordert $\alpha > 1$.

- (iii) Sei $f(x) = e^x$. Dann ist $(\mathcal{L}f)(y) = y(\ln y - 1)$.

Wir wollen nun einige Eigenschaften der Legendre-Transformation herausarbeiten. Die Notationen seien so wie oben eingeführt.

SATZ 4.1 $(\mathcal{L}f)' = h$.

Beweis: $\left(\frac{d}{dy} \mathcal{L}f \right)(y) = h(y) + yh'(y) - (f' \circ h)(y)h'(y)$. Wegen $f' \circ h = g \circ h = \text{Id}$ heben sich die letzten beiden Terme auf der rechten Seite weg.

SATZ 4.2 $(\mathcal{L}f)'' = (f'' \circ h)^{-1}$.

Beweis: Aus der Aussage von Satz 4.1 folgt durch nochmaliges Differenzieren: $(\mathcal{L}f)'' = h'$. Nun gilt aber wegen $(g \circ h)(y) = y : (g' \circ h)h' = 1$ und somit $h' = (g' \circ h)^{-1} = (f'' \circ h)^{-1}$.

KOROLLAR 4.2.1 Mit f ist auch $\mathcal{L}f$ konvex.

Daher können wir \mathcal{L} nochmals anwenden.

SATZ 4.3 Die Legendre-Transformation ist involutiv, d.h. $\mathcal{L}^2 f := \mathcal{L}(\mathcal{L}f) = f$ für $f \in C^2(I)$, f konvex.

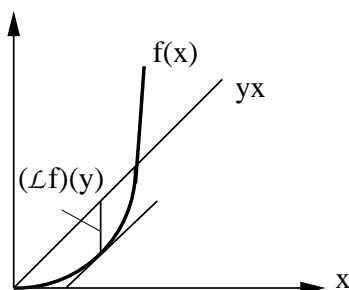
Beweis: Da nach Satz 4.1 gilt $(\mathcal{L}f)' = h$ und g die Umkehrfunktion zu h ist, folgt

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^2 f)(x) &= x g(x) - (\mathcal{L}f)(g(x)) \\ &= x g(x) - g(x) h(g(x)) + f(h(g(x))) = f(x). \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Legendre-Transformation läßt sich durch die Definition:

$$(\mathcal{L}f)(y) := \sup_{x \in I} (yx - f(x)) \quad (4.1)$$

auf beliebige stetige konvexe Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ausdehnen. Gleichung (4.1) hat die nachstehende graphische Interpretation:



Hieraus läßt sich für den Fall von konvexem $f \in C^2(I)$ die Äquivalenz von (4.1) zu Definition 4.1 leicht erkennen.

4.1.1 Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Veränderlicher

DEFINITION 4.2 Sei $V \equiv \mathbb{R}^n$ und $V^* := L(V, \mathbb{R})$ der Raum der linearen Abbildungen $V \rightarrow \mathbb{R}$. Sei weiter $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ von der Klasse C^2 und konvex, d.h. die Hessesche Form $D_x^2 f$ ist positiv definit für alle $x \in V$. Definiere $g : V \rightarrow V^*$ durch $g = Df$ und die Umkehrabbildung $h : V^* \rightarrow V$ durch $h \circ g = Id$. Dann ist die Legendre-Transformierte $\mathcal{L}f : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch

$$(\mathcal{L}f)(y) := y(h(y)) - f(h(y)).$$

Bemerkung: In Koordinatendarstellung bedeutet dies, daß man die Gleichungen $y_k = g_k(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ ($k = 1, \dots, n$) nach x auflöst: $x_l = h_l(y)$ ($l = 1, \dots, n$) und dann setzt:

$$(\mathcal{L}f)(y) := \sum_{l=1}^n y_l h_l(y) - f(h(y)).$$

Beachte, daß die Definitionsbereiche von $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathcal{L}f : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ zueinander duale Räume sind.

SATZ 4.4 Die Voraussetzungen seien wie in Definition 4.2. Dann gelten die Gleichungen:

$$D(\mathcal{L}f) = h, \tag{4.2}$$

$$D_y^2(\mathcal{L}f) = (D_h^2(y)f)^{-1}, \tag{4.3}$$

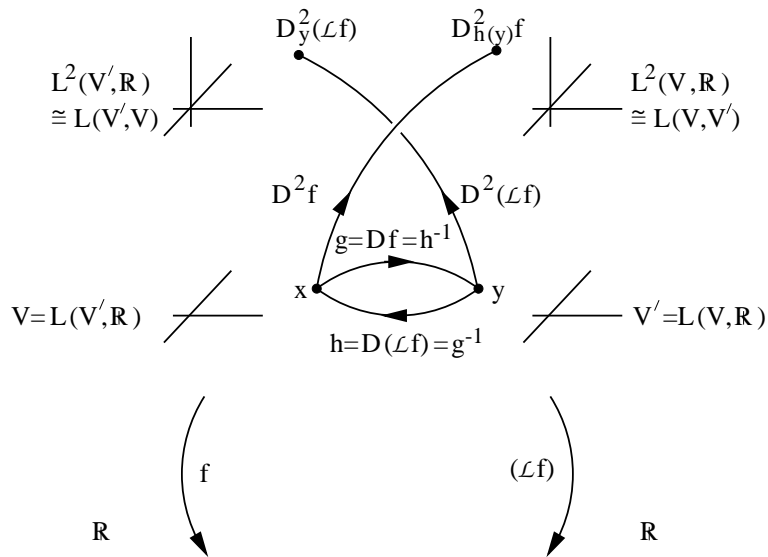
$$\mathcal{L}^2 f = f. \tag{4.4}$$

Beweis: Übertrage die Beweisschritte zu den Sätzen 4.1–4.3. ■

Für Gleichung (4.3) beachte den natürlichen Isomorphismus $L^2(V, \mathbb{R}) \simeq L(V, V')$ durch

$$\begin{aligned} \omega : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \omega(x, y) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \omega : V &\rightarrow V' = L(V, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \omega(x, \bullet). \end{aligned}$$

Graphische Veranschaulichung:



Schließlich betrachten wir noch den Fall, wo f von einem **zusätzlichen Parameter** abhängt: $f : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, \alpha) \mapsto f(x; \alpha)$. Wir definieren die **Legendre-Transformierte $\mathcal{L}f$ von f als Funktion von x** , indem wir den Parameter α festhalten. Damit ist gemeint, daß wir die Gleichungen

$$y_k = g_k(x; \alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x; \alpha) \quad (k = 1, \dots, n),$$

nach x auflösen: $x_l = h_l(y; \alpha)$ ($l = 1, \dots, n$), und dann setzen:

$$(\mathcal{L}f)(y; \alpha) := \sum_{l=1}^n y_l h_l(y; \alpha) - f(h(y; \alpha); \alpha).$$

Es gelten dann wieder die Gleichungen (4.2)–(4.4), wobei beim Bilden der Differentiale $D(\mathcal{L}f)$, $D^2(\mathcal{L}f)$ und $D^2 f$ der Parameter α als fest zu betrachten ist. Außerdem gilt die **Behauptung**:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{L}f = -\frac{\partial}{\partial \alpha} f. \quad (4.5)$$

Hierbei ist auf der rechten Seite $x = h(y; \alpha)$ einzusetzen.

Beweis:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{L}f \right) (y; \alpha) &= \sum_l y_l \frac{\partial h_l}{\partial \alpha} (y; \alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha} (h(y; \alpha); \alpha) \\ &- \sum_l \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_l} (h(y; \alpha); \alpha)}_{=y_l} \frac{\partial h_l}{\partial \alpha} (y; \alpha) = -\frac{\partial f}{\partial \alpha} (h(y; \alpha); \alpha). \end{aligned}$$

Hängt f nicht von einem, sondern mehreren zusätzlichen Parametern $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ab, gehen wir ganz genauso vor. Es gelten dann wiederum Gleichungen (4.2)–(4.4) und anstatt von (4.5) haben wir

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \mathcal{L}f = -\frac{\partial}{\partial \alpha_k} f \quad (k = 1, \dots, m). \quad (4.5')$$

4.2 Die kanonischen Gleichungen

Wir erinnern uns an die Definition der Lagrange-Funktion L als eine Abbildung:

$$\begin{aligned} L: U \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (q, \dot{q}, t) &\mapsto L(q, \dot{q}, t). \end{aligned}$$

Die Lagrange-Gleichungen schreiben wir in der Form

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f), \quad \text{wobei} \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

der verallgemeinerte Impuls zu q_k ist, den wir ab sofort den **kanonischen Impuls** nennen.

SATZ 4.5 Die Lagrange-Gleichungen $\dot{p}_k = \partial L / \partial q_k$, $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ ($k = 1, \dots, f$) sind äquivalent zu dem System von Gleichungen:

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}} \quad (k = 1, \dots, f), \quad (4.6)$$

wobei H die Legendre-Transformierte von L als Funktion der Geschwindigkeiten \dot{q} ist.

Beweis:

1. Lagrange-Gleichungen \Rightarrow (4.6):

Es gelte also $\dot{p}_k = \partial L / \partial q_k$. Um die Resultate von Abschnitt 4.1 anzuwenden, machen wir die Identifikationen:

$$L \equiv f, \quad H = \mathcal{L}f, \quad \dot{q} \equiv x, \quad p = y; \quad (q, t) = \alpha.$$

Wir bezeichnen die Umkehrfunktionen zu $p_k = g_k(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}, t)$ mit $\dot{q}_k = h_k(q, p, t)$ und haben:

$$H(q, p, t) = \sum_{k=1}^f p_k h_k(q, p, t) - L(q, h(q, p, t), t).$$

Die Behauptung folgt dann sofort aus Gleichungen (4.2) und (4.5') von Abschnitt 4.1:

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= h_k(q, p, t) \stackrel{(4.2)}{=} \frac{\partial H}{\partial p_k}(q, p, t) \quad \text{und} \\ \dot{p}_k &= \frac{\partial L}{\partial q_k}(q, h(q, p, t), t) \stackrel{(4.5')}{=} - \frac{\partial H}{\partial q_k}(q, p, t). \end{aligned}$$

2. (4.6) \Rightarrow Lagrange-Gleichungen:

Benütze Gleichung (4.4) von Abschnitt 4.1 ($H = \mathcal{L}L \Leftrightarrow L = \mathcal{L}H$) und argumentiere wie unter 1.

DEFINITION 4.3 Die Gleichungen (4.6) heißen **Hamiltonsche oder kanonische Gleichungen**; die Funktion H heißt **Hamilton-Funktion**.

Beispiel 1: Eine Lagrange-Funktion für das Teilchen im elektromagnetischen Feld ist

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + e \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - e\varphi(\mathbf{x}, t),$$

siehe Gleichung (2.5) von Abschnitt 2.2. Der kanonische Impuls ist per Definition

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m \dot{\mathbf{x}} + e \mathbf{A}(\mathbf{x}, t).$$

Beachte, daß für eine Teilchen im Magnetfeld der kanonische Impuls \mathbf{p} vom mechanischen (oder kinematischen) Impuls $m \dot{\mathbf{x}}$ verschieden ist!

Nach $\dot{\mathbf{x}}$ auflösen ergibt: $\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - e \mathbf{A})$. Damit ist die Legendre-Transformierte von L als Funktion von $\dot{\mathbf{x}}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ &= \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - e \mathbf{A}) - \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e \mathbf{A})^2 - \frac{e}{m} (\mathbf{p} - e \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} + e\varphi \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e \mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2 + e\varphi(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Beispiel 2: Sei L die Lagrange-Funktion von Gleichung (2.16) in Abschnitt 2.5.1: $L = T - U$ mit

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l} m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad U = U(q).$$

Dann ist $p_k = \sum_l m_{kl}(q) \dot{q}_l$ und $\dot{q}_l = \sum_k (m^{-1})_{lk}(q) p_k$ und

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} (m^{-1})_{kl}(q) p_k p_l + U(q) = T + U. \end{aligned}$$

Beispiel 3: Nach einem Gesetz der geometrischen Optik (“Fermat’sches Prinzip”) bewegt sich Licht vom Punkt A zum Punkt B in der kürzest möglichen Zeit, d.h. der Lichtstrahl minimiert das Laufzeitfunktional $S = \int_A^B c^{-1} ds$, wobei $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ das Euklidische Längenelement und $c = c_0/n$ die Lichtgeschwindigkeit des optischen Mediums mit Brechungsindex n ist. Wenn wir annehmen, daß der Lichtweg in der xy -Ebene längs des Graphen einer Funktion $x \mapsto y(x)$ verläuft, können wir auch schreiben

$$S = \frac{1}{c_0} \int L dx \quad \text{mit} \quad L(y, y', x) = n(x, y) \sqrt{1 + y'^2}.$$

Die Funktion L läßt sich als Lagrange-Funktion eines Lagrange-Systems mit verallgemeinerter Ortskoordinate y , verallgemeinerter Geschwindigkeit $y' = dy/dx$ und “Zeitparameter” x auffassen. Der zugehörige kanonische Impuls ist dann

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{ny'}{\sqrt{1 + y'^2}} = g(y').$$

Die Umkehrfunktion hierzu lautet $y' = h(p) = p/\sqrt{n^2 - p^2}$, und die Hamiltonfunktion $H = py' - L$ ergibt sich zu

$$H(y, p, x) = -\sqrt{n^2(x, y) - p^2}.$$

Falls der Brechungsindex nicht von x abhängt, ist das System autonom und es gilt der “Energiesatz”

$$H = -\sqrt{n^2(y) - p^2} =: -n_0 = \text{const}.$$

Durch Auflösen der Hamiltonschen Gleichung

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{n^2 - p^2}} = \frac{p}{n_0} = \frac{n}{n_0} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

nach y' erhalten wir $y' = \pm \sqrt{(n/n_0)^2 - 1}$, und Trennung der Variablen liefert

$$\pm \int dx = n_0 \int \frac{dy}{\sqrt{n^2(y) - n_0^2}}.$$

Damit ist das Problem der Berechnung der Lichtbahn auf eine Quadratur zurückgeführt. Für den linearen Fall $n(y) = n_0(1 + y/a)$ läßt sich das Integral elementar berechnen, und man erhält das Ergebnis

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) - a,$$

wobei x_0 eine Integrationskonstante ist. ■

An dieser Stelle wollen wir kurz innehalten und eine Bestandsaufnahme machen. Wir sind per Legendre–Transformation von der Lagrange–Funktion L zur Hamilton–Funktion H übergegangen, wobei die Geschwindigkeiten \dot{q} durch die kanonischen Impulse p als unabhängige Variable ersetzt wurden. Aus den Lagrange–Gleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ entstanden die Hamilton–Gleichungen $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ ($k = 1, \dots, f$). Während es sich bei dem ersten Satz um ein System von f Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $q(t)$ handelt, ist der zweite Satz ein System von $2f$ Differentialgleichungen für $q(t)$ und $p(t)$. In der Lagrange–Formulierung spielen die Geschwindigkeiten \dot{q} eine den verallgemeinerten Ortskoordinaten q untergeordnete Rolle: die Lagrange–Gleichungen sind lediglich unter Punkttransformationen $q \mapsto \varphi(q, t)$ forminvariant, und das Transformationsgesetz für \dot{q} wird durch φ festgelegt. Durch den Übergang zur Hamiltonschen Formulierung werden die Impulse p den Ortskoordinaten q formal gleichgestellt. (In der Tat werden wir Hamiltonsche Systeme kennenlernen, wo eine Unterscheidung zwischen Orten und Impulsen global gar nicht möglich ist!) Dies führt u.a. zu einer Vergrößerung der Gruppe von Transformationen, welche die Bewegungsgleichungen forminvariant lassen, siehe Abschnitt 4.5.

4.3 Die Symplektische Gruppe $\text{Sp}(2f)$

Motivation. Es wurde bereits in Abschnitt 1.6 vereinbart, daß wir den Raum der Zustände (q, p) den **Phasenraum**, M , nennen. Der Phasenraum hat immer gerade Dimension: $\dim M = 2f$. Wir werden in allen Rechnungen so tun, als sei der Phasenraum als offene Teilmenge des \mathbb{R}^{2f} darstellbar, obwohl dies für manche Systeme nicht der Fall ist. Wie in 1.6 schreiben wir:

$$x = (x_1, \dots, x_f, x_{f+1}, \dots, x_{2f}) = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f).$$

Die kanonischen Gleichungen nehmen dann die Form eines Hamiltonschen Systems $\dot{x} = X_H(x, t)$ mit dem Hamiltonschen Vektorfeld

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial x_{f+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2f}}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_f} \right)$$

an. Hamiltonsche Systeme haben eine Reihe spezieller Eigenschaften. Einige davon haben wir schon kennengelernt: im autonomen Fall ist die Energie $H = E$ erhalten. Für $f = 1$ und X_H linear wurde in 2.6 gezeigt, daß der Fluß von X_H flächentreu ist.

Um diese Eigenschaften zu verallgemeinern und weitere klar herauszuarbeiten, müssen wir die sogenannte "symplektische Struktur" des Phasenraums aufdecken. In Matrixschreibweise lauten die kanonischen Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_{f+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2f} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{1}_f \\ \hline -\mathbf{1}_f & \mathbf{0} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \partial H / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial H / \partial x_f \\ \partial H / \partial x_{f+1} \\ \vdots \\ \partial H / \partial x_{2f} \end{pmatrix}.$$

Die Antisymmetrie der Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_f \\ -\mathbf{1}_f & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ wird sich als wesentlich herausstellen (Ende der Motivation).

DEFINITION 4.4 Sei V ein reeller Vektorraum gerader Dimension, $\dim V = 2f$, und $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \omega(x, y) = -\omega(y, x)$ eine schiefe Bilinearform. Ist ω nichtentartet, so heißt das Paar (V, ω) ein **symplektischer Vektorraum**.

Die symplektische Gruppe steht in derselben Beziehung zu symplektischen Vektorräumen wie die orthogonale Gruppe zu Euklidischen Vektorräumen.

DEFINITION 4.5 Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum der Dimension $2f$. Die Gruppe aller linearen Abbildungen $S : V \rightarrow V$, die ω invariant lassen: $\omega(Sx, Sy) = \omega(x, y)$ für alle $x, y \in V$, heißt die **symplektische Gruppe** in $2f$ Dimensionen und wird mit $\mathrm{Sp}(2f, \mathbb{R}) \equiv \mathrm{Sp}(2f)$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathrm{Sp}(2f)$ heißen **symplektische Abbildungen**.

Sei nun $\{e_1, \dots, e_{2f}\}$ eine Basis von V . Wie üblich definieren wir die Matrixelemente der Matrixdarstellung einer linearen Abbildung $S : V \rightarrow V$ durch

$$Se_i = \sum_j e_j S^j_i.$$

Außerdem setzen wir $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$.

Behauptung: Für S symplektisch gilt $\sum_{k,l=1}^{2f} S^k_i \omega_{kl} S^l_j = \omega_{ij}$.

Beweis: $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j) = \omega(Se_i, Se_j)$. Wir entwickeln Se_i und Se_j nach der Basis $\{e_1, \dots, e_{2f}\}$:

$$Se_i = \sum_k e_k S^k_i, \quad Se_j = \sum_l e_l S^l_j.$$

Aus der Bi-Linearität von ω folgt dann:

$$\omega_{ij} = \sum_{k,l} S^k_i \omega(e_k, e_l) S^l_j = \sum_{k,l} S^k_i \omega_{kl} S^l_j.$$

In Matrixschreibweise,

$$S \equiv (S^k_i), \quad \omega \equiv (\omega_{ij}),$$

lautet die Aussage:

$$\boxed{S^T \omega S = \omega}. \tag{4.7}$$

Beachte, daß wir auch hier wieder abstrakte Abbildung und Matrixdarstellung mit dem gleichen Symbol notieren!

Beispiel: Betrachte den symplektischen Vektorraum (V, ω) mit $V = \mathbb{R}^2$ und $\omega = (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Eine reelle 2×2 -Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die Matrixdarstellung einer symplektischen Abbildung, wenn sie Gleichung (4.7) erfüllt. Wegen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

lautet die Bedingung (4.7) an S : $ad - bc = 1$, d.h. $\text{Sp}(2)$ besteht aus den linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Determinante Eins.

Übrigens hatte die Matrix $J_t = D\phi_t$ von Abschnitt 2.6 (parametrische Resonanz) genau die Eigenschaften der Matrix S des obigen Beispiels. Wir können daher jetzt schreiben: $J_t = D\phi_t \in \text{Sp}(2)$.

SATZ 4.6 *Es gilt $\det S = 1$ für alle $S \in \text{Sp}(2f)$.*

Beweis: Betrachte die mit dem äußeren Produkt \wedge gebildete alternierende $2f$ -lineare Form $\Omega := \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega}_{f \text{ mal}}$. Da Ω maximalen Grad hat und somit eine Volumenform ist, gilt:

$$(i) \quad \Omega(Sv_1, \dots, Sv_{2f}) = \det S \cdot \Omega(v_1, \dots, v_{2f}),$$

per Definition der Determinante. Andererseits gilt:

$$(ii) \quad \Omega(Sv_1, \dots, Sv_{2f}) = \Omega(v_1, \dots, v_{2f}),$$

denn mit ω ist auch Ω unter $\text{Sp}(2f)$ invariant. Kombinieren von (i) mit (ii) beweist die Behauptung.

SATZ 4.7 *Das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \det(\lambda - S)$ für $S \in \text{Sp}(2f)$ erfüllt die Gleichung $\chi(\lambda) = \lambda^{2f} \chi(\lambda^{-1})$.*

Beweis: Wir benützen die Gleichung (4.7) für die Matrixdarstellung von S . Mit ihrer Hilfe finden wir:

$$\begin{aligned} \det(\lambda - S^{-1}) &\stackrel{4.7}{=} \det(\lambda - \omega^{-1}S^T\omega) = \\ &\det(\omega^{-1}) \det(\lambda - S^T) \det(\omega) = \det(\lambda - S) = \chi(\lambda), \end{aligned}$$

wobei für das zweite und dritte Gleichheitszeichen die Multiplikativität der Determinante benutzt wurde. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \det(\lambda - S^{-1}) &= \det(S^{-1}) \det(\lambda S - 1) = \\ &\lambda^{2f} \det(S - \lambda^{-1}) = \lambda^{2f} (-1)^{2f} \chi(\lambda^{-1}) = \lambda^{2f} \chi(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

KOROLLAR 4.7.1 Wegen $\chi(0) = \det(-S) = \det S = 1$ folgt aus $\chi(\lambda) = \lambda^{2f} \chi(\lambda^{-1})$, daß mit λ auch λ^{-1} Nullstelle von χ und somit Eigenwert von S ist. Da darüber hinaus mit jeder komplexen Nullstelle λ des reellen Polynoms χ auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle von χ ist, treten die Eigenwerte symplektischer Abbildungen im allgemeinen als Quadrupel $(\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1})$ auf.

Beispiel: Wie oben bemerkt, ist die 2×2 -Matrix $J_T = A$ von Abschnitt 2.6 symplektisch. Aus Dimensionsgründen sind in diesem Beispiel ($f = 1$) nur zwei Fälle möglich:

- (i) $\lambda = \bar{\lambda}$. Dann haben wir ein Paar von Eigenwerten (λ, λ^{-1}) .
- (ii) $\lambda = \bar{\lambda}^{-1}$ (oder $|\lambda|^2 = 1$). Dann haben wir ein Paar $(\lambda, \bar{\lambda})$.

Beide Fälle treten im allgemeinen auf. Im ersten Fall ist die Abbildung A (für $\lambda \neq \pm 1$) instabil, im zweiten Fall stabil; siehe Abschnitt 2.6.

4.4 Hamiltonsche Systeme

Wir wollen jetzt die allgemeine Formulierung Hamiltonscher Systeme kennenlernen. Ein wichtiges Beispiel, dessen Behandlung diese Allgemeinheit erforderlich macht, ist der klassische Spin.

DEFINITION 4.6 Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2f$ und $\omega : M \rightarrow \text{Alt}^2(\mathbb{R}^{2f})$ eine 2-Form. Ist ω geschlossen und nichtentartet, so heißt ω eine **symplektische Struktur** auf M , und das Paar (M, ω) heißt eine **symplektische Mannigfaltigkeit**.

Nun betrachten wir ein mechanisches System mit Hamilton-Funktion $H(q, p)$, Ortskoordinaten $q = (q_1, \dots, q_f)$ und Impulskoordinaten $p = (p_1, \dots, p_f)$. Der Phasenraum sei $M = \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f$ und wir erklären eine geschlossene nichtentartete 2-Form ω auf M durch $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$. Dann ist das Paar (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Weiter sei $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_f}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_f} \right)$ das Hamiltonsche Vektorfeld zur Hamilton-Funktion H . Dieses Vektorfeld setzen wir nun in ω ein:

$$\omega(\bullet, X_H) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k \right) = dH.$$

Offenbar läßt sich die Beziehung zwischen H und X_H koordinatenfrei durch

$$\boxed{\omega(\bullet, X_H) = dH} \tag{4.8}$$

formulieren. Sind ω und H gegeben, und ist ω geschlossen und nichtentartet, so **definieren** wir X_H fortan durch Gleichung (4.8).

Eine Lösung γ der Bewegungsgleichungen eines Hamiltonschen Systems ist nach Definition 1.16 eine Integralkurve $\gamma : t \mapsto x(t) = (q(t), p(t))$ von X_H , d.h. es gilt $\dot{x} = X_H(x)$ längs γ .

Diese Vorbetrachtungen motivieren die folgende Verallgemeinerung der Definition Hamiltonscher Systeme.

DEFINITION 4.7 *Ein **Hamiltonsches System** ist ein Tripel (M, ω, H) . Hierbei ist (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit – nämlich der mit einer geschlossenen nichtentarteten 2-Form ω versehene Phasenraum M – und $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die Hamilton-Funktion. Die Bewegungsgleichungen eines solchen Systems sind die Hamiltonschen Gleichungen*

$$\boxed{\dot{x} = X_H(x)}, \tag{4.9}$$

wobei das Hamiltonsche Vektorfeld X_H durch Gleichung (4.8) bestimmt ist.

Bemerkung: Definition 4.7 läßt sich auf nichtautonome Systeme ausdehnen. Die Hamilton-Funktion ist dann eine Funktion $H : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $X_H : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2f}$ wird wieder durch Gleichung (4.8) bestimmt, wobei allerdings jetzt dH **nicht** das totale Differential ist, sondern $dH := \sum_{i=1}^{2f} (\partial H / \partial x^i) dx_i$. Es fehlt also der Term $(\partial H / \partial t) dt$. Die Bewegungsgleichungen sind: $\dot{x} = X_H(x, t)$.

4.4.1 Der klassische Spin

In der Quantenmechanik lernt man, daß Elementarteilchen wie z.B. das Elektron eine intrinsische Eigenschaft besitzen, den sogenannten “Spin”, die sich unter der

Galilei-Gruppe wie ein Drehimpuls transformiert. Im Rahmen der klassischen Mechanik haben wir uns den Spin als einen Einheitsvektor $\sigma \in \mathbb{R}^3$ vorzustellen. Die Bewegungsgleichungen für einen Spin σ im Magnetfeld B lauten

$$\dot{\sigma} = \mu \sigma \times B \quad (\text{Vektorprodukt}). \quad (4.10)$$

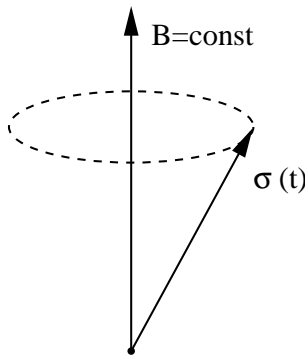
Die Konstante μ heißt das “gyromagnetische Verhältnis”.

Aus (4.10) folgt wegen $\langle \sigma, \sigma \times B \rangle = \langle B, \sigma \times \sigma \rangle = 0$, daß $|\sigma|^2 = \langle \sigma, \sigma \rangle$ erhalten und somit die Bedingung $|\sigma|^2 = 1$ mit der Dynamik verträglich ist.

Wir betrachten nun die spezielle Situation, wo B nicht von der Zeit abhängt und in Richtung des Basisvektors e_3 von \mathbb{R}^3 zeigt: $B = |B|e_3$. In diesem Fall lauten die Bewegungsgleichungen (4.10) in Komponenten:

$$\dot{\sigma}_1 = \omega_L \sigma_2, \quad \dot{\sigma}_2 = -\omega_L \sigma_1, \quad \dot{\sigma}_3 = 0$$

mit $\omega_L \equiv \mu|B|$. Dieses Gleichungssystem kennen wir bereits vom kräftefreien symmetrischen Kreisel, Abschnitt 3.5. Seine allgemeine Lösung ist eine reguläre Präzession um e_3 mit Winkelgeschwindigkeit ω_L . Im Falle des Spins heißt diese Präzession **Larmor-Präzession** und ω_L heißt **Larmor-Frequenz**.



Wir können die lineare Differentialgleichung $\dot{\sigma} = \mu \sigma \times B$ als dynamisches System in \mathbb{R}^3 auffassen. Allerdings entzieht sich der klassische Spin bei dieser Sichtweise einer Hamiltonschen Formulierung (wegen der ungeraden Dimension von \mathbb{R}^3).

Behauptung: Der klassische Spin im Magnetfeld läßt sich als Hamiltonsches System (M, ω, H) beschreiben mit

- (i) $M = S^2 := \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \sigma, \sigma \rangle = 1 \right\}$;
- (ii) $-\omega =$ Raumwinkelform auf S^2 ;
- (iii) $H : S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; (\sigma, t) \mapsto -\mu \langle \sigma, B(t) \rangle$.

Koordinatisieren wir S^2 durch Polarwinkel θ und Azimutwinkel ϕ , so ist $\omega = -\sin\theta d\theta \wedge d\phi$ und

$$H = -\mu(B_1 \sin\theta \cos\phi + B_2 \sin\theta \sin\phi + B_3 \cos\theta).$$

Beweis: Der Tangentialraum $T_\sigma S^2$ im Punkt $\sigma \in S^2$ besteht aus den Vektoren v , die auf σ senkrecht stehen:

$$T_\sigma S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, \sigma \rangle = 0\},$$

und das Differential der Hamilton-Funktion ist durch

$$(dH)_\sigma(v) = -\mu \langle v, B \rangle$$

gegeben. Die Raumwinkelform im Punkt σ läßt sich durch das Spatprodukt ausdrücken:

$$\omega_\sigma(v, w) = -\langle \sigma, v \times w \rangle \quad \text{für } v, w \in T_\sigma S^2.$$

Setzen wir das Vektorfeld $X_H(\sigma) = \mu\sigma \times B$ in ω ein, so entsteht

$$\begin{aligned} \omega_\sigma(\bullet, X_H(\sigma)) &= -\langle \sigma, \bullet \times X_H(\sigma) \rangle \\ &= -\mu \langle \sigma, \bullet \times (\sigma \times B) \rangle = -\mu \langle \sigma, \sigma \rangle \langle \bullet, B \rangle = (dH)_\sigma. \end{aligned}$$

Also ist das Hamiltonsche System (M, ω, H) zu dem dynamischen System $\dot{\sigma} = X_H(\sigma) = \mu\sigma \times B$ äquivalent.

4.4.2 Satz von Darboux

Der klassische Spin ist das Parade-Beispiel eines Systems, das sich **nicht global in q und p zerlegen läßt**. In Abwesenheit einer solchen Zerlegung existiert auch keine globale Zerlegung in Ortskoordinate q und Geschwindigkeit \dot{q} . Es gibt daher keine Lagrange-Funktion für den klassischen Spin, jedenfalls nicht im Sinne von Kapitel 2. Die oben angegebene Verallgemeinerung der Definition Hamiltonscher Systeme ist also nicht nur eine schöne Verzierung der theoretischen Physik, sondern in diesem Fall wirklich notwendig. Andererseits ist die **lokale Existenz** einer Zerlegung in q und p durch den folgenden Satz gesichert.

SATZ 4.8 (DARBOUX) *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit der Dimension $2f$. Dann existieren zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $N_x \subset M$ und Funktionen $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f : N_x \rightarrow \mathbb{R}$, so daß die symplektische Struktur ω auf N_x die kanonische Form $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$ annimmt.*

Beweis: Siehe Arnold.

Beispiel: Klassischer Spin. Auf der am Nordpol N gelochten Sphäre $S^2 \setminus \{N\}$ können wir kanonische Koordinaten q, p z.B. durch die Koordinatentransformation

$$\tan \phi = \frac{q}{p}, \quad \cos \theta = -1 + \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

eingeführen. Unter diesem Koordinatenwechsel geht $\omega = -\sin \theta d\theta \wedge d\phi$ in $dp \wedge dq$ über, wie man leicht nachrechnet. Die Koordinatenfunktionen q, p sind jedoch singular für $q^2 + p^2 = 2(1 + \cos \theta) = 4$, was dem Nordpol $\theta = 0$ entspricht, und somit nicht global definiert.

4.4.3 Elektronen im starken Magnetfeld

In zweidimensionalen Elektronensystemen unter dem Einfluß eines sehr starken Magnetfeldes wird bei Temperaturen im Kelvin-Bereich der sogenannte Quanten-Hall-Effekt beobachtet. Eine detaillierte Beschreibung und Erklärung dieses faszinierenden quantenmechanischen Phänomens ist Thema von Vorlesungen über Festkörperphysik und kann an dieser Stelle leider nicht präsentiert werden. Einige wichtige Aspekte lassen sich jedoch schon im Rahmen der klassischen Mechanik verstehen. Hier wollen wir skizzieren, wie das zugehörige Hamiltonsche System aussieht.

Teilchen mit Masse m , Geschwindigkeit v und elektrischer Ladung e bewegen sich in einem homogenen und zu v senkrechten Magnetfeld der Stärke B_0 bekanntlich auf Kreisbahnen (oder Zyklotronbahnen) mit Radius $R = m|v|/eB_0$. Der Zyklotronradius R ist also zu $1/B_0$ proportional und geht im Limes eines unendlich starken Magnetfeldes gegen Null. Wird dem starken Magnetfeld noch ein elektrisches Feld $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$ überlagert, sind die Zyklotronbahnen nicht mehr geschlossen. Die Zentren der Zyklotronbahnen wandern dann langsam (genauer: mit Geschwindigkeit $|\mathbf{E}|/B_0$), wobei die Wanderbewegung folgendem Prinzip genügt:

Aufgabe: Ein Elektron bewege sich in der xy -Ebene unter dem Einfluß eines elektrostatischen Potentials φ und eines homogenen Magnetfeldes mit symmetrisch geeichtem Vektorpotential $\mathbf{A} = \frac{1}{2}B_0(-y, x, 0)$. Zeigen Sie, ausgehend von der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m} \left((p_x + \frac{1}{2}eB_0y)^2 + (p_y - \frac{1}{2}eB_0x)^2 \right) + e\varphi(x, y),$$

daß die Wander-Dynamik der Zyklotronbahnzentren durch das Hamiltonsche System (M, ω, \mathcal{H}) mit $M = \mathbb{R}^2$, $\omega = eB_0 dx \wedge dy$ und $\mathcal{H} = e\varphi(x, y)$ bestimmt wird.

Die Bewegungsgleichungen für die Zyklotronbahnzentren lauten demnach

$$\dot{x} = E_y/B_0, \quad \dot{y} = -E_x/B_0,$$

woraus eine elektrische Stromdichte **senkrecht** (!) zum angelegten elektrischen Feld resultiert.

4.5 Kanonische Transformationen

In der Einleitung zu diesem Kapitel wurde schon vorweggenommen, daß der Übergang zur Hamiltonschen Mechanik u.a. den wichtigen Vorteil hat, eine große Freiheit in der Wahl von Koordinatenfunktionen zu lassen, bezüglich derer die Bewegungsgleichungen kanonische Gestalt haben. Die Untersuchung dieser Freiheit führt auf den Begriff der kanonischen Transformation.

Wie man aus einer Rechnung vom Beginn des Abschnitts 4.4 erkennt, nehmen die Bewegungsgleichungen eines Hamiltonschen Systems genau dann die Form der kanonischen Gleichungen an, wenn die Phasenraum-Koordinaten $(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f)$ so gewählt sind, daß die symplektische Struktur ω Normalgestalt hat:

$$\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k .$$

Dann ist nämlich $\omega(\bullet, X_H) = \sum_{k=1}^f (X_{H,q_k} dp_k - X_{H,p_k} dq_k)$, und durch Gleichsetzen mit dH folgt: $X_{H,q_k} = \partial H / \partial p_k$, $X_{H,p_k} = -\partial H / \partial q_k$.

Ist nun ein Diffeomorphismus $\psi : M \rightarrow M$ gegeben, so können wir neue Koordinatenfunktionen $Q_1, \dots, Q_f, P_1, \dots, P_f$ durch Verkettung,

$$Q_k = q_k \circ \psi , \quad P_k = p_k \circ \psi \quad (k = 1, \dots, f),$$

definieren. Wir fragen dann, unter welchen Bedingungen die Bewegungsgleichungen des Hamiltonschen Systems in den neuen Koordinatenfunktionen immer noch die kanonische Form

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} , \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} \quad (k = 1, \dots, f)$$

haben. Nach dem eben Gesagten lautet die Antwort, daß dies genau dann der Fall sein wird, wenn die symplektische Struktur unter der Koordinatentransformation ihre Normalgestalt behält, d.h. es muß gelten $\omega = \sum_{k=1}^f dP_k \wedge dQ_k$. Hieraus resultiert folgende Bedingung an die Abbildung ψ :

$$\omega = \sum_{k=1}^f dP_k \wedge dQ_k = \sum_{k=1}^f d(p_k \circ \psi) \wedge d(q_k \circ \psi) = \psi^* \left(\sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k \right) = \psi^* \omega ,$$

also $\omega = \psi^* \omega$, wobei $\psi^* \omega$ die mit der Abbildung ψ zurückgeholte Differentialform bezeichnet.

DEFINITION 4.8 Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Eine differenzierbare Abbildung $\psi : M \rightarrow M$ heißt eine **kanonische Transformation**, wenn sie ω invariant läßt: $\psi^*\omega = \omega$.

Bemerkungen:

- (i) Das Fazit der obigen Diskussion lautet hiermit: die kanonischen Gleichungen sind forminvariant unter kanonischen Transformationen.
- (ii) Die kanonischen Transformationen bilden eine Gruppe.

Beispiel: Betrachte nochmals den klassischen Spin: $M = S^2 =$ Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 , $-\omega =$ Raumwinkelform auf S^2 . Die Drehgruppe $SO(3)$ operiert auf dem Euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 , und da S^2 ein invarianter Unterraum jeder Drehung ist, operiert $SO(3)$ natürlich auch auf S^2 . Es ist anschaulich klar und läßt sich rechnerisch problemlos nachweisen, daß ω unter Drehungen invariant ist. Folglich ist für dieses Beispiel jedes Gruppenelement $R : S^2 \rightarrow S^2$, $R \in SO(3)$, eine kanonische Transformation.

Für den trivialen Fall $M = \mathbb{R}^{2f}$, wo sich ω global in der Form $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$ darstellen läßt, werden die kanonischen Transformationen durch das folgende Kriterium charakterisiert.

SATZ 4.9 Sei $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2f}, \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k)$. Dann ist eine differenzierbare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R}^{2f}$ genau dann eine kanonische Transformation, wenn $D_x\psi : \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R}^{2f}$ für alle $x \in \mathbb{R}^{2f}$ symplektisch ist.

Beweis: Wir holen ω vorschriftsmäßig mit ψ^* zurück:

$$(\psi^*\omega)_x(u, v) = \omega_{\psi(x)}(D_x\psi(u), D_x\psi(v)).$$

Unter der angegebenen Voraussetzung an (M, ω) können die Tangentialräume in allen Punkten $x \in M$ mit $M = \mathbb{R}^{2f}$ identifiziert werden, und es gilt

$$\omega_{\psi(x)} = \omega_x = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k =: \omega_0,$$

unabhängig von x und ψ . Daher ist die Bedingung $\psi^*\omega = \omega$ äquivalent zu

$$\omega_0(u, v) = \omega_0(D_x\psi(u), D_x\psi(v)) \quad (4.11)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^{2f}$. Bedingung (4.11) ist aber nach Definition 4.5 gleichbedeutend mit $D_x\psi \in Sp(2f)$ für alle $x \in \mathbb{R}^{2f}$.

Bemerkung: Satz 4.9 macht klar, warum die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(2f)$ für die Hamiltonsche Mechanik so wichtig ist und in einem gesonderten Abschnitt 4.3 vorab eingeführt wurde.

Beispiele: Betrachte $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ und hier den Spezialfall einer **linearen** Transformation $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, D_x S = S$. Wir wissen aus Abschnitt 4.3, daß $\mathrm{Sp}(2)$ aus den linearen Abbildungen $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\det S = 1$ besteht. Die nachstehenden linearen Transformationen haben Determinante Eins und sind folglich kanonisch:

$$(a) \quad (q, p) \circ S = (q \cos \alpha + p \sin \alpha, -q \sin \alpha + p \cos \alpha);$$

(“elliptische Rotation” in der qp -Ebene).

$$(b) \quad (q, p) \circ S = (q \cosh \beta + p \sinh \beta, q \sinh \beta + p \cosh \beta);$$

(“hyperbolische Rotation”).

$$(c) \quad (q, p) \circ S = (qe^\gamma, pe^{-\gamma}).$$

(Dieses letzte Beispiel ist eine erweiterte Punkttransformation.)

4.6 Hamiltonsche Flüsse

Wir präzisieren unsere Sprechweise.

DEFINITION 4.9 Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und X ein differenzierbares Vektorfeld, dessen Fluß auf ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert ist. Dann heißt X **lokal Hamiltonsch (global Hamiltonsch)**, falls die 1-Form $\omega(\bullet, X)$ geschlossen (exakt) ist. Der Fluß eines lokal (global) Hamiltonschen Vektorfeldes heißt entsprechend lokal (global) Hamiltonsch.

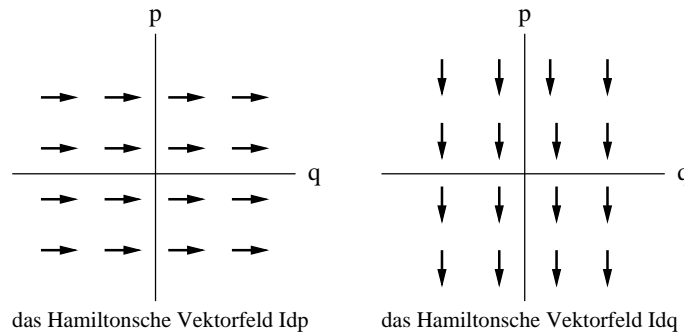
KOROLLAR 4.9.1 Nach dem Poincaréschen Lemma existiert zu einem lokal Hamiltonschen Vektorfeld X lokal eine Funktion H , so daß gilt: $\omega(\bullet, X) = dH$.

Nach Definition 4.9 bestimmt die symplektische Struktur ω einen Isomorphismus zwischen lokal Hamiltonschen Vektorfeldern und geschlossenen 1-Formen. Da dieser Isomorphismus im folgenden häufig benutzt wird, ist es zweckmäßig, hierfür ein eigenes Symbol einzuführen. Wir schreiben

$$\boxed{X = I\alpha}, \quad \text{falls } \omega(\bullet, X) = \alpha.$$

Ein analoger Isomorphismus, \mathcal{I} , existiert in Euklidischen Vektorräumen: $\mathcal{X} = \mathcal{I}\alpha \Leftrightarrow \langle \bullet, \mathcal{X} \rangle = \alpha$, womit man den Gradienten einer Funktion f durch $\mathrm{grad} f := \mathcal{I}df$ erklärt. In Anlehnung an diese Nomenklatur nennen wir $X = Idf$ manchmal den **symplektischen Gradienten** von f .

Beispiel: Wir berechnen für $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ den symplektischen Gradienten der Koordinatenfunktion des Impulses, $f = p$. Dazu setzen wir den Ansatz $Idp =: X_q \partial_q + X_p \partial_p$ in ω ein und erhalten $dp = \omega(\bullet, Idp) = X_q dp - X_p dq$, woraus folgt, daß Idp die Komponenten $X_q = 1$ und $X_p = 0$ hat, also $Idp = \partial_q$. Eine analoge Rechnung liefert $Idq = -\partial_p$.



DEFINITION 4.10 Sei $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ eine Schar von Diffeomorphismen: $M \rightarrow M$. Wir nennen diese Schar eine **Einparametergruppe von kanonischen Transformationen** von (M, ω) , wenn gilt:

- (i) $g^0 = Id$;
- (ii) $g^{s+t} = g^s \circ g^t = g^t \circ g^s \quad (s, t \in \mathbb{R})$;
- (iii) g^s ist kanonisch für alle $s \in \mathbb{R}$.

Wir stellen nun die besondere Rolle Hamiltonscher Flüsse in der kanonischen Mechanik heraus: sie lassen die symplektische Struktur des Phasenraums invariant.

SATZ 4.10 Es besteht eine Eins-zu-Eins-Zuordnung zwischen den lokal Hamiltonschen Flüssen und den Einparametergruppen von kanonischen Transformationen einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) .

Bemerkung: Das Adjektiv "lokal" ist hier wesentlich, wie ein elementares Beispiel unten zeigen wird.

Beweis: Wir benützen die in Anhang A.6 bewiesene Aussage: Ist $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, $(x, s) \mapsto \phi_s(x)$, der durch ein Vektorfeld X auf M bestimmte Fluß, so gilt:

$$0 = \frac{d}{ds} \phi_s^* \omega \Big|_{s=0} \Leftrightarrow 0 = d(\omega(X, \bullet)). \tag{4.12}$$

1. (\Rightarrow) Sei also ϕ der Fluß eines lokal Hamiltonschen Vektorfelds X . Dann gilt nach Definition 4.9

$$d(\omega(X, \bullet)) = -d(\omega(\bullet, X)) = 0,$$

und mit Gleichung (4.12) erhalten wir: $\left. \frac{d}{ds} \phi_s^* \omega \right|_{s=0} = 0$. Die Abbildungen $(\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ sind global definiert und bilden daher eine Einparametergruppe: $\phi_0 = \text{Id}$, $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \phi_s$. Deshalb gilt:

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega = \left. \frac{d}{ds} \phi_{s+t}^* \omega \right|_{s=0} = \phi_t^* \left(\underbrace{\left. \frac{d}{ds} \phi_s^* \omega \right|_{s=0}}_{=0} \right) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Folglich ist ϕ_t eine kanonische Transformation:

$$\phi_t^* \omega = \phi_0^* \omega = \text{Id}^* \omega = \omega.$$

2. (\Leftarrow) Wir kehren die Schlußweise von 1. einfach um und benützen nochmals die Definition 4.9.

Beispiel 1: Betrachte für $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ die Einparametergruppe von kanonischen Transformationen

$$(q \circ g^s, p \circ g^s) = (qe^s, pe^{-s}).$$

$(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ wird erzeugt durch das Vektorfeld

$$X = \left. \frac{d}{ds} g^s \right|_{s=0} = q\partial_q - p\partial_p.$$

Mit $\omega(\bullet, X) = qdp + pdq$ finden wir

$$d(\omega(\bullet, X)) = d(qdp + pdq) = dq \wedge dp + dp \wedge dq = 0,$$

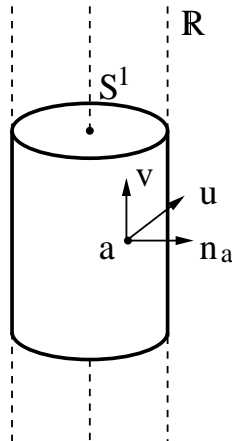
in Übereinstimmung mit Satz 4.10. Die Hamilton-Funktion ist hier $H = pq$, denn $\omega(\bullet, X) = qdp + pdq = d(pq)$.

Bemerkung: Das Vektorfeld X von Beispiel 1 ist global Hamiltonsch, d.h. die Hamilton-Funktion $H = pq$ ist auf der ganzen Phasenebene \mathbb{R}^2 definiert. Dies muß in sternförmigen Phasenräumen wie dem \mathbb{R}^2 immer so sein, weil in diesem Fall jede geschlossene 1-Form nach dem Poincaréschen Lemma exakt ist, d.h. ein global definiertes Potential besitzt. Die Unterscheidung zwischen "lokal" und "global" ist nur für Systeme mit nicht einfach zusammenhängendem Phasenraum notwendig:

Beispiel 2: Wir betrachten den Phasenraum des ebenen mathematischen Pendels, nämlich den Zylinder $M = S^1 \times \mathbb{R}$. Zur Konstruktion einer geeigneten symplektischen Struktur ω gehen wir ähnlich vor wie für die Sphäre S^2 und betten M auf die natürliche Weise in den Euklidischen \mathbb{R}^3 ein (siehe Figur).

Sind u und v zwei zu M tangentielle Vektoren im Punkt $a \in M$, und ist n_a der nach außen gerichtete Normalenvektor ($|n_a| = 1$), so definieren wir:

$$\omega_a(v, u) := \langle n_a, u \times v \rangle \quad (\text{Spatprodukt}).$$



Diese symplektische Struktur bleibt offensichtlich ungeändert, wenn wir den Zylinder längs seiner Symmetrieachse verschieben oder um seine Symmetrieachse drehen. Wir koordinatisieren M durch einen Winkel q , $0 < q < 2\pi$, nämlich der Auslenkung des Pendels relativ zu einer festen Achse, und durch den kanonischen Impuls des Pendels: $p = \partial L / \partial \dot{q}$, $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2 - U(q)$. In solchen lokalen Koordinaten gilt:

$$\omega = dp \wedge dq.$$

Mit diesen Vorbereitungen sei nun $g^s : M \rightarrow M$ eine Translation des Zylinders um die Strecke s längs seiner Symmetrieachse. In Formeln: $q \circ g^s = q$ und $p \circ g^s = p + s$. Da eine solche Translation ω invariant läßt, ist $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ eine Einparametergruppe von kanonischen Transformationen. $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ wird durch das Vektorfeld X ,

$$X = \left. \frac{d}{ds} g^s \right|_{s=0} = \partial_p,$$

erzeugt. Dieses Vektorfeld ist zwar lokal Hamiltonsch:

$$\omega(\bullet, \partial_p) = -dq \quad \text{ist geschlossen,}$$

nicht aber global Hamiltonsch, denn die Koordinatenfunktion $q : M \rightarrow [0, 2\pi)$ ist als stetige Funktion nicht global auf M definiert, sondern hat eine Unstetigkeit bei $q^{-1}(0)$.

4.7 Symmetrien und Erhaltungssätze

Die Nützlichkeit von Erhaltungssätzen bei der Lösung mechanischer Probleme ist in den Kapiteln 1 bis 3 hinreichend deutlich geworden: die Lösung der Bewegungsgleichungen für autonome Hamiltonsche Systeme mit einem Freiheitsgrad wird durch den Energiesatz auf eine Quadratur zurückgeführt; die Berechnung der Bewegung

des schweren symmetrischen Kreisels (mit Fixpunkt auf der Symmetrieachse) wird durch die Erhaltungssätze für H, L_3, L'_3 auf drei Quadraturen zurückgeführt, usw. Im nächsten Kapitel (Stabilität und Chaos) wird gezeigt werden, daß dies ein allgemeiner Sachverhalt ist: Hamiltonsche Systeme mit f Freiheitsgraden sind durch Quadratur lösbar, wenn f (unabhängige) Erhaltungssätze existieren.

Das Aufspüren von Erhaltungssätzen ist daher ein vorrangiges Ziel des Mechanikers. Hierbei hilft uns das Noether-Theorem, Satz 2.7, das wir nun in die Hamiltonsche Mechanik autonomer Systeme übertragen.

Gegeben sei das Hamiltonsche System (M, ω, H) . Der Phasenfluß sei hier mit $\phi^H : M \times \mathbb{R} \rightarrow M, (x, t) \mapsto \phi_t^H(x)$ bezeichnet, und wir wollen (der Bequemlichkeit halber) annehmen, daß er auf dem ganzen erweiterten Phasenraum erklärt sei. Gemäß Definition 1.22 nennen wir eine Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein erstes Integral des Hamiltonschen Systems, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $F \circ \phi_t^H = F$. Da es sich bei $(\phi_t^H)_{t \in \mathbb{R}}$ um eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen handelt, ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\left. \frac{d}{dt} F \circ \phi_t^H \right|_{t=0} = 0.$$

Sind $X_H := IdH$ und $X_F := IdF$ die symplektischen Gradienten von H bzw. F , so gilt:

$$\left. \frac{d}{dt} F \circ \phi_t^H \right|_{t=0} = dF(X_H) = \omega(X_H, X_F). \tag{4.13}$$

KOROLLAR 4.10.1 *Die Energie eines autonomen Hamiltonschen Systems ist erhalten:*

$$\left. \frac{d}{dt} H \circ \phi_t^H \right|_{t=0} = \omega(X_H, X_H) = 0.$$

Bemerkung: Dies ist die koordinatenfreie Version des Arguments vom Ende des Abschnitts 1.6.

SATZ 4.11 *Es seien (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit; f, g zwei Funktionen: $M \rightarrow \mathbb{R}$; und ϕ^f, ϕ^g die Flüsse der Hamiltonschen Vektorfelder $X_f := Idf, X_g := Idg$. Dann gilt:*

$$\left. \frac{d}{ds} g \circ \phi_s^f \right|_{s=0} = - \left. \frac{d}{dt} f \circ \phi_t^g \right|_{t=0}.$$

Beweis: Nach Gleichung (4.13) ist $\left. \frac{d}{dt} f \circ \phi_t^g \right|_{t=0} = \omega(X_g, X_f)$ und $\left. \frac{d}{ds} g \circ \phi_s^f \right|_{s=0} = \omega(X_f, X_g)$. Mit $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X)$ folgt die Behauptung des Satzes.

DEFINITION 4.11 Sei $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, $(x, s) \mapsto \phi_s(x)$, der Fluß eines global hamiltonschen Vektorfeldes auf (M, ω) . Dann heißt $(\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ eine Einparametergruppe von **Symmetrie-Transformationen** des hamiltonschen Systems mit Hamilton-Funktion $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, wenn H unter $(\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ invariant ist, d.h.

$$H \circ \phi_s = H \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

KOROLLAR 4.11.1 (“NOETHER-THEOREM”) :

Zu jeder Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen eines autonomen hamiltonschen Systems gehört ein Erhaltungssatz, und umgekehrt.

Bemerkung: Diese Formulierung des Noetherschen Satzes ist insofern spezieller als Satz 2.7, als wir uns hier auf den autonomen Fall beschränken. Andererseits ist sie allgemeiner, denn es wird auch die Umkehrung behauptet: zu jedem Erhaltungssatz existiert eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen. Diese Umkehrung läßt sich in der Lagrange-Mechanik **nicht** zeigen, da die Gruppe der Punkttransformationen zu “klein” ist.

Beweis des Korollars: Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und ϕ^f der Fluß von $X_f = \text{Id}f$. Ist $(\phi_s^f)_{s \in \mathbb{R}}$ eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen, so gilt: $\left. \frac{d}{ds} H \circ \phi_s^f \right|_{s=0} = 0$. Nach Satz 4.11 folgt dann: $\left. \frac{d}{dt} f \circ \phi_t^H \right|_{t=0} = 0$, d.h. f ist ein erstes Integral und es gilt der Erhaltungssatz $f = \text{const}$. Die Umkehrung folgt analog durch Vertauschen der Rollen von H und f .

Beispiel 1: Auf der symplektischen Mannigfaltigkeit $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ hat das hamiltonsche Vektorfeld $\text{Id}p = \partial_q$ den Fluß $g^s : (q, p) \circ g^s = (q + s, p)$. Die von $\text{Id}p$ erzeugten kanonischen Transformationen bilden also die Gruppe der Translationen in q . Daher bedeutet die Aussage des Noether-Theorems hier folgendes: sind die Raumtranslationen $q \mapsto q + s$ eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen des hamiltonschen Systems mit Hamilton-Funktion H , d.h. gilt:

$$\left. \frac{d}{ds} H \circ g^s \right|_{s=0} = \frac{\partial H}{\partial q} = 0,$$

so ist der Impuls erhalten: $p = \text{const}$. Umgekehrt bedingt Impulserhaltung die Translationsinvarianz der Hamilton-Funktion.

Beispiel 2: Für das Teilchen im \mathbb{R}^3 ist $(M, \omega) = (\mathbb{R}^6, \sum_{k=1}^3 dp_k \wedge dq_k)$. Wir betrachten die 3-Komponente des Drehimpulses, L_3 , und bestimmen wieder das zugehörige hamiltonsche Vektorfeld. Sei $\text{Id}L_3 =: \sum_k (X_{q_k} \partial_{q_k} + X_{p_k} \partial_{p_k})$. Dann folgen aus

$$\begin{aligned} dL_3 &= d(q_1 p_2 - q_2 p_1) = p_2 dq_1 + q_1 dp_2 - p_1 dq_2 - q_2 dp_1 \\ &= \omega(\bullet, \text{Id}L_3) = \sum_k (X_{q_k} dp_k - X_{p_k} dq_k) \end{aligned}$$

die Komponenten $X_{q_1} = -q_2$, $X_{q_2} = q_1$, $X_{q_3} = 0$, $X_{p_1} = -p_2$, $X_{p_2} = p_1$, $X_{p_3} = 0$, also

$$IdL_3 = q_1\partial_{q_2} - q_2\partial_{q_1} + p_1\partial_{q_2} - p_2\partial_{q_1}.$$

Offensichtlich erzeugt IdL_3 die durch

$$\begin{aligned} (q_1, q_2, q_3; p_1, p_2, p_3) \circ g^\phi &= (q_1 \cos \phi - q_2 \sin \phi, q_1 \sin \phi + q_2 \cos \phi, q_3; \\ & p_1 \cos \phi - p_2 \sin \phi, p_1 \sin \phi + p_2 \cos \phi, p_3) \end{aligned}$$

definierte Einparametergruppe von Drehungen um die 3-Achse. Deshalb lautet das Noether-Theorem in diesem Fall folgendermaßen: sind die Drehungen um die 3-Achse eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen, so ist die 3-Komponente des Drehimpulses erhalten: $L_3 = \text{const}$, und umgekehrt.

Nachtrag zur Sprechweise: Ist $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, $(x, s) \mapsto \phi_s(x)$ der Fluß eines Vektorfeldes X , so sagen wir auch, daß X die Einparametergruppe $(\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ **erzeugt**.

4.8 Die Poisson-Klammer

DEFINITION 4.12 Die Poisson-Klammer $\{F, H\}$ zweier differenzierbarer Funktionen F und H auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) ist die Ableitung von F in Richtung des Flusses ϕ^H des Hamiltonschen Vektorfeldes IdH :

$$\{F, H\} := \left. \frac{d}{dt} F \circ \phi_t^H \right|_{t=0}.$$

Die Poisson-Klammer zweier differenzierbarer Funktionen auf M ist also wieder eine Funktion auf M .

KOROLLAR 1 Eine differenzierbare Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ein erstes Integral des Hamiltonschen Systems (M, ω, H) , wenn ihre Poisson-Klammer mit H verschwindet: $\{F, H\} = 0$.

KOROLLAR 2 Nach Satz 4.11 ist die Poisson-Klammer schief-symmetrisch:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

KOROLLAR 3 Nach Gleichung (4.13) können wir schreiben:

$$\{f, g\} = \omega(Idg, Idf).$$

4.8.1 Koordinatendarstellung der Poisson-Klammer

Sei ω in lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^{2f} dargestellt durch $\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$, und sei $X_g := \text{Id}g =: \sum_{j=1}^{2f} X_g^j \partial_j$. Dann folgt aus $\omega(\bullet, X_g) = dg = \sum_i (\partial g / \partial x^i) dx^i$ die Beziehung $\sum_{i,j} dx^i \omega_{ij} X_g^j = \sum_i dx^i \partial g / \partial x^i$, also $\sum_j \omega_{ij} X_g^j = \partial g / \partial x^i$. Inversion dieser linearen Gleichung liefert $X_g^j = \sum_i \omega^{ji} \partial g / \partial x^i$, wobei die Koeffizienten ω^{ji} durch die Gleichung $\sum_i \omega^{ji} \omega_{ik} = \delta_k^j$ bestimmt werden oder, anders ausgedrückt, (ω^{ji}) ist die zu (ω_{ij}) inverse Matrix. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \{g, h\} &= \omega(\text{Id}h, \text{Id}g) \\ &= \sum_{i,j} \omega_{ij} \left(\sum_k \omega^{ik} \frac{\partial h}{\partial x^k} \right) \left(\sum_l \omega^{jl} \frac{\partial g}{\partial x^l} \right) = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial x^i} \omega^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^j}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

SATZ 4.12 Ist die symplektische Struktur ω bezüglich eines Satzes von Koordinatenfunktionen $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ in Normalform, $\omega = \sum_k dp_k \wedge dq_k$, so gilt:

$$\boxed{\{g, h\} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right)}$$

und speziell

$$\boxed{\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}; \quad \{q_k, q_l\} = 0 = \{p_k, p_l\}} \quad (k, l = 1, \dots, f).$$

Beweis: Benütze Gleichung (4.14) und $(\omega^{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_f \\ -\mathbf{1}_f & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

KOROLLAR 4.12.1 Die kanonischen Bewegungsgleichungen lassen sich jetzt folgendermaßen aufschreiben:

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\}, \quad \dot{p}_k = \{p_k, H\} \quad (k = 1, \dots, f).$$

Beispiel: Für ein System mit zwei Freiheitsgraden, $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2)$, sei $L := q_1 p_2 - q_2 p_1$ der Drehimpuls bzgl. des Ursprungs und $\phi := \arctan(q_1/q_2)$ ein (lokal definierter) Winkel in der Ortsebene. Dann liefert eine leichte Rechnung:

$$\{\phi, L\} = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_k} \frac{\partial L}{\partial p_k} - \frac{\partial \phi}{\partial p_k} \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 1.$$

Das ist das erwartete Ergebnis, denn der symplektische Gradient $\text{Id}L$ einer Komponente L des Drehimpulses erzeugt bekanntlich Drehungen um die entsprechende Achse.

4.8.2 Woher kommt die symplektische Struktur?

In der in Abschnitt 4.4 gegebenen allgemeinen Definition Hamiltonscher Systeme ist die symplektische Struktur ω Teil der Axiomatik. Dieser Umstand provoziert die Frage, ob sich ω aus irgendeinem konstruktiven Prinzip ergibt oder schlechterdings “vom Himmel” fällt. Für Lagrange-Systeme ist die Antwort klar. In diesem Fall haben wir einen Ortsraum mit Koordinatenfunktionen q_1, \dots, q_f , eine Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q})$ und kanonische Impulse $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$. Die symplektische Struktur ist hier immer $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$, und man zeigt leicht, daß sie nicht von der Koordinatenwahl abhängt.

Anders verhält es sich für Hamiltonsche Systeme wie den klassischen Spin, die keine Lagrange-Funktion besitzen. In diesem Fall existiert auf die Frage nach der Herkunft der symplektischen Struktur im Rahmen der klassischen Mechanik keine Antwort (jedenfalls ist dem Autor keine bekannt). Ähnlich wie beim Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung erschließen sich Ursprung und tiefere Bedeutung der symplektischen Struktur erst im Rahmen der Quantenmechanik, wie folgt.

Grundlegend für die Hamiltonsche Mechanik ist der Phasenraum M . Physikalische Observable wie Ort, Impuls, Drehimpuls, Energie usw. sind Funktionen auf dem Phasenraum, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Solche Funktionen bilden eine Algebra, d.h. sie können linear kombiniert und multipliziert werden, $(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$ und $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$. Das Produkt ist kommutativ, $f \cdot g = g \cdot f$. Die Observablen der klassischen Mechanik bilden also eine **kommutative** Algebra.

In diesem algebraischen Zugang gelangt man zur Quantenmechanik, indem man die Algebra der Observablen **nichtkommutativ** macht: das kommutative Produkt $f \cdot g = g \cdot f$ wird durch ein nichtkommutatives Produkt $f * g \neq g * f$ ersetzt. Das Korrespondenzprinzip verlangt, daß die Quantenmechanik für $\hbar \rightarrow 0$ (Plancksche Konstante gegen Null) in die klassische Mechanik übergeht. Dementsprechend besitzt das quantenmechanische $*$ -Produkt eine Entwicklung nach Potenzen von \hbar , deren nullter Term das kommutative Produkt ist: $f * g = f \cdot g + \mathcal{O}(\hbar)$. Die führende nichtkommutative Korrektur wird durch die Poisson-Klammer bestimmt:

$$f * g = f \cdot g + \frac{i\hbar}{2}\{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2),$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit ist. Hiermit läßt sich die Poisson-Klammer durch einen Grenzübergang formal isolieren:

$$\{f, g\} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} (i\hbar)^{-1} (f * g - g * f).$$

Wie wir wissen, hängt die Poisson-Klammer mit der symplektischen Struktur durch

$\omega(\text{Id}f, \text{Id}g) = \{g, f\}$ zusammen. Wird die klassische Mechanik also als Grenzfall der Quantenmechanik gesehen, dann fällt die symplektische Struktur eines Hamiltonschen Systems nicht vom Himmel, sondern ist in der nichtkommutativen Algebra der quantenmechanischen Observablen kodiert. Für den Fall des klassischen Spins folgt die symplektische Struktur letztlich aus der Quanten-Algebra des Spins.

4.9 Liouvillescher Satz

Wir betrachten eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) der Dimension $2f$ und definieren die Volumenform Ω durch

$$\Omega := \frac{1}{f!} \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega}_f .$$

Ist ω in lokalen Koordinaten durch $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$ gegeben, so zeigt man leicht, daß gilt:

$$\Omega = dp_1 \wedge dq_1 \wedge dp_2 \wedge dq_2 \wedge \dots \wedge dp_f \wedge dq_f .$$

Eine direkte Konsequenz von Definition 4.8 und Satz 4.10 ist

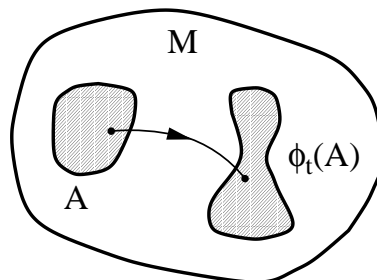
SATZ 4.13 (LIOUVILLE) *Ein Hamiltonscher Fluß ϕ ist volumenerhaltend, d.h. mit $\text{vol}(\phi_t(A)) := \int_{\phi_t(A)} \Omega$ gilt $\text{vol}(\phi_t(A)) = \text{vol}(A) = \text{const}$ für jedes (meßbare) Gebiet $A \subset M$.*

Beweis: Wir benützen den Transformationssatz $\int_{\phi_t(A)} \Omega = \int_A \phi_t^* \Omega$. Da das Zurückziehen von Formen mit dem äußeren Produkt vertauscht, gilt mit Satz 4.10:

$$\phi_t^* \Omega = \frac{1}{f!} \phi_t^* \omega \wedge \dots \wedge \phi_t^* \omega \stackrel{(4.10)}{=} \frac{1}{f!} \omega \wedge \dots \wedge \omega = \Omega ,$$

woraus folgt:

$$\text{vol}(\phi_t(A)) = \int_A \phi_t^* \Omega = \int_A \Omega = \text{vol}(A) = \text{const} .$$



Bemerkungen:

- (i) Der Transformationssatz $\int_{\psi(A)} \Omega = \int_A \psi^* \Omega$ ist die multidimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsregel für Integrale von Funktionen einer Veränderlichen:

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\psi(x)) \psi'(x) dx. \quad (4.15)$$

Setzen wir $A := [a, b]$, $\psi(A) = [\psi(a), \psi(b)]$, und erklären die 1-Form $\alpha : \psi(A) \rightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch $\alpha_p := f(p)(dy)_p$, so nimmt (4.15) folgende Gestalt an:

$$\int_{\psi(A)} \alpha = \int_A \psi^* \alpha.$$

- (ii) Wir werden später sehen, daß der Liouvillesche Satz auch für nichtautonome Hamiltonsche Systeme gilt.
- (iii) Man nennt Ω eine **Integralinvariante**. Neben Ω existiert eine ganze Serie weiterer Integralinvarianten (Poincaré), nämlich: $\omega, \omega \wedge \omega, \dots, \omega^{\wedge k} = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (k Faktoren), $\dots, \Omega = \omega^{\wedge f}$. Die Aussage lautet: Ist A ein $2k$ -dimensionales Flächenstück auf M und $\phi_t(A)$ sein Bild unter ϕ_t , so gilt $\int_{\phi_t(A)} \omega^{\wedge k} = \text{const.}$

In den nächsten Unterabschnitten diskutieren wir zwei Anwendungen des Liouvilleschen Satzes.

4.9.1 Poincaréscher WiederkehrsatZ

SATZ 4.14 (“POINCARÉSCHER WIEDERKEHRSSATZ”) *Sei M ein Gebiet endlichen Volumens in einem metrischen Raum, und sei $g : M \rightarrow M$ eine volumenerhaltende, kontinuierliche und bijektive Abbildung. Dann gibt es in jeder Umgebung N eines beliebigen Punktes von M einen Punkt $x \in N$, der nach N zurückkehrt, d.h. $\exists n \in \mathbb{N} : g^n(x) \in N$.*

Beweis: Betrachte die Bilder von N unter wiederholter Anwendung der Abbildung: $N, g(N), g^2(N), \dots, g^n(N)$, usw. Da g volumenerhaltend ist, haben alle Bilder das selbe Volumen. Es muß daher gelten:

$$g^k(N) \cap g^l(N) \neq \emptyset$$

für ein Paar von positiven ganzen Zahlen $k \neq l$. Wäre nämlich das Gegenteil der Fall, wäre also der Durchschnitt aller Bildgebiete leer, dann müßte M unendliches Volumen haben, was im Widerspruch zur Voraussetzung stünde. O.B.d.A. sei $k > l$.

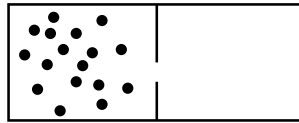
Es folgt dann $g^{k-l}(N) \cap N \neq \emptyset$. Wir wählen irgendeinen Punkt x dieses nichtleeren Durchschnitts und setzen $y = g^{k-l}(x)$. Dann ist $x \in N$ und $g^n(x) \in N$ (mit $n = k - l$). ■

Anwendung: Sei $(M \subset \mathbb{R}^n, \omega, H)$ ein autonomes Hamiltonsches System, und seien E_0, E_1 zwei Energien, so daß die Energieschale

$$\Gamma_{E_0, E_1} := \{x \in M \mid E_0 < H(x) < E_1\}$$

beschränkt ist. Den Phasenfluß des Systems für eine Zeitdauer $t = T$ bezeichnen wir mit $g := \phi_T$. Da g nach dem Liouvilleschen Satz das Phasenvolumen erhält, ist der Poincarésche Wiederkehrsatz anwendbar. Er führt zu der Schlußfolgerung, daß jeder Punkt von Γ_{E_0, E_1} unter dem Fluß des Hamiltonschen Systems in eine beliebig kleine Umgebung seiner selbst zurückkehrt.

Diese Aussage scheint folgende paradoxe Konsequenz zu haben: öffnet man eine Trennwand, die eine Kammer mit Gasteilchen von einer Vakuumkammer separiert, dann werden die Gasteilchen sich nach einer Weile alle wieder in der ersten Kammer versammeln.



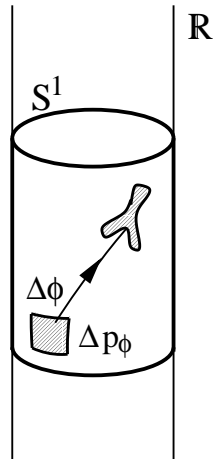
Die Gasmoleküle kehren in die erste Kammer zurück.

Die Auflösung des Paradoxons liegt in der Tatsache, daß “eine Weile” länger als das Alter des Universums sein kann.

4.9.2 Beschleunigerphysik

In einem Zirkularbeschleuniger (Synchrotron) werden geladene Teilchen durch magnetische Kräfte auf einer Kreisbahn gehalten und durch elektrische Kräfte beschleunigt. Wir beschreiben einen solchen Beschleuniger in vernünftiger Näherung als nichtautonomes Hamiltonsches System mit Phasenraum $(M, \omega) = (S^1 \times \mathbb{R}, dp_\phi \wedge d\phi)$ und Hamilton-Funktion $H(\phi, p_\phi, t) = H(\phi + 2\pi, p_\phi, t)$. Ein “Injektor” speist den Beschleuniger mit Teilchen in einem gewissen Orts- und Impulsbereich. Die Unschärfen seien mit $\Delta\phi$ und Δp_ϕ bezeichnet. In schwierigen Hochenergie-Experimenten mit geringen Ereignisraten (z.B. Produktion der W- und Z-Eichbosonen im Proton-Antiproton-Collider am CERN) ist es für den Erfolg des Experiments wesentlich, diese Unschärfen während (oder nach) dem Beschleunigungsvorgang zu reduzieren, um die Teilchendichte im Phasenraum zu erhöhen. Dies kann aber nicht so ohne weiteres gelingen, denn nach Liouville ist das von den Anfangsbedingungen der

zu beschleunigenden Teilchen ausgefüllte Phasenraumvolumen unabhängig von der Zeit durch $\Delta\phi \cdot \Delta p_\phi$ gegeben.



Der Liouvillesche Satz ist ein Ärgernis für die Beschleunigerphysik.

In modernen Beschleunigern “überlistet” man den Liouvilleschen Satz durch sogenannte “Elektronen-Kühlung” oder “stochastische” Kühlung (Physiknobelpreis für S. van der Meer, 1984).

4.10 Die Integralinvariante von Poincaré–Cartan

In den Abschnitten 4.4 bis 4.9 wurde die Hamiltonsche Mechanik autonomer Systeme in koordinatenfreier Weise entwickelt, wobei die Hauptrolle von der symplektischen Struktur des Phasenraums gespielt wurde. Im nun folgenden Abschnitt halten wir uns an das Buch von Arnold (Seiten 233ff) und ziehen die kanonische Mechanik noch einmal von einem anderen Standpunkt auf. Dieser neue Zugang eignet sich besonders gut für die Behandlung nichtautonomer Systeme. Dabei wird an die Stelle der symplektischen Struktur des Phasenraums eine gewisse nichtsinguläre 2-Form im **erweiterten** Phasenraum treten. Das Material in diesem Abschnitt ist von dem Vorhergehenden völlig unabhängig.

Eine geschlossene 2-Form läßt sich nach Poincaré lokal immer als die Cartansche Ableitung einer 1-Form schreiben. Wir wollen uns ab jetzt auf Systeme beschränken, wo die symplektische Struktur ω nicht nur geschlossen, sondern auch exakt ist, d.h. $\omega = d\alpha$ und α sei global definiert. Desweiteren seien ab jetzt immer Phasenraumkoordinaten $(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f)$ vorausgesetzt, so daß ω in Normalform ist: $\omega = \sum_k dp_k \wedge dq_k$. Ist p_k der kanonische Impuls zur verallgemeinerten Ortskoordinate q_k , so heißt (q_k, p_k) auch ein **kanonisches Paar**.

Wegen $d\circ d = 0$ wird die 1-Form α durch $\omega = d\alpha$ nur bis auf die Addition des totalen Differentials einer Funktion festgelegt. Wir wählen $\alpha = \sum_k p_k dq_k$. Im übernächsten

Teilabschnitt 4.10.2 werden wir zum erweiterten Phasenraum $M \times \mathbb{R}$ übergehen und dort die 1-Form $\eta := \alpha - H dt$ (mit H der Hamilton-Funktion) untersuchen. Teilabschnitt 4.10.1 hat eine vorbereitende Funktion.

4.10.1 Das Stokesche Lemma

DEFINITION 4.13 Sei $A \in \text{Alt}^2(\mathbb{R}^{2f+1})$. Ein Vektor $v \neq 0$ mit der Eigenschaft $A(u, v) = 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^{2f+1}$ heißt ein **Nullvektor** von A .

Hilfsatz: Sei $\Omega : M \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Alt}^2(\mathbb{R}^{2f+1})$, $a \mapsto \Omega_a$ eine 2-Form. Dann existiert für jeden Punkt $a \in M \times \mathbb{R}$ ein Nullvektor von Ω_a .

Beweis: Sei $a \in M \times \mathbb{R}$; e_1, \dots, e_{2f+1} eine Basis von \mathbb{R}^{2f+1} und $A = (A_{kl})$ die Matrix von Ω_a : $A_{kl} = \Omega_a(e_k, e_l)$ ($k, l = 1, \dots, 2f+1$). A ist schiefsymmetrisch: $A^T = -A$. Hiermit folgt

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^{2f+1} \det A = -\det A,$$

und somit $\det A = 0$. Also hat A einen Eigenvektor zum Eigenwert Null. Dieser entspricht dem Nullvektor von Ω_a , dessen Existenz zu zeigen war.

Es ist klar, daß die Nullvektoren einer alternierenden 2-linearen Form einen linearen Raum bilden.

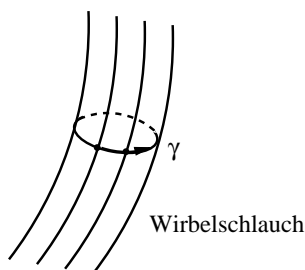
DEFINITION 4.14 Sei Ω wie im Hilfsatz. Dann heißt Ω **nichtsingulär**, wenn der Raum der Nullvektoren von Ω_a für alle $a \in M \times \mathbb{R}$ eindimensional ist.

Bemerkung: Allgemeiner spricht man von einer nichtsingulären 2-Form, wenn der Raum ihrer Nullvektoren die kleinstmögliche Dimension hat. Für eine 2-Form im erweiterten Phasenraum ist die Dimension des Nullraums mindestens gleich Eins; siehe Hilfsatz.

Sei nun η eine 1-Form: $M \times \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^{2f+1}, \mathbb{R})$, deren Cartansche Ableitung $\Omega = d\eta$ nichtsingulär ist. Dann wird durch η jedem Punkt $a \in M \times \mathbb{R}$ in eindeutiger Weise eine "Nullrichtung" zugeordnet, nämlich der eindimensionale Raum von Nullvektoren von $\Omega_a = (d\eta)_a$. Die Integralkurven dieses Feldes von Nullrichtungen heißen **Wirbellinien** von η . (Zur Bestimmung der Integralkurven wählt man irgendein nichtsinguläres differenzierbares Vektorfeld, das dem Feld von Nullrichtungen überall parallel ist, und löst das zugehörige dynamische System. Es ist nicht schwer zu sehen, daß die resultierenden Integralkurven von der Wahl des Vektorfeldes unabhängig sind.)

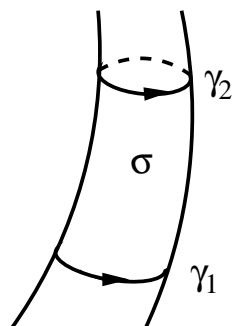
Beispiel: Zur besseren Erläuterung des Begriffs der Wirbellinien betrachten wir den Spezialfall $M \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ und führen auf \mathbb{R}^3 eine Euklidische Struktur ein: ein

Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle$ und ein Vektorprodukt \times . Über die Forderung $\eta_a = \langle \bullet, A(a) \rangle$ für alle $a \in \mathbb{R}^3$ wird dann der 1-Form η ein Vektorfeld $A : a \mapsto A(a)$ zugewiesen. Analog wird der 2-Form Ω durch die Forderung $\Omega_a(u, v) = \langle B(a), u \times v \rangle$ für alle $a \in \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld B zugeordnet. Der Zusammenhang $\omega = d\eta$ geht unter dieser Zuordnung in $B = \text{rot } A$ über; B ist also das Wirbelfeld von A . Die Wirbellinien von A (oder η) sind in diesem Fall nichts anderes als die "Flußlinien" von B . Beachte allerdings, daß das Vektorfeld B **nicht** invariant definiert ist: bei seiner Konstruktion benützt man das Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle$, und die Länge seiner Vektoren ändert sich, wenn das Skalarprodukt geändert wird. Andererseits hat die **Richtung** von $B(a)$ sehr wohl eine invariante Bedeutung: sie ist durch den eindimensionalen Nullraum von $\Omega_a = (d\eta)_a$ gegeben. (Das Skalarprodukt ist ab sofort wieder abgeschafft.) Sei γ eine geschlossene Kurve in $M \times \mathbb{R}$. Die Wirbellinien von η durch die Punkte von γ bilden einen **Wirbelschlauch**.



SATZ 4.15 ("LEMMA VON STOKES") Sei $\eta : M \times \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^{2f+1}, \mathbb{R})$ eine 1-Form mit nichtsingulärer Cartanscher Ableitung $d\eta$. Seien weiter γ_1 und γ_2 zwei geschlossene Kurven, die denselben Wirbelschlauch von η umlaufen. Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} \eta = \int_{\gamma_2} \eta.$$



Beweis: Sei σ das von γ_2 und γ_1 berandete Flächenstück auf dem Wirbelschlauch durch γ_1, γ_2 . In Formeln: $\gamma_2 - \gamma_1 = \partial\sigma = \text{Rand}(\sigma)$. Dann folgt mit dem Allgemeinen Stokesschen Satz: $\int_{\gamma_2} \eta - \int_{\gamma_1} \eta = \int_{\sigma} d\eta$. Die rechte Seite verschwindet, denn

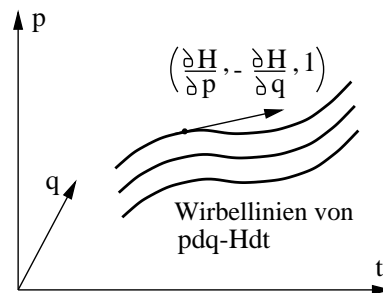
per Definition der Wirbellinien ist jeder Tangentenvektor zu einer Wirbellinie ein Nullvektor von $d\eta$.

4.10.2 Kanonische Gleichungen

Alle grundlegenden Sätze der Hamiltonschen Mechanik lassen sich aus dem Lemma von Stokes direkt herleiten. Seien dazu H die Hamilton-Funktion und $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t$ ein Satz von Koordinaten auf dem erweiterten Phasenraum $M \times \mathbb{R}$.

SATZ 4.16 Die Wirbellinien der 1-Form $\eta = \sum_{k=1}^f p_k dq_k - H dt$ auf dem erweiterten Phasenraum haben eine Eins-zu-Eins-Projektion auf die Zeitachse t ; d.h. sie sind durch eindeutige Funktionen $t \mapsto (q_1(t), \dots, q_f(t), p_1(t), \dots, p_f(t))$ gegeben. Diese Funktionen genügen den kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f). \quad (4.16)$$



Beweis: Sei $X_H = \text{Id}H = \sum_{k=1}^f ((\partial H/\partial p_k)\partial_{q_k} - (\partial H/\partial q_k)\partial_{p_k})$ der symplektische Gradient von H bzgl. $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$. Das um den Basisvektor in Zeitrichtung ergänzte Vektorfeld $X = X_H + \partial_t$ ist ein Nullvektorfeld von $d\eta$:

$$\begin{aligned} d\eta(\bullet, X) &= (\omega - dH \wedge dt)(\bullet, \partial_t + X_H) \\ &= - (dH \wedge dt)(\bullet, \partial_t) + \omega(\bullet, X_H) + dH(X_H) dt = \omega(X_H, X_H) dt = 0. \end{aligned}$$

Das dynamische System zu $X = \partial_t + X_H$ lautet explizit:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dq_k}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f).$$

Die erste Gleichung ($dt/ds = 1 > 0$) bedeutet, daß die Zeit t längs einer Integralkurve mit dem Kurvenparameter s monoton zunimmt und somit die Projektion auf die Zeitachse eins-zu-eins ist. Offensichtlich ergibt Elimination von s zugunsten von t die kanonischen Gleichungen.

KOROLLAR 4.16.1 *Es seien zwei geschlossene Kurven γ_1 und γ_2 gegeben, die denselben Schlauch von Integralkurven von (4.16) umschließen. Dann gilt mit $\mathbf{pdq} = \sum_{k=1}^f p_k dq_k$:*

$$\int_{\gamma_1} (\mathbf{pdq} - Hdt) = \int_{\gamma_2} (\mathbf{pdq} - Hdt).$$

Beweis: Nach Satz 4.16 fallen die Integralkurven von (4.16) mit den Wirbellinien von $\mathbf{pdq} - Hdt$ zusammen. Die Behauptung folgt dann sofort aus dem Lemma von Stokes.

Die 1-Form $\mathbf{pdq} - Hdt$ heißt die Integralinvariante von **Poincaré–Cartan**.

KOROLLAR 4.16.2 *Sei $\phi : M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow M$, $(x, t_1, t_2) \mapsto \phi_{t_2 t_1}(x)$, der Phasenfluß eines nichtautonomen Hamiltonschen Systems mit f Freiheitsgraden. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ , die ganz in der Fläche $t = t_1 = \text{const}$ liegt:*

$$\int_{\phi_{t_2 t_1}(\gamma)} \mathbf{pdq} = \int_{\gamma} \mathbf{pdq}.$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus dem Lemma von Stokes in Kombination mit der Tatsache, daß $\phi_{t_2 t_1}(\gamma)$ ganz in der Ebene $t = t_2 = \text{const}$ liegt.

KOROLLAR 4.16.3 *Sei $\sigma \subset M$ ein zweidimensionales Flächenstück. Dann gilt für $\omega = \sum_k dp_k \wedge dq_k$:*

$$\int_{\phi_{t_2 t_1}(\sigma)} \omega = \int_{\sigma} \omega.$$

Beweis: Benütze Korollar 4.16.2 und den Allgemeinen Stokesschen Satz.

KOROLLAR 4.16.4

$$\phi_{t_2 t_1}^* \omega = \omega, \quad \phi_{t_2 t_1}^*(\omega \wedge \omega) = \omega \wedge \omega, \quad \text{usw.} \quad \phi_{t_2 t_1}^*(\omega^{\wedge f}) = \omega^{\wedge f}.$$

Beweis: Die erste Gleichung folgt aus Korollar 4.16.3 zusammen mit dem Transformationssatz und der Beliebigkeit von σ . Die zweite und alle weiteren Gleichungen (für $f > 2$) folgen dann aus der Vertauschbarkeit des äußeren Produkts mit dem Zurückholen von Formen.

KOROLLAR 4.16.5 *Der Liouvillesche Satz gilt auch für nichtautonome Hamiltonsche Systeme.*

Beweis: $\int_{\phi_{t_2 t_1}(A)} \omega^{\wedge f} = \int_A \phi_{t_2 t_1}^*(\omega^{\wedge f}) = \int_A \omega^{\wedge f}.$

4.10.3 Koordinatenwechsel in den kanonischen Gleichungen

Der einfacheren Notation halber setzen wir in diesem Teilabschnitt $f = 1$. Die unten hergeleiteten Aussagen übertragen sich aber in trivialer Manier auf den Fall beliebig vieler Freiheitsgrade.

Der Zusammenhang zwischen einer vorgegebenen 1-Form $\eta = pdq - Hdt$ und ihren Wirbellinien hat eine invariante Bedeutung: sowohl die Cartansche Ableitung d wie auch der Nullraum von $(d\eta)_\alpha$ ist koordinatenfrei definiert. Dies gestattet uns, die kanonischen Gleichungen (4.16) in ein neues System von Koordinaten (Q, P, T) zu übertragen.

SATZ 4.17 *Sei (q, p) ein kanonisches Paar und (q, p, t) ein Satz von Koordinaten auf dem erweiterten Phasenraum \mathbb{R}^3 . Seien außerdem ein zweiter Satz von Koordinaten (Q, P, T) und zwei Funktionen $K, S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so daß gilt $pdq - Hdt = PdQ - KdT + dS$. Dann werden die Integralkurven von (4.16) in den Koordinaten (Q, P, T) durch die Integralkurven der kanonischen Gleichungen*

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \quad (4.17)$$

dargestellt.

Beweis: Wegen $ddS = 0$ sind die Wirbellinien von $PdQ - KdT$ mit jenen von $pdq - Hdt$ identisch. Nach Satz 4.16 sind diesen Wirbellinien eindeutige Funktionen $T \mapsto (Q(T), P(T))$ zugeordnet, die den kanonischen Gleichungen (4.17) genügen.

SATZ 4.18 *Gegeben seien für $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kanonische Transformation $\psi : M \rightarrow M$ und zwei Sätze von Koordinatenfunktionen q, p und Q, P , die durch $Q = q \circ \psi$, $P = p \circ \psi$ miteinander verknüpft sind. Dann existiert eine Funktion $S : M \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:*

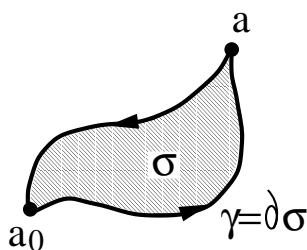
$$pdq = PdQ + dS.$$

Beweis: Sei $\sigma \subset M$ ein Flächenstück mit Rand $\gamma = \partial\sigma$. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} p dq \stackrel{(\text{Stokes})}{=} \int_{\sigma} dp \wedge dq \stackrel{(\psi \text{ kanonisch})}{=} \int_{\sigma} \psi^*(dp \wedge dq) = \int_{\sigma} dP \wedge dQ \stackrel{(\text{Stokes})}{=} \int_{\gamma} P dQ.$$

Das Integral $\int_{\gamma} (pdq - PdQ)$ verschwindet also für alle geschlossenen Kurven γ . Daher ist das Kurvenintegral von $pdq - PdQ$ wegunabhängig, und durch

$$S(a) := \int_{a_0}^a (pdq - PdQ)$$



wird eine Funktion $S : M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Diese Funktion erfüllt die Gleichung $dS = pdq - PdQ$.

KOROLLAR 4.18.1 *In den neuen Koordinaten Q, P haben die kanonischen Gleichungen (4.16) die kanonische Form $\dot{Q} = \partial K / \partial P, \dot{P} = -\partial K / \partial Q$ mit ungeänderter Hamilton-Funktion $K \equiv H$.*

Beweis: Nach Satz 4.18 existiert eine Funktion $\tilde{S} : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (a, t) \mapsto S(a)$, so daß im erweiterten Phasenraum gilt

$$pdq - Hdt = PdQ - Hdt + d\tilde{S}.$$

Nach Satz 4.17 folgt dann, daß sich die kanonischen Gleichungen (4.16) in

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q}$$

umrechnen.

4.10.4 Reduktion der Ordnung für autonome Systeme

Hier sei nun ein System mit f Freiheitsgraden gegeben, dessen Hamilton-Funktion $H = \tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ nicht explizit von der Zeit abhängt. Dann ist die Energie des Systems erhalten: $H(\gamma(t)) = \text{const}$ für jede Integralkurve $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$. Es wird sich herausstellen, daß man mit Hilfe des Energiesatzes die Dimension $2f + 1$ des erweiterten Phasenraumes um zwei Einheiten erniedrigen kann. Dadurch wird das Problem auf die Lösung von kanonischen Gleichungen in einem $(2f - 1)$ -dimensionalen Raum zurückgeführt.

Wir nehmen an, daß die Gleichung

$$h = \tilde{H}(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$$

in einem geeigneten Teilgebiet des Phasenraumes nach p_1 aufgelöst werden kann:

$$p_1 = \tilde{K}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, T; h),$$

wobei $\mathbf{Q} = (q_2, \dots, q_f)$, $\mathbf{P} = (p_2, \dots, p_f)$ und $T = -q_1$. Mit $\mathbf{pdq} = \sum_{k=1}^f p_k dq_k$, $\mathbf{PdQ} = \sum_{k=2}^f p_k dq_k$ und $K = \tilde{K}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, T; h)$ gilt

$$\mathbf{pdq} = \mathbf{PdQ} - KdT.$$

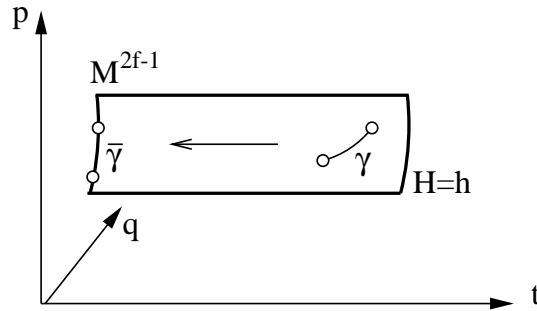
Sei nun γ eine Integralkurve der kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{t} = 1 \quad (k = 1, \dots, f), \quad (4.18)$$

welche in der $2f$ -dimensionalen Fläche $H = h$ im \mathbb{R}^{2f+1} liegt. Dann ist γ eine Wirbellinie der 1-Form $\mathbf{pdq} - Hdt$. Wir projizieren den erweiterten Phasenraum \mathbb{R}^{2f+1} mit Koordinatenfunktionen $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ auf den Phasenraum mit Koordinatenfunktionen (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Die Fläche $H = h$ wird hierbei auf die $(2f - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

$$M^{2f-1} := \{a \in \mathbb{R}^{2f} \mid H(a) = h\}$$

projiziert, und γ wird auf eine Kurve $\bar{\gamma}$ abgebildet.



Die Funktionen $(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, T)$ sind ein Satz (lokaler) Koordinaten auf M^{2f-1} .

Hilfsatz: $\bar{\gamma}$ ist eine Wirbellinie der 1-Form $\mathbf{PdQ} - KdT$ auf M^{2f-1} .

Beweis: Sei $a \in M^{2f-1}$. Wegen der Zeittranslationsinvarianz autonomer Systeme dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß γ den reduzierten Phasenraum M^{2f-1} im Punkt a schneidet. Sei v (\bar{v}) ein Tangentenvektor von γ ($\bar{\gamma}$) im Punkt a . Dann gilt $v = \bar{v} + se_t$ ($s \in \mathbb{R}$), und aus

$$0 = (\omega - dH \wedge dt)_a(\bullet, v)$$

folgt mit $\omega_a(\bullet, e_t) = (dH)_a(e_t) = 0$, $(dt)_a(e_t) = 1$, $(dH)_a(\bar{v}) = (dt)_a(\bar{v}) = 0$ die Gleichung

$$0 = \omega_a(\bullet, v) - s(dH)_a.$$

Sei nun \bar{u} irgendein zweiter Tangentenvektor von M^{2f-1} im Punkt a . Dann gilt $(dH)_a(\bar{u}) = 0$, und wir erhalten

$$0 = \omega_a(\bar{u}, \bar{v}).$$

Folglich ist $\bar{\gamma}$ ist eine Wirbellinie der 1-Form $\mathbf{pdq} = \mathbf{PdQ} - KdT$, wie behauptet.

SATZ 4.19 Die Phasenbahnen der kanonischen Gleichungen (4.18) auf der Energiefläche $H = h$ genügen den kanonischen Gleichungen

$$\frac{dq_i}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dq_1} = +\frac{\partial K}{\partial q_i} \quad (i = 2, \dots, f), \quad (4.19)$$

wobei die Funktion $K = \tilde{K}(q_1, q_2, \dots, q_f, p_2, \dots, p_f; h)$ durch die Gleichung $\tilde{H}(q_1, \dots, q_f, K, p_2, \dots, p_f) = h$ bestimmt ist.

Beweis: Da nach obigem Hilfsatz jede Phasenbahn $\bar{\gamma}$ eine Wirbellinie von $\mathbf{PdQ} - KdT$ ist, gelten längs $\bar{\gamma}$ die kanonischen Gleichungen

$$\frac{dQ_i}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i},$$

siehe Satz 4.16. Mit den Identifikationen $Q_i = q_i$, $P_i = p_i$ ($i = 2, \dots, f$) und $-T = q_1$ folgt die Behauptung des Satzes.

Bemerkung: Das System (4.19) ist im allgemeinen nichtautonom, da $K = \tilde{K}(q_1, \dots)$ explizit von q_1 abhängt.

4.10.5 Erzeugende Funktionen

Wir kehren zum einfachen Fall $f = 1$, $M = \mathbb{R}^2$ zurück und betrachten eine kanonische Transformation $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Wie in den Voraussetzungen zu Satz 4.18 setzen wir $Q = q \circ \psi$ und $P = p \circ \psi$. Aus Satz 4.18 folgt dann die Existenz einer Funktion $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$dS = p dq - PdQ. \quad (4.20)$$

DEFINITION 4.15 Wir nennen eine kanonische Transformation $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vom **Typ 1 (vom Typ 2)**, wenn q und $q \circ \psi$ ($p \circ \psi$) einen Satz unabhängiger Koordinaten bilden.

Sei nun ψ vom Typ 1. Dann läßt sich eine Funktion $S_1(q, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ finden, so daß $S = S_1(q, Q)$. Aus der linearen Unabhängigkeit von dq und dQ folgt nach Einsetzen von $dS = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q) dq + \frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q) dQ$ in (4.20), daß $S_1(q, Q)$ den Gleichungen

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q), \quad (4.21a)$$

$$P = -\frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q) \quad (4.21b)$$

genügt. Diese Schritte lassen sich umkehren und zur Konstruktion von kanonischen Transformationen benützen. Dazu geben wir uns eine zweimal stetig differenzierbare

Funktion $S_1(q, Q)$ vor. Unter der Voraussetzung $\partial^2 S_1 / \partial q \partial Q \neq 0$ können wir dann Gleichung (4.21a) lokal nach Q auflösen und erhalten $Q = \tilde{Q}(q, p)$. Diese Beziehung setzen wir in Gleichung (4.21b) ein und erhalten $P = \tilde{P}(q, p)$. Per Konstruktion gilt dann $dp \wedge dq = dP \wedge dQ$. Die Funktion $S_1(q, Q)$ heißt eine **erzeugende Funktion** vom Typ 1.

Bei weitem nicht alle kanonischen Transformationen sind vom Typ 1. Zum Beispiel fallen für die identische Transformation die Funktionen q und Q zusammen und sind nicht unabhängig. Es ist also nicht möglich, die identische Transformation aus einer erzeugenden Funktion $S_1(q, Q)$ zu gewinnen. Dies läßt sich jedoch mit Typ 2 bewerkstelligen. Sei jetzt ψ vom Typ 2. Dann setzen wir

$$S + PQ =: S_2(q, P),$$

wobei die Funktion S wie zuvor durch $dS = pdq - PdQ$ definiert ist. Wir bilden das Differential

$$pdq - PdQ = dS = \frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P) dq + \frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P) dP - P dQ - Q dP$$

und folgern aus der linearen Unabhängigkeit von dq und dP die Relationen:

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P), \quad (4.22a)$$

$$Q = \frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P). \quad (4.22b)$$

Offensichtlich hat die identische Transformation $Q = q$, $P = p$ die erzeugende Funktion $S_2(q, P) = qP$. Auch hier kann man wieder umgekehrt vorgehen. Für eine vorgegebene erzeugende Funktion $S_2(q, P)$ löst man (4.22a) nach P auf und setzt das Resultat in (4.22b) ein. Dieses Verfahren werden wir später noch verwenden. Wir formulieren die Aussage daher als Satz.

SATZ 4.20 1. Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine kanonische Transformation vom Typ 2, und sei $Q = q \circ \psi$, $P = p \circ \psi$. Dann genügt die durch $S_2(q(a), P(a)) = Q(a)P(a) + \int_{a_0}^a (pdq - PdQ)$ ($a \in \mathbb{R}^2$) definierte Funktion $S_2(q, P)$ den Gleichungen (4.22a,b).
2. Sei umgekehrt eine C^2 -Funktion $S_2(q, P)$ gegeben, und sei $a_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, in dem gilt

$$\frac{\partial^2 S_2}{\partial q \partial P}(q(a_0), P(a_0)) \neq 0. \quad (4.23)$$

Dann bestimmen die Gleichungen (4.22a,b) eine kanonische Transformation vom Typ 2 in einer Umgebung von a_0 .

Bemerkungen:

- (i) Da (4.23) die Auflösbarkeit von (4.22a) nur **lokal** garantiert, können wir unter 2. nicht ohne weiteres auf einen **globalen** Diffeomorphismus $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (d.h. eine kanonische Transformation im Sinne von Definition 4.8) schließen.
- (ii) Der praktische Gebrauch der erzeugenden Funktion $S_2(q, P)$ ist auch deshalb bequem, weil Gleichungen (4.22a,b) keine Minuszeichen enthalten und sich leicht merken lassen, indem man sich einprägt, daß die Identität durch $S_2(q, P) = qP$ erzeugt wird.

Kapitel 5

Stabilität und Chaos

Als Finale zum Thema der Hamiltonschen Systeme wollen wir nun einige qualitative Aussagen über das Langzeitverhalten von Phasenflüssen erarbeiten. Ausgangspunkt der Diskussion werden autonome Systeme mit der speziellen Eigenschaft sein, daß genauso viele “unabhängige” Integrale der Bewegung vorliegen wie Freiheitsgrade. Solche Systeme heißen *integrabel*, weil sich die Lösung ihrer Bewegungsgleichungen auf Quadraturen, also auf Berechnung unbestimmter Integrale, zurückführen läßt.

Der Verlauf der Phasenbahnen eines integrablen Hamiltonschen Systems ist durch die Existenz der Bewegungsintegrale stark eingeschränkt: für Systeme mit einem $2f$ -dimensionalen Phasenraum erkundet die Bewegung nur Unterräume der halben Dimension f . Ist die Bewegung gebunden, so sind die unter dem Phasenfluß invarianten Untermannigfaltigkeiten i.a. diffeomorph zu einem Torus T^f .

Endziel unserer Betrachtungen ist ein qualitatives Verständnis des Schicksals, das die invarianten Tori unter schwachen Störungen des integrablen Systems erfahren. Zwei Fälle werden hierbei zu unterscheiden sein. Falls die Frequenzen der quasiperiodischen Bewegung auf dem Torus eine gewisse Inkommensurabilitätsbedingung erfüllen, greift ein Theorem von Kolmogorov, Arnold und Moser. Es behauptet grob gesprochen, daß eine kleine Störung den Torus lediglich deformiert, seine Invarianz unter dem gestörten Phasenfluß aber bestehen bleibt. In diesem Fall bleibt die Bewegung also quasiperiodisch und somit geordnet.

Stehen die Frequenzen hingegen in einem rationalen Verhältnis zueinander, wird der invariante Torus i.a. schon durch eine beliebig kleine Störung vernichtet. Es treten hyperbolische Fixpunkte auf, deren stabile und instabile Mannigfaltigkeiten sich generisch in unendlich vielen Punkten schneiden. In der Nähe der Fixpunkte führt die Kombination von expandierender und faltender Dynamik zu fortschreitender Filigranisierung von anfänglich glatten Phasenraumdichten. Tatsächlich erkundet in diesem Fall eine einzige Phasenbahn die gesamte Energieschale, d.h. den nach

Berücksichtigung des Energiesatzes verfügbaren Phasenraum. Eine solche Bewegung heißt chaotisch. Charakteristisch für sie ist, daß das Langzeitverhalten, obwohl es im Prinzip vollständig determiniert ist, in der Praxis nicht im Detail vorhergesagt werden kann, weil Unsicherheiten oder Unschärfen in den Anfangsbedingungen exponentiell anwachsen.

Soweit das ehrgeizige Programm dieses Kapitels. Einen bequemen Ausgangspunkt für die störungstheoretische Behandlung schwach nichtintegrabler Systeme bilden die sogenannten Wirkungs- und Winkelvariablen. Wir beginnen mit ihrer Einführung im nächsten Abschnitt.

5.1 Wirkungs- und Winkelvariable

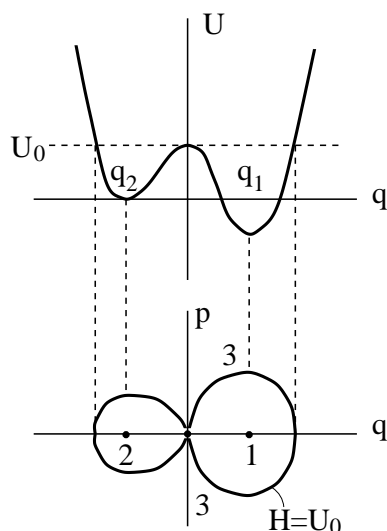
Wir betrachten ein autonomes Hamiltonsches System mit einem Freiheitsgrad ($f = 1$) und Hamilton-Funktion H . Aus dem Phasenraum eines solchen Systems greifen wir eine (nichtleere) offene Teilmenge $M^i \subset \mathbb{R}^2$ heraus, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (1) Es existieren zwei Energien E_{\min} und E_{\max} , so daß für alle $a \in M^i$ gilt $E_{\min} < H(a) < E_{\max}$.
- (2) Für jede Energie $E \in]E_{\min}, E_{\max}[$ sei der Durchschnitt von M^i mit der Niveaukurve zu dieser Energie eine zusammenhängende geschlossene Kurve.
- (3) dH verschwinde nirgendwo auf M^i .

Beispiel: Sei $H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$ mit U wie in der Zeichnung. Dann existieren drei getrennte Gebiete im Phasenraum, wo sich die Voraussetzungen (1)–(3) erfüllen lassen: **Gebiet 1** (die Separatrix $H = U_0$ und den kritischen Punkt $(q_1, 0)$ ausgenommen), **Gebiet 2** (die Separatrix $H = U_0$ und den kritischen Punkt $(q_2, 0)$ ausgenommen), und **Gebiet 3** (die Separatrix $H = U_0$ ausgenommen). ■

Unter den angegebenen Voraussetzungen an M^i suchen wir nun nach einem Paar von Koordinatenfunktionen (θ, I) auf M^i , so daß gilt:

- (1) $dp \wedge dq = dI \wedge d\theta$ auf M^i .
- (2) I ist ein erstes Integral: $I = f(H)$ mit $f :]E_{\min}, E_{\max}[\rightarrow]I_{\min}, I_{\max}[$ einer monotonen Funktion.
- (3) $\oint_{M_E} d\theta = 2\pi$ für alle Energie-Niveaukurven M_E in M^i , d.h. θ ist ein Winkel.



Wir bezeichnen die Umkehrfunktion von f mit h ($f \circ h = \text{Id}$). Um die gesuchte kanonische Transformation $q, p \rightarrow \theta, I$ zu finden, lassen wir uns von Satz 4.20 inspirieren und konstruieren eine erzeugende Funktion $\tilde{S}(q, I)$ vom Typ 2 (den Index 2 lassen wir der Kürze halber weg):

$$p = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}(q, I), \quad (5.1a)$$

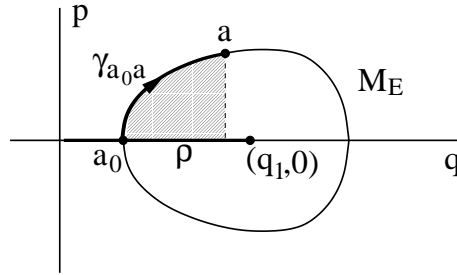
$$\theta = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial I}(q, I). \quad (5.1b)$$

Zu Referenzzwecken legen wir irgendein Kurvenstück ρ fest (z.B. einen geeigneten Abschnitt der q -Achse), das jede Energie-Niveaueurve in M^i in genau einem Punkt schneidet. Für einen vorgegebenen Punkt $a \in M^i$ sei nun M_E die Energie-Niveaueurve durch a und $\gamma_{a_0 a}$ ein Weg, der von $a_0 = M_E \cap \rho$ längs M_E nach a führt. Dann wird durch

$$S(a) = \int_{\gamma_{a_0 a}} p dq$$

lokal eine differenzierbare Funktion $S : M^i \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Unter der Annahme, daß q und die noch zu bestimmende Funktion I als lokale Koordinaten benützt werden können, wird dann durch die Forderung $S = \tilde{S}(q, I)$ lokal eine Funktion \tilde{S} definiert. Diese Funktion erfüllt Gleichung (5.1a).

Beachte nun, daß die Wahl von $\gamma_{a_0 a}$ nicht eindeutig ist: der Weg $\gamma_{a_0 a}$ kann von a_0 nach a im Uhrzeigersinn oder im Gegenuhrzeigersinn laufen, und er kann M_E auch mehrmals umrunden, bevor er am Punkt a haltmacht. Mit $\gamma_{a_0 a}$ ist auch $S(a)$ als das Kurvenintegral von $p dq$ längs $\gamma_{a_0 a}$ nicht eindeutig definiert. Tatsächlich existiert neben \tilde{S} eine ganze Schar von erzeugenden Funktionen, die alle dasselbe leisten wie



\tilde{S} , nämlich

$$\tilde{S}^{(k)}(q, I) = \tilde{S}(q, I) + k \cdot \Pi(h(I)) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

wobei $\Pi(E) = \oint_{M_E} p dq$ die von M_E umschlossene Phasenfläche ist. Diese Nichteindeutigkeit von \tilde{S} war zu erwarten, denn

$$\theta = \frac{\partial \tilde{S}^{(k)}}{\partial I}(q, I) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial I}(q, I) + k \cdot \frac{d}{dI}(\Pi \circ h)(I) \quad (5.2)$$

soll ja ein Winkel sein und Winkel sind nur modulo 2π definiert. Die letzte Feststellung liefert zusammen mit Gleichung (5.2) eine Bedingung, die I festlegt:

$$\frac{d}{dI}(\Pi \circ h)(I) f = 2\pi \quad \Rightarrow \quad (\Pi \circ h)(I) = 2\pi I + \text{const}.$$

Wir wählen o.B.d.A. $\text{const} = 0$ und haben

$$I = f(H) = \frac{1}{2\pi} \Pi(H).$$

DEFINITION 5.1 Die Wirkungsvariable eines Hamiltonschen Systems mit einem Freiheitsgrad ist die Funktion

$$\boxed{I = \frac{1}{2\pi} \Pi(H)},$$

also die Phasenfläche in Einheiten von 2π .

Bemerkung: Wir erkennen jetzt den Sinn der Voraussetzungen (2) und (3) an M^1 : die Phasenfläche Π ist nur für geschlossene Energie-Niveaueurven definiert, und $dH \neq 0$ ist für $dI \neq 0$ notwendig. ■

In den Koordinaten θ, I lauten die kanonischen Gleichungen

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} =: \omega(I) \quad \text{und} \quad \dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0.$$

Ihre Integralkurven $\gamma(t)$ sind durch

$$\theta(\gamma(t)) = \theta_0 + \omega(I_0)t, \quad I(\gamma(t)) = I_0 \quad (5.3)$$

gegeben.¹ (5.3) ist eine periodische Bewegung mit Periodendauer T .

Behauptung: $T(E) = \frac{d}{dE}\Pi(E)$.

Beweis: Aus $I = f(H) = \frac{1}{2\pi}\Pi(H)$ folgt

$$T(E) = \frac{2\pi}{\omega(f(E))} = \frac{2\pi}{\partial H/\partial I}\Big|_{I=f(E)} = 2\pi \frac{d}{dE}f(E) = \frac{d}{dE}\Pi(E).$$

Interpretation der Winkelvariablen θ :

Der Phasenfluß ϕ läßt M_E invariant, und es gilt

$$\phi_{t+T(E)}(a) = \phi_t(a)$$

für $a \in M_E$. Daher wird durch die Forderung

$$\phi_{T(H(a)) \cdot \theta(a)/2\pi}(M_{H(a)} \cap \rho) = a$$

eine Winkelkoordinate θ definiert. Diese ist mit dem durch $\theta = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial I}(q, I)$ erklärten Winkel identisch, was man anhand der Lösung (5.3) der Bewegungsgleichungen leicht erkennt. In anderen Worten: die Winkelkoordinate θ teilt die Phasenbahn M_E so ein, daß die Bewegung in gleichen Zeiten gleiche Winkel überstreicht.

Beachte: θ ist von der Wahl von ρ abhängig. Eine Änderung von ρ entspricht dem Hinzufügen einer Funktion der Winkelvariablen: $\theta \rightarrow \theta + g(I)$, was $dI \wedge d\theta$ ungeändert läßt.

5.2 Kanonische Störungsrechnung

Wir betrachten ein nichtautonomes Hamiltonsches System mit einem Freiheitsgrad. In Winkel- und Wirkungsvariablen θ, I sei die Hamilton-Funktion H durch

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(\theta, I, t) \tag{5.4}$$

gegeben, wobei ε ein dimensionsloser Parameter ist.

Beispiele:

- (i) harmonischer Oszillator mit variabler Frequenz (das in Abschnitt 2.6 diskutierte System):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2(t)q^2, \quad \omega^2(t) = (1 + \varepsilon f(t))\omega_0^2.$$

¹Hier ist eine gute Gelegenheit, eine **WARNUNG** unterzubringen: meistens fassen wir Koordinaten wie θ, I oder q, p als Abbildungen des Phasenraumes in die reellen Zahlen auf. Wir verfolgen diesen Standpunkt aber nicht konsequent, sondern schreiben häufig kurz $q(t)$ für $q(\gamma(t))$, $\theta(t)$ für $\theta(\gamma(t))$ usw.!

Wir definieren θ, I als die Winkel- und Wirkungsvariablen des autonomen Systems für $\varepsilon = 0$, also des harmonischen Oszillators mit konstanter Frequenz ω_0 . Wählen wir $\theta = 0$ auf der negativen q -Achse, so liefert vorschriftsmäßige Konstruktion die Transformationsgleichungen

$$q = - \left(\frac{2I}{m\omega_0} \right)^{1/2} \cos \theta, \quad p = (2Im\omega_0)^{1/2} \sin \theta.$$

In den Koordinaten θ, I wird die Hamilton-Funktion dann durch (5.4) ausgedrückt mit

$$H_0(I) = \omega_0 I, \quad H_1(\theta, I, t) = f(t) \omega_0 I \cos^2 \theta.$$

- (ii) Kernspinresonanz. Die Hamilton-Funktion des klassischen Spins im Magnetfeld ist $H = -\mu \langle \sigma, B \rangle$. Im Unterschied zu Abschnitt 4.4.1 fassen wir σ hier nicht als Einheitsvektor auf, sondern als Drehimpulsvektor der Länge $|\sigma| = S$. μ hat dann die physikalische Dimension von Ladung/Masse, und die symplektische Struktur des Spin-Systems ist $\omega = -S^{-1}\mathcal{A}$, wobei \mathcal{A} die Flächenform auf der Sphäre $|\sigma| = S$ bezeichnet. Durch $\sigma_1 = S \sin \alpha \cos \beta$, $\sigma_2 = S \sin \alpha \sin \beta$, $\sigma_3 = S \cos \alpha$ werden auf dieser Sphäre ein Polarwinkel α und ein Azimutwinkel β eingeführt. In solchen Koordinaten hat die symplektische Struktur die Gestalt $\omega = -S \sin \alpha \, d\alpha \wedge d\beta$. Wir betrachten jetzt den Fall eines zeitabhängigen Magnetfeldes $B(t) = B_0(e_3 + \varepsilon \cos(\Omega t) e_1)$. Wie in Beispiel (i) definieren wir θ, I anhand des autonomen Systems $\varepsilon = 0$, und zwar durch $I := S(1 - \cos \alpha)$ (Wirkungsvariable) und $\theta := -\beta$ (Winkelvariable). Der Ausdruck $\omega = -S \sin \alpha \, d\alpha \wedge d\beta = dI \wedge d\theta$ zeigt, daß (θ, I) ein kanonisches Paar bilden. Auch hier hat die Hamilton-Funktion wieder die Form (5.4), wobei mit der Larmor-Frequenz $\omega_L = \mu B_0$ jetzt gilt:

$$H_0(I) = \omega_L(I - S) \quad \text{und} \quad H_1(\theta, I, t) = -\omega_L \sqrt{I(2S - I)} \cos(\Omega t) \cos \theta.$$

Die Bewegungsgleichungen eines Hamiltonschen Systems mit der Hamilton-Funktion (5.4),

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H_0}{\partial I}(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}(\theta, I, t), \\ \dot{I} &= -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \theta}(\theta, I, t), \end{aligned}$$

sind im allgemeinen, d.h. wenn sich kein Bewegungsintegral finden läßt, nicht exakt lösbar. Die Situation ist jedoch etwas besser für $\varepsilon \ll 1$. In diesem Fall kann man nämlich das lösbare Problem für $\varepsilon = 0$ zum Ausgangspunkt nehmen und den

Versuch machen, das “gestörte” Problem für $\varepsilon \neq 0$ durch Entwickeln nach Potenzen von ε zu behandeln. Eine Strategie dieser Art wird in der Physik sehr häufig benutzt und heißt Störungsrechnung. Im folgenden beschreiben wir die Idee der Störungsrechnung in der kanonischen Mechanik.

Offensichtlich ist es ein erstrebenswertes Ziel, die Hamilton-Funktion H durch eine kanonische Transformation von θ, I zu neuen Koordinaten φ, J in die Form $K = K_0(J)$ zu bringen. Gelingt dies nämlich, so ist $\dot{J} = -\partial K/\partial \varphi = 0$, und die Bewegungsgleichungen lassen sich mit Hilfe des Bewegungsintegrals $J(t) = \text{const}$ lösen. Zur Konstruktion von φ, J bedienen wir uns einer erzeugenden Funktion S vom Typ 2, die wir als Potenzreihe in ε ansetzen:

$$S = \theta J + \varepsilon S_1(\theta, J, t) + \varepsilon^2 S_2(\theta, J, t) + \dots \quad (5.5)$$

Es gelten dann die Relationen

$$I = \frac{\partial S}{\partial \theta} = J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta}(\theta, J, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.6a)$$

$$\varphi = \frac{\partial S}{\partial J} = \theta + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial J}(\theta, J, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.6b)$$

Für den Zweck späterer Verwendung halten wir fest

$$I - J \sim \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varphi - \theta \sim \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (5.7)$$

Die transformierte Hamilton-Funktion K bestimmen wir über die Forderung

$$\eta = I d\theta - H dt = J d\varphi - K dt + d(S - \varphi J),$$

woraus mit den Gleichungen $I = \partial S/\partial \theta$, $\varphi = \partial S/\partial J$ und

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial S}{\partial J} dJ + \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

die Beziehung

$$\boxed{K = H + \frac{\partial S}{\partial t}}$$

folgt. Nach Satz 4.17 haben dann die Bewegungsgleichungen bezüglich φ, J wieder die kanonische Form

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial K}{\partial J}, \quad \dot{J} = -\frac{\partial K}{\partial \varphi}.$$

K wird in den neuen Koordinaten φ, J, t folgendermaßen ausgedrückt:

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0(I) + \varepsilon H_1(\theta, I, t) + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial t}(\theta, J, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Unter Verwendung der Gleichungen (5.6a,b) und (5.7) erhalten wir hieraus

$$K = H_0(J) + \varepsilon K_1(\varphi, J, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

wobei mit $\omega_0(J) = dH_0(J)/dJ$ gilt

$$K_1(\varphi, J, t) = \omega_0(J) \frac{\partial S_1}{\partial \varphi}(\varphi, J, t) + H_1(\varphi, J, t) + \frac{\partial S_1}{\partial t}(\varphi, J, t).$$

Es liegt nun nahe zu fragen, ob sich die Funktion K_1 durch geeignete Wahl von S_1 zum Verschwinden bringen läßt, also ob die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\omega_0 \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_1}{\partial t} = -H_1 \quad (5.8)$$

für S_1 lösbar ist. Diese Frage können wir hier nicht allgemein beantworten, da wir über die nötigen Kenntnisse in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen nicht verfügen. Wir spezialisieren deshalb die Problemstellung, indem wir verlangen, daß H_1 periodisch von der Zeit (mit Periode $2\pi/\Omega$) abhängt:

$$H_1\left(\varphi, J, t + \frac{2\pi}{\Omega}\right) = H_1(\varphi, J, t).$$

Dann läßt sich sofort sagen, daß Gleichung (5.8) **nicht** in der Klasse der eindeutigen Funktionen S_1 lösbar sein kann, denn für die linke Seite gilt

$$\int_0^{2\pi/\Omega} \left(\int_0^{2\pi} \left(\omega_0 \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) d\varphi \right) dt = 0,$$

während das entsprechende Integral der rechten Seite im allgemeinen von Null verschieden ist:

$$h_1(J) := \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\Omega} \left(\int_0^{2\pi} H_1(\varphi, J, t) d\varphi \right) dt \neq 0. \quad (5.9)$$

Diese Schwierigkeit beheben wir durch Abspalten des Mittelwerts, d.h. wir schreiben

$$K = K_0(J) + \varepsilon \tilde{K}_1(\varphi, J, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

mit $K_0(J) = H_0(J) + \varepsilon h_1(J)$ und $\tilde{K}_1(\varphi, J, t) = K_1(\varphi, J, t) - h_1(J)$ und versuchen sodann, \tilde{K}_1 durch Lösen des modifizierten Problems

$$\omega_0 \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_1}{\partial t} = -H_1 + h_1 \quad (5.8')$$

für S_1 zu Null zu machen.

Zum Zweck der Lösung von (5.8') setzen wir für $H_1 - h_1$ und S_1 jeweils doppelte Fourier-Reihen an:

$$\begin{aligned} H_1(\varphi, J, t) - h_1(J) &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0,0\}} h_{m,n}(J) e^{i(m\varphi + n\Omega t)}, \\ S_1(\varphi, J, t) &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0,0\}} s_{m,n}(J) e^{i(m\varphi + n\Omega t)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die partielle Differentialgleichung (5.8') geht dann in ein System von algebraischen Gleichungen über:

$$(im\omega_0(J) + in\Omega)s_{m,n}(J) = -h_{m,n}(J), \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}. \quad (5.11)$$

Es ist nun eine **Fallunterscheidung** notwendig.

- (A) Für festes J seien $\omega_0(J)$ und Ω inkommensurabel, d.h. $\omega_0(J)/\Omega$ liege nicht in den rationalen Zahlen. Dann existiert der Ausdruck

$$s_{m,n}(J) := -\frac{h_{m,n}(J)}{im\omega_0(J) + in\Omega} \quad (5.12)$$

für alle $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$. Unter der Voraussetzung, daß die durch Gleichungen (5.10) und (5.12) erklärte Fourier-Reihe für S_1 konvergiert, wird durch die Gleichungen (5.5), (5.6a,b), (5.10), (5.12) eine zeitabhängige kanonische Transformation $\theta, I \rightarrow \varphi, J$ definiert, welche die Hamilton-Funktion in die Form

$$K = H_0(J) + \varepsilon h_1(J) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

bringt, wobei $h_1(J)$ die über den Winkel und die Zeit gemittelte Störung ist; siehe Gleichung (5.9).

- (B) Sind $\omega_0(J)$ und Ω kommensurabel, d.h. existieren zwei ganze Zahlen $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$, so daß gilt:

$$m\omega_0(J) + n\Omega = 0,$$

so hat das Gleichungssystem (5.11) keine Lösung für die Fourier-Koeffizienten von S_1 . Störungsrechnung ist dann nicht anwendbar, jedenfalls nicht in der obigen Form!

Beispiel: Harmonischer Oszillator mit periodisch veränderlicher Frequenz. Es handelt sich um Beispiel (i) von oben, wobei wir jetzt $f(t + 2\pi/\Omega) = f(t)$ verlangen und den Mittelwert mit $\langle f \rangle = \int_0^1 f(\tau \cdot 2\pi/\Omega) d\tau$ bezeichnen. Wir haben dann

$$H_1(\varphi, J, t) - h_1(J) = \frac{1}{2} (f(t) - \langle f \rangle) + f(t) \cos 2\varphi \omega_0 J.$$

Die Differentialgleichung (5.8') zu lösen ist im vorliegenden Fall vergleichsweise einfach und erfordert keine Verwendung von Fourier-Reihen. Die Lösung läßt sich mit Hilfe eines Standard-Verfahrens, nämlich der Charakteristiken-Methode für lineare partielle Differentialgleichungen, direkt angeben:

$$S_1(\varphi, J, t) = \frac{1}{2} \left(\int_0^t f(t') dt' - \langle f \rangle t + \int_0^t \cos(2\varphi - 2\omega_0(t - t')) f(t') dt' \right) \omega_0 J.$$

Wie man durch Einsetzen der Fourier-Reihe $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\Omega t}$ sieht, bleibt diese Lösung beschränkt, falls die Frequenzsumme $\pm 2\omega_0 + n\Omega$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ von Null verschieden ist. Andererseits wächst die Lösung über alle Grenzen, und die Störungsrechnung bricht zusammen, wenn gilt $\pm 2\omega_0 + n\Omega = 0$, oder äquivalent

$$\Omega = \frac{2\omega_0}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Diese Kommensurabilitäts-Bedingung ist uns schon aus Abschnitt 2.6 als die Bedingung für das Auftreten parametrischer Resonanz bekannt.

Ergänzende **Bemerkungen**:

1. Kommensurabilität ist die "Ausnahme": die rationalen Zahlen haben verschwindendes (Lebesgue-) Maß in den reellen Zahlen.
2. Eine Diskussion des kommensurablen Falles mit anderen Methoden ist möglich (siehe weiter unten) und zeigt, daß es hier im allgemeinen zu Instabilität und chaotischer Bewegung kommt.
3. Wir haben nicht diskutiert, ob die Störungsrechnung zu höheren Ordnungen in ε fortsetzbar ist und eine konvergente Störungsreihe $S = \theta J + \varepsilon S_1(\theta, J, t) + \varepsilon^2 S_2(\theta, J, t) + \dots$ liefert. Die Voraussetzungen, unter denen sich Konvergenz zeigen läßt, werden im berühmten (aber beweistechnisch schwierigen) KAM-Theorem von Kolmogorov-Arnold-Moser formuliert (siehe weiter unten).

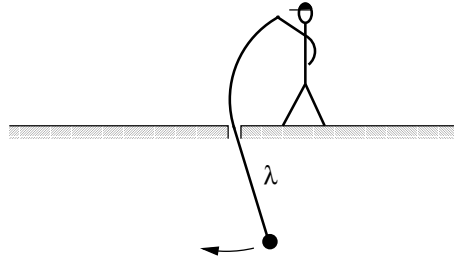
5.3 Adiabatische Invarianz der Wirkungsvariable

Auch hier betrachten wir wieder nichtautonome Hamiltonsche Systeme mit 1 Freiheitsgrad. Gegeben sei eine Schar von Hamilton-Funktionen, die von einem reellen Parameter λ abhängen: $H_\lambda = \tilde{H}(q, p; \lambda)$. Wir interessieren uns für einen Prozeß, wo λ von einem Anfangswert λ_0 zu einem Endwert λ_1 geändert wird. Genau gesprochen sei $\lambda = f(\sigma)$, $\lambda_0 = f(0)$, $\lambda_1 = f(1)$ mit f einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion. Die Variable σ spielt die Rolle einer dimensionslosen Zeit. Wir setzen

$$\sigma = t/T, \quad t \in [0, T],$$

wobei t die reale Zeit ist und T die Gesamtdauer des Prozesses. Unter dem **adiabatischen Limes** versteht man in diesem Zusammenhang den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$.

Beispiel: Änderung der Länge λ eines Pendels (siehe Figur). Im adiabatischen Limes wird die Pendellänge “unendlich langsam” geändert.



Die Energie eines nichtautonomen Systems ist im allgemeinen nicht erhalten, selbst im adiabatischen Limes nicht. Im angesprochenen Beispiel wird beim Verkürzen der Pendellänge Arbeit am System verrichtet, ganz egal wie langsam das Verkürzen erfolgt. Wir werden jetzt zeigen, daß im adiabatischen Limes dafür eine andere Größe erhalten ist, nämlich die Wirkungsvariable I .

Für jeden **festen** Wert von λ führen wir auf einer geeigneten Teilmenge M des Phasenraumes Winkel- und Wirkungsvariable $\theta_\lambda, I_\lambda$ ein. Dabei gehen wir genauso vor wie in Abschnitt 5.1. Die Wirkungsvariable $I_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ wird durch

$$I_\lambda(a) = \frac{1}{2\pi} \Pi \left(\tilde{H}(q(a), p(a); \lambda) \right)$$

erklärt, die erzeugende Funktion $a \mapsto S_\lambda(a)$ ist das Kurvenintegral der 1-Form $p dq$ von a_0 nach a längs der Niveaulinie von $\tilde{H}(q(\bullet), p(\bullet); \lambda)$ durch a , und die Winkelvariable ergibt sich aus $\theta_\lambda = \partial S_\lambda / \partial I_\lambda$.

Im nächsten Schritt erweitern wir die Funktionen $I_\lambda, \theta_\lambda, S_\lambda, H_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ zu Funktionen auf dem erweiterten Phasenraum $M \times [0, 1]$ durch:

$$I : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a, \sigma) \mapsto I_{f(\sigma)}(a),$$

und analog für θ, S, H . Zur technischen Implementierung des adiabatischen Limes $T \rightarrow \infty$ ist es zweckmäßig, die Koordinaten θ, I und $\sigma = t/T$ zu verwenden.

Die Koordinaten θ, I hängen über den Parameter $\lambda = f(\sigma)$ explizit von der Zeit ab. Deshalb, und weil wir $\sigma = t/T$ als Zeitkoordinate verwenden wollen, sind die Bewegungsgleichungen für θ und I zwar von der kanonischen Form, aber mit einer von H verschiedenen Hamilton-Funktion, K_T . Zu deren Berechnung betrachten wir wieder die Integralinvariante von Poincaré–Cartan. Mit $p = \partial S / \partial q, \theta = \partial S / \partial I$ und

$dt = Td\sigma$ folgt aus

$$\begin{aligned} pdq - Hdt &= Id\theta - K_T d\sigma + d(S - \theta I) \\ &= -\theta dI - K_T d\sigma + \frac{\partial S}{\partial q} dq + \frac{\partial S}{\partial I} dI + \frac{\partial S}{\partial \sigma} d\sigma \end{aligned}$$

nach Koeffizientenvergleich die Beziehung

$$K_T = T \cdot H + \frac{\partial S}{\partial \sigma}.$$

Nach Satz 4.17 stimmen die Integralkurven des Hamiltonschen Systems mit den Integralkurven der kanonischen Gleichungen

$$\dot{\theta} = \frac{\partial K_T}{\partial I}, \quad \dot{I} = -\frac{\partial K_T}{\partial \theta}, \quad \dot{\sigma} = 1 \quad (5.13)$$

überein. Wir setzen $\omega(I, \sigma) = \partial H / \partial I$.

SATZ 5.1 *Gilt $\omega(I_0, \sigma) > c > 0$ für alle $\sigma \in [0, 1]$, so ist I für jeden Anfangszustand mit Wirkung I_0 eine **adiabatische Invariante**, d.h.*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} I(\gamma_T(\sigma)) = I_0 \quad \text{für jedes } \sigma \in [0, 1]$$

und jede Integralkurve $\gamma_T : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ von (5.13) mit $I(\gamma_T(0)) = I_0$.

Beweis: Für großes T ist in der transformierten Hamilton-Funktion $K_T = TH + \partial S / \partial \sigma$ der zweite Term klein gegenüber dem ersten und wir können Störungsrechnung in $1/T$ versuchen. Dazu setzen wir $H =: H_0(I, \sigma)$ und $\partial S / \partial \sigma =: H_1(\theta, I, \sigma)$. Eine erzeugende Funktion R vom Typ 2,

$$R = \theta J + \frac{1}{T} R_1(\theta, J, \sigma) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^2}\right),$$

liefert eine kanonische Transformation $\theta, I \rightarrow \varphi, J$ über die Gleichungen

$$I = \frac{\partial R}{\partial \theta} = J + \frac{1}{T} \frac{\partial R_1}{\partial \theta}(\theta, J, \sigma) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^2}\right) \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\partial R}{\partial J}.$$

Die neue Hamilton-Funktion ist

$$\begin{aligned} K &= TH_0(I, \sigma) + H_1(\theta, I, \sigma) + \frac{1}{T} \frac{\partial R_1}{\partial \sigma}(\theta, J, \sigma) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^2}\right) \\ &= TH_0(J, \sigma) + \omega(J, \sigma) \frac{\partial R_1}{\partial \varphi}(\varphi, J, \sigma) + H_1(\varphi, J, \sigma) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 5.2 spalten wir den Mittelwert

$$h_1(J, \sigma) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(\varphi, J, \sigma) d\varphi$$

der Störung ab. Durch die Wahl

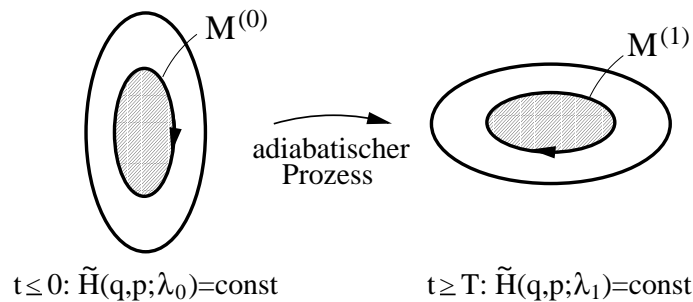
$$R_1(\varphi, J, \sigma) = -\omega(J, \sigma)^{-1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} (H_1(\psi, J, \sigma) - h_1(J, \sigma)) d\psi$$

wird K dann in die Form

$$K = TH_0(J, \sigma) + h_1(J, \sigma) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right)$$

gebracht. Es folgt $\dot{J} = \partial K / \partial \varphi = \mathcal{O}(1/T)$ und somit $J(\gamma_T(\sigma)) - J(\gamma_T(0)) \sim \mathcal{O}(1/T)$. Wegen $I - J \sim \mathcal{O}(1/T)$ ist der Satz damit bewiesen. ■

Die Aussage des Satzes wird am besten folgendermaßen verdeutlicht. Wir betrachten ein Hamiltonsches System mit 1 Freiheitsgrad und Hamilton-Funktion $H(q, p; \lambda)$. Für die Zeiten $t \leq 0$ und $t \geq T$ sei das System autonom mit den Parametern $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$ bzw. $\lambda = \lambda_1 = \text{const}$. Im Zeitintervall $0 \leq t \leq T$ (mit großem T) werde der Parameter λ adiabatisch von λ_0 nach λ_1 geändert. Für $t \leq 0$ und $t \geq T$ ist die Energie erhalten und die Phasenbahnen fallen mit den Niveaueurven der Energie zusammen. Wir fragen dann, auf welcher Energie-Niveaueurve $M^{(1)}$ das System für $t \geq T$ zu liegen kommt, wenn es sich für $t \leq 0$ auf $M^{(0)}$ befand? Nach Satz 5.1 lautet die Antwort, daß $M^{(1)}$ diejenige Energie-Niveaueurve ist, welche die gleiche Phasenfläche einschließt wie $M^{(0)}$.



Mitteilung: Satz 5.1 hat bei der Entwicklung der “alten Quantentheorie” (Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsregel) eine wichtige Rolle gespielt.

Beispiel: Der harmonische Oszillator $H = p^2/2m + m\omega^2 q^2/2$ hat bekanntlich die Wirkungsvariable $I = H/\omega$. Wird die Frequenz ω adiabatisch geändert, so bleibt nach Satz 5.1 das Verhältnis von Energie zu Frequenz konstant. Bei einer Halbierung der Frequenz halbiert sich also auch die Energie. Für ein Pendel der Länge l im Gravitationsfeld g gilt bei kleiner Schwingungsamplitude φ_{\max} die Relation $I = H/\omega = \frac{1}{2}mg^{1/2}l^{3/2}\varphi_{\max}^2$. In diesem Fall gilt im adiabatischen Limes $l^3\varphi_{\max}^4 = \text{const}$.

5.4 Integrable Systeme

Integrable Systeme zeichnen sich dadurch aus, daß genauso viele “unabhängige” Bewegungsintegrale wie Freiheitsgrade existieren. Die Bewegung solcher Systeme ist stabil, und das Langzeitverhalten der Dynamik präzise vorhersagbar. Obwohl Integrabilität eine Ausnahmeerscheinung ist, hat das Studium integrierbarer Systeme einen praktischen Nutzen. Viele nichtintegrierbare Systeme unterscheiden sich von einem integrable System nur durch eine “kleine” Störung und können daher ausgehend von diesem mit der Methode der kanonischen Störungsrechnung behandelt werden. Hierin besteht die Motivation für den nun folgenden längeren Abschnitt, in dem vor der genauen Definition und der Quadratur integrierbarer Systeme auch noch eine relevante mathematische Struktur symplektischer Mannigfaltigkeiten (nämlich die Lie–Algebra der Hamilton–Funktionen und der Hamiltonschen Vektorfelder) aufgedeckt werden soll.

Gegenstand unserer Betrachtungen sind ab jetzt autonome Hamiltonsche Systeme mit $f \geq 2$ Freiheitsgraden. Solche Systeme haben bekanntlich mindestens ein erstes Integral, nämlich die Hamilton–Funktion H . Es sei nun der Fall, daß neben H noch $(f - 1)$ weitere erste Integrale $\alpha_2, \dots, \alpha_f$ existieren, die voneinander und von H funktional unabhängig sind. Wir fragen, ob es möglich ist, $H \equiv \alpha_1$ und $\alpha_2, \dots, \alpha_f$ als einen Satz von kanonischen Impulsen zu interpretieren und zugehörige verallgemeinerte Ortskoordinaten β_1, \dots, β_f zu finden. Die Motivation für eine solche Fragestellung liegt auf der Hand: ist die Antwort positiv, so nehmen die Bewegungsgleichungen die maximal einfache Gestalt $\dot{\alpha}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, f$) und

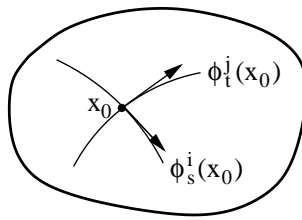
$$\dot{\beta}_1 = \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} = 1, \quad \dot{\beta}_k = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (k = 2, \dots, f) \quad (5.14)$$

an. Ihre Lösung kann sofort angegeben werden.

Zur partiellen Beantwortung der gestellten Frage tun wir so, als wären die Funktionen $\alpha_1, \dots, \alpha_f$ tatsächlich die kanonischen Impulse zu gewissen Ortskoordinaten β_1, \dots, β_f und sehen nach, welche Bedingungen sich hieraus ergeben. Aus Abschnitt 4.6 wissen wir, daß das Hamiltonsche Vektorfeld $Id\alpha_i$ Translationen in der zugehörigen (Orts–)Koordinatenfunktion β_i erzeugt. Wenn ϕ^i der Fluß von $Id\alpha_i$ und $x_0 \in M$ ein fest gewählter Punkt ist, dann bedeutet dies, daß die Integralkurve $s \mapsto \phi_s^i(x_0)$ eine Koordinatenlinie von β_i ist.

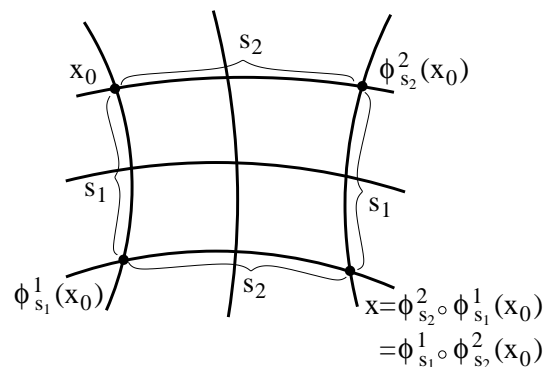
Aus der obigen Diskussion ergeben sich zwei Bedingungen:

1. Per Definition dessen, was man unter Koordinaten versteht, sind die Tangentenvektoren in jedem Punkt x eines Netzes von Koordinatenlinien linear unabhängig. Daher müssen die Vektorfelder $Id\alpha_1, \dots, Id\alpha_f$ in jedem Punkt x linear unabhängig



sein. Da I ein Isomorphismus ist, folgt die lineare Unabhängigkeit der Differentialformen $d\alpha_1, \dots, d\alpha_f$.

2. Per Definition des Begriffs lokaler Koordinaten wird durch das Netz der Koordinatenlinien jedem Punkt x in der Nähe eines Koordinatenursprungs x_0 ein Satz von reellen Zahlen (s_1, s_2, \dots, s_f) eindeutig zugeordnet. Diese Zahlen geben an, wieviele Schritte in jeder Koordinatenrichtung zurückzulegen sind, um vom Koordinatenursprung x_0 nach x zu gelangen. Da es auf die Reihenfolge der Ausführung der Schritte nicht ankommen darf, folgt $\phi_{s_i}^i \circ \phi_{s_j}^j(x_0) = \phi_{s_j}^j \circ \phi_{s_i}^i(x_0)$ ($i, j = 1, \dots, f$), die Flüsse ϕ^i müssen also paarweise vertauschen.



Um die zweite Bedingung in eine handliche Form zu bringen, holen wir etwas aus.

5.4.1 Die Lie–Algebra der Hamiltonschen Funktionen und der Hamiltonschen Vektorfelder

DEFINITION 5.2 Eine **Lie–Algebra** L ist ein Vektorraum, auf dem ein bilineares Produkt $L \times L \rightarrow L$; $A, B \mapsto [A, B]$ erklärt ist, mit den Eigenschaften:

- (i) $[A, B] = -[B, A]$ (Schiefsymmetrie),
- (ii) $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$ (Jacobi–Identität).

Ein solches Produkt heißt **Lie–Klammer**.

Beispiele:

- (1) Der orientierte Euklidische Vektorraum \mathbb{R}^3 mit dem Vektorprodukt \times als Lie-Klammer. Schiefsymmetrie folgt sofort aus der Definition des Vektorprodukts, und die Jacobi-Identität verifiziert man mit $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$.
- (2) Der lineare Raum aller reellen schiefsymmetrischen $n \times n$ -Matrizen mit dem Kommutatorprodukt $[A, B] = AB - BA$ als Lie-Klammer. Dieser Raum wird mit $\mathfrak{so}(n)$ bezeichnet. Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ ist isomorph zu (\mathbb{R}^3, \times) mittels $A = \sum_{k=1}^3 a_k J_k \mapsto a = (a_1, a_2, a_3)$.

SATZ 5.2 *Der lineare Raum der C^∞ -Funktionen auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit ist eine Lie-Algebra mit der Poisson-Klammer als Lie-Klammer.*

Beweis: Daß die Poisson-Klammer schiefsymmetrisch ist, wissen wir aus Abschnitt 4.8. Die Jacobi-Identität beweist man durch explizite Rechnung in kanonischen Koordinaten mit Hilfe der Formel

$$\{f, \bullet\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right).$$

KOROLLAR 5.2.1 (POISSONSCHES THEOREM) *Die Poisson-Klammer zweier erster Integrale f, g eines Hamiltonschen Flusses ϕ^H ist wieder ein erstes Integral.*

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} \circ \phi_t^H \Big|_{t=0} = \{\{f, g\}, H\} \stackrel{\text{Jacobi}}{=} \{\{f, H\}, g\} + \{f, \{g, H\}\} = 0.$$

Beispiel: Sind zwei Komponenten L_1, L_2 des Drehimpulses eines mechanischen Systems erhalten, so ist wegen $\{L_1, L_2\} = L_3$ nach dem Poissonschen Theorem auch die dritte Komponente erhalten. ■

Auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit existiert neben der Lie-Algebra der Funktionen noch eine weitere Lie-Algebra von Bedeutung für die klassische Mechanik, nämlich die Lie-Algebra der Hamiltonschen Vektorfelder. Wir werden sehen, daß die Definition der Lie-Klammer im zweiten Fall von der symplektischen Struktur keinen Gebrauch macht. Die Lie-Algebra der Vektorfelder existiert unter allgemeineren Voraussetzungen, nämlich auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Seien ϕ, ψ die Flüsse zweier Vektorfelder X, Y auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M der Dimension n :

$$X = \frac{d}{ds} \phi_s \Big|_{s=0}, \quad Y = \frac{d}{dt} \psi_t \Big|_{t=0}.$$

Solche Flüsse vertauschen im allgemeinen nicht:

$$\phi_s \circ \psi_t \neq \psi_t \circ \phi_s.$$

Ein Maß für die Nicht-Vertauschbarkeit an der Stelle $x \in M$ ist

$$\Delta(s, t; x) := (f \circ \psi_t \circ \phi_s - f \circ \phi_s \circ \psi_t)(x),$$

mit f irgendeiner differenzierbaren Funktion. Wir erinnern an die Definition der Lie-Ableitung von Funktionen:

$$L_X f := df(X) = \left. \frac{d}{ds} f \circ \phi_s \right|_{s=0}.$$

Bei der Anwendung des Differentialoperators L_X auf die Funktion f entsteht also wieder eine Funktion, nämlich das innere Produkt des Differentials df mit dem Vektorfeld X .

Hilfsatz 1:

$$\left. \frac{\partial^2 \Delta}{\partial s \partial t} \right|_{s=t=0} = L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} f \circ \phi_s(\psi_t(x)) \right|_{s=0} &= (L_X f)(\psi_t(x)), \\ \left. \frac{d}{dt} f \circ \psi_t(\phi_s(x)) \right|_{t=0} &= (L_Y f)(\phi_s(x)). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Delta}{\partial s \partial t}(s, t; x) \right|_{s=t=0} &= \left. \frac{d}{ds} (L_Y f) \circ \phi_s(x) \right|_{s=0} - \left. \frac{d}{dt} (L_X f) \circ \psi_t(x) \right|_{t=0} \\ &= (L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f))(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nun betrachte das Kommutatorprodukt $L_X L_Y - L_Y L_X$. Auf den ersten Blick ist es ein Differentialoperator **zweiten** Grades.

Hilfsatz 2: $L_X L_Y - L_Y L_X$ ist ein Differentialoperator ersten Grades.

Beweis: Es ist nicht ungeschickt und außerdem instruktiv, den Beweis in Koordinatendarstellung zu führen. Seien also dx^1, \dots, dx^n und $\partial_1, \dots, \partial_n$ zwei Basen von Koordinatenformen bzw. Vektorfeldern auf M , die zueinander dual sind; d.h. es gilt $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i$. Dann gehören zu den Vektorfeldern

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i \quad \text{und} \quad Y = \sum_{j=1}^n Y^j \partial_j$$

die Differentialoperatoren

$$L_X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{und} \quad L_Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Betrachte

$$\begin{aligned} (L_X L_Y - L_Y L_X)f &= \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \right) \\ &= \sum_{i,j} \left(X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f. \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen heben sich also weg, und wir haben

$$L_X L_Y - L_Y L_X = \sum_i \left(\sum_j X^j \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \right) - \sum_j Y^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \blacksquare$$

Da $L_X L_Y - L_Y L_X$ ein Differentialoperator ersten Grades ist, wird ihm durch

$$(L_X L_Y - L_Y L_X)f =: df(Z)$$

eindeutig ein Vektorfeld Z zugeordnet, das wir mit $Z =: [Y, X] = -[X, Y]$ bezeichnen und das Kommutatorprodukt nennen. In Koordinatendarstellung gilt

$$[X, Y] = \left[\sum_i X^i \partial_i, \sum_j Y^j \partial_j \right] = - \sum_{i,j=1}^n \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \partial_i.$$

Durch Nachrechnen der Jacobi-Identität sieht man:

SATZ 5.3 *Die Einführung des Produkts $X, Y \mapsto [X, Y]$ macht den linearen Raum der C^∞ -Vektorfelder zu einer Lie-Algebra.*

Bestandsaufnahme: Der Phasenraum M eines Hamiltonschen Systems hat eine symplektische Struktur. Auf M existieren zwei Lie-Algebren, die der Funktionen (mit der Poisson-Klammer als Lie-Klammer) und die der Vektorfelder (mit dem Kommutatorprodukt als Lie-Klammer). Nun wird durch den symplektischen Gradienten $f \mapsto Idf$ der Funktion f das Hamiltonsche Vektorfeld Idf zugeordnet, und es entsteht die Frage, wie sich diese Zuordnung mit den Lie-Klammern der zwei Lie-Algebren verträgt.

SATZ 5.4 *Seien $X = Idf$ und $Y = Idg$ zwei Hamiltonsche Vektorfelder auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit. Dann ist die Lie-Klammer $[X, Y]$ dieser Vektorfelder wieder Hamiltonsch und hat die Hamilton-Funktion $\{f, g\}$:*

$$\boxed{[Idf, Idg] = Id\{f, g\}}.$$

Der symplektische Gradient $I \circ d$ ist also ein Homomorphismus von Lie-Algebren.

Beweis: Sei h eine differenzierbare Funktion. Mit Hilfe von $L_X h = dh(X) = \omega(Idf, Idh) = \{h, f\}$ und analog $L_Y h = \{h, g\}$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} L_{[X,Y]} h &= L_Y L_X h - L_X L_Y h = \{L_X h, g\} - \{L_Y h, f\} \\ &= \{\{h, f\}, g\} - \{\{h, g\}, f\} \stackrel{\text{Jacobi}}{=} \{h, \{f, g\}\} = L_{Id\{f, g\}} h, \end{aligned}$$

woraus mit dem Isomorphismus $X \leftrightarrow L_X$ die Behauptung folgt.

KOROLLAR 5.4.1 *Die Hamiltonschen Vektorfelder auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit bilden eine Unteralgebra der Lie-Algebra aller Vektorfelder.*

Beweis: Satz 5.4 besagt, daß die Lie-Klammer zweier Hamiltonscher Vektorfelder wieder ein Hamiltonsches Vektorfeld ist. In der Lie-Algebra aller Vektorfelder bilden die Hamiltonschen Vektorfelder also einen linearen Unterraum, der unter dem durch die Lie-Klammer erklärten Produkt abgeschlossen ist. Einen solchen Unterraum nennt man auch eine Lie-Unteralgebra.

Beispiel: Klassischer Spin; $M = S^2$, und die symplektische Struktur ω ist das Negative der Raumwinkelform. In sphärischen Polarkoordinaten θ, ϕ haben wir $\omega = -\sin\theta d\theta \wedge d\phi$, und die Spinkomponenten werden durch die Funktionen

$$\sigma_1 = \sin\theta \cos\phi, \quad \sigma_2 = \sin\theta \sin\phi, \quad \sigma_3 = \cos\theta$$

ausgedrückt. Wie man mit

$$\{f, g\} = \frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial\theta} \frac{\partial g}{\partial\phi} - \frac{\partial g}{\partial\theta} \frac{\partial f}{\partial\phi} \right)$$

leicht nachprüft, sind die Poisson-Klammern dieselben wie für einen Drehimpuls: $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k$. Für die den Hamiltonschen Vektorfeldern $Id\sigma_k$ ($k = 1, 2, 3$) zugeordneten Differentialoperatoren schreiben wir kurz $\mathcal{L}_k := L_{Id\sigma_k}$. Die expliziten Ausdrücke sind:

$$\mathcal{L}_1 = -\cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} - \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \mathcal{L}_2 = -\cot\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} + \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \mathcal{L}_3 = \frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Hiermit findet man nach kurzer Rechnung: $\mathcal{L}_j \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_i \mathcal{L}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \mathcal{L}_k$, in Übereinstimmung mit dem Ergebnis für die Poisson-Klammern der σ_k und Satz 5.4.

SATZ 5.5 *Die Flüsse zweier Hamiltonscher Vektorfelder Idf und Idg vertauschen genau dann, wenn die Poisson-Klammer $\{f, g\}$ lokal konstant ist.*

Bemerkung: Dies ist nun endlich das handliche Kriterium, das abzuleiten war.

Beweis des Satzes: Sei ϕ der Fluß von $X = Idf$ und ψ der Fluß von $Y = Idg$.

1. (\Rightarrow) Wir gehen aus von $\phi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_s$:

$$0 = \frac{d^2}{dsdt} (h \circ \psi_t \circ \phi_s - h \circ \phi_s \circ \psi_t) \Big|_{s=t=0} \stackrel{\text{Hilfssatz 1}}{=} L_X L_Y h - L_Y L_X h = L_{[Y, X]} h.$$

Es folgt $[X, Y] = 0$ und deshalb $d\{f, g\} = [X, Y] = 0$ nach Satz 5.4.

2. (\Leftarrow) Für den Umkehrschluß verweisen wir auf das Buch von Arnold.

Beispiel: Seien $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ ein Satz kanonischer Koordinaten auf dem Phasenraum M . Alle fundamentalen Poisson-Klammern sind lokal konstant:

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, f).$$

Nach Satz 5.5 vertauschen daher die Flüsse der Vektorfelder

$$X_i = +Idp_i, \quad Y_j = -Idq_j \quad (i, j = 1, \dots, f)$$

paarweise, was notwendige Voraussetzung für den Umstand ist, daß die Integralkurven dieser Vektorfelder mit den Koordinatenlinien von $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ übereinstimmen.

5.4.2 Definition integrierbarer Systeme

Wir greifen die zu Beginn des Abschnitts formulierte Problemstellung wieder auf: unter welchen Umständen können wir einen Satz $\alpha_1 \equiv H, \alpha_2, \dots, \alpha_f$ von ersten Integralen eines autonomen Hamiltonschen Systems als kanonische Impulse auffassen und zugehörige (lokale) Ortskoordinaten β_1, \dots, β_f finden? Wir hatten hierfür zwei notwendige Bedingungen hergeleitet.

Die erste Bedingung, nämlich die lineare Unabhängigkeit der Differentialformen $d\alpha_1, \dots, d\alpha_f$ ist nun leider zu stark, als daß sie sich auf dem gesamten Phasenraum realisieren ließe. Zum Beispiel verschwindet für jede Gleichgewichtslage x die Linearform $(dH)_x = (d\alpha_1)_x$, weshalb $(d\alpha_1)_x, \dots, (d\alpha_f)_x$ linear abhängig sind. Wir schwächen die Bedingung deshalb ab und verlangen die lineare Unabhängigkeit von $d\alpha_1, \dots, d\alpha_f$ lediglich auf einem $2f$ -dimensionalen **Teilgebiet** $U \subset M$. Dieses Gebiet U wählen wir so, daß es unter den von den Hamiltonschen Vektorfeldern $Id\alpha_i$ erzeugten Einparametergruppen $(\phi_s^i)_{s \in \mathbb{R}}$ abgeschlossen ist: $\phi_s^i(U) = U$ ($i = 1, \dots, f$). Diese Forderung garantiert, daß die Koordinatenlinien der (erst noch zu konstruierenden) Orts-Koordinatenfunktionen β_1, \dots, β_f ganz in U enthalten sind.

Die zweite Bedingung, nämlich die Vertauschbarkeit der Flüsse $(\phi_s^i \circ \phi_t^j = \phi_t^j \circ \phi_s^i)$, wird durch Satz 5.5 in die paarweise Konstanz der Poisson-Klammern umformuliert: $\{\alpha_i, \alpha_j\} = \text{const}$ für $i, j = 1, \dots, f$. Da für einen Satz kanonischer Impulse die Poisson-Klammern paarweise verschwinden (siehe Satz 4.12), verschärfen wir diese Bedingung zu $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$.

Insgesamt ist nun die folgende Definition integrierbarer Systeme bestens motiviert:

DEFINITION 5.3 *Eine Gesamtheit $(M, \omega; \alpha_1, \dots, \alpha_f; U)$, bestehend aus einem autonomen Hamiltonschen System $(M, \omega, \alpha_1 \equiv H)$ mit f Freiheitsgraden, einem $2f$ -*

dimensionalen offenen Gebiet $U \subset M$ und f ersten Integralen $\alpha_1, \dots, \alpha_f$ heißt ein **integrables System**, wenn gilt:

- (i) U ist unter den Flüssen der Vektorfelder $Id\alpha_i$ ($i = 1, \dots, f$) invariant.
- (ii) Die Linearformen $(d\alpha_1)_x, \dots, (d\alpha_f)_x$ sind für alle $x \in U$ linear unabhängig.
- (iii) $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$ für alle $i, j = 1, \dots, f$.

Beispiele:

- (1) Das Teilchen im \mathbb{R}^3 im Zentralpotential: $H = |p|^2/2m + V(|q|)$. Wir setzen $\alpha_1 = H$, $\alpha_2 = L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ und $\alpha_3 = L_3$. Nach dem Gesetz der Drehimpulserhaltung in Verbindung mit dem Noether–Theorem verschwinden die Poisson–Klammern $\{L_3, H\}$ und $\{L^2, H\}$. Da L^2 unter Drehungen um die 3–Achse invariant ist, verschwindet zudem $\{L^2, L_3\}$. Damit ist die Bedingung (iii) von Definition 5.3 erfüllt. Zur Untersuchung der linearen Unabhängigkeit der Differentiale dH, dL^2, dL_3 verwenden wir die üblichen Kugelkoordinaten r, θ, ϕ mit kanonischen Impulsen p_r, p_θ, p_ϕ . Wir definieren U_1 und U_2 als die Lösungsmengen (im Phasenraum \mathbb{R}^6) der Gleichungen $p_r = 0 = V'(r) - L^2/mr^3$ bzw. $L_1 = L_2 = 0$. Unter Verwendung von $L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1 = p_\phi$, $L^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2/\sin^2 \theta$ und $H = p_r^2/2m + L^2/2mr^2 + V(r)$ läßt sich dann zeigen, daß die Bedingung (ii) von Definition 5.3 auf dem Gebiet $U := \mathbb{R}^6 \setminus (U_1 \cup U_2)$ erfüllt ist. Die Gesamtheit $(\mathbb{R}^6, \sum dp_k \wedge dq_k, H, L^2, L_3; U)$ ist also ein integrables System.

- (2) Das Zweikörperproblem im \mathbb{R}^3 mit Zentralkräften:

$$H = \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{2m_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|^2}{2m_2} + V(|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|).$$

Der Phasenraum ist hier 12–dimensional, und für Integrabilität sind 6 erste Integrale notwendig. Wir führen Separation in Schwerpunkt– und Relativkoordinaten durch:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2), & q &= \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \\ P &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, & p &= \frac{1}{m_1 + m_2} (m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Diese Transformation ist kanonisch, wie man leicht nachprüft. Nach Einführung der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ und der reduzierten Masse $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ zerlegen wir Drehimpuls und Energie in ihre Schwerpunkt– und Rela-

tivanteile:

$$\begin{aligned} L &= L_t + L_r, & H &= H_t + H_r, \\ H_t &= \frac{|P|^2}{2M}, & H_r &= \frac{|p|^2}{2\mu} + V(|q|). \end{aligned}$$

Die kartesischen Komponenten des Gesamtimpulses P_x, P_y, P_z bilden zusammen mit den Funktionen $H_r, L_r^2, L_{r,z}$ einen Satz von 6 ersten Integralen, deren Poisson-Klammern paarweise verschwinden. Die Diskussion der linearen Unabhängigkeit ihrer Differentiale führt man ähnlich wie in Beispiel (1), mit dem Ergebnis, daß das Zweikörper-Problem auf einer geeignet gewählten offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^{12}$ integrabel ist im Sinne von Definition 5.3.

- (3) Der schwere symmetrische Kreisel mit Fixpunkt auf der Symmetrieachse. Die Dimension des Phasenraumes $M = \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ ist in diesem Fall gleich 6. Einen Satz von ersten Integralen, für den auf einem geeignet gewählten Teilgebiet $U \subset M$ die Bedingungen von Definition 5.3 erfüllt sind, bilden hier H, L_3, M_3 , wobei L_3 und M_3 die Projektionen des Drehimpulses auf die Symmetrieachse des Schwerfeldes bzw. auf die Symmetrieachse des Kreisels sind.

Mitteilung: Das N -Körper-Problem mit Zentralkräften ist für $N \geq 3$ im allgemeinen – wenn nicht zusätzlich zur Galilei-Invarianz weitere Symmetrien vorliegen, was z.B. für das Oszillatorpotential $V(x) = x^2$ der Fall ist – **nicht** integrabel, denn i.a. existieren nur die für $N = 2$ angegebenen ersten Integrale, während für die Integrabilität $3N > 6$ erforderlich wären.

5.4.3 Quadratur integrierbarer Systeme

Wir werden die zu Anfang dieses Abschnitts gestellte Frage nach der Existenz geeigneter Ortskoordinaten β_1, \dots, β_f für ein integrables System mit f Freiheitsgraden jetzt konstruktiv beantworten. Als Vorbereitung benötigen wir:

DEFINITION 5.4 Sei $\Omega \in \text{Alt}^2(\mathbb{R}^{2f})$ eine symplektische Form. Ein linearer Unterraum $N \subset \mathbb{R}^{2f}$ heißt ein **Nullraum** von Ω , wenn gilt: $\Omega(u, v) = 0$ für alle $u, v \in N$. Ein Nullraum N der maximalen Dimension f heißt ein **Lagrange-Raum** von Ω .

Wir betrachten nun ein integrables System $(M, \omega; \alpha_1, \dots, \alpha_f; U)$ und assoziieren mit einem Punkt $a = (a_1, \dots, a_f) \in \mathbb{R}^f$ die Niveaumenge

$$M_a := \left\{ x \in U \mid \alpha_1(x) = a_1, \dots, \alpha_f(x) = a_f \right\}. \quad (5.16)$$

a sei so gewählt, daß M_a nichtleer ist. Per Voraussetzung sind die Differentialformen $d\alpha_1, \dots, d\alpha_f$ in jedem Punkt von M_a linear unabhängig. Deshalb ist M_a nach dem

Hauptsatz über implizit definierte Funktionen eine f -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $2f$ -dimensionalen Phasenraumes.

Den Tangentialraum von M_a im Punkt $x \in M_a$ bezeichnen wir mit $T_x M_a$. Sei $\omega : x \mapsto \omega_x$ die symplektische Struktur.

Hilfsatz 1: $T_x M_a$ ist ein Lagrange-Raum von ω_x für alle $x \in M_a$.

Beweis: Betrachte die Ableitung der Funktion α_i in Richtung des Hamiltonschen Vektorfeldes $Id\alpha_j$ ($i, j = 1, \dots, f$):

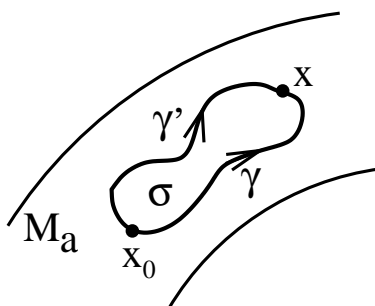
$$L_{Id\alpha_j} \alpha_i = d\alpha_i(Id\alpha_j) = \omega(Id\alpha_j, Id\alpha_i) = \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0.$$

Für den von den Vektoren $(Id\alpha_1)(x), \dots, (Id\alpha_f)(x)$ im Punkt $x \in M_a$ aufgespannten linearen Raum V folgt hieraus erstens, daß V ein Nullraum von ω_x ist, und zweitens, daß die Elemente von V Tangentialvektoren von M_a im Punkt x sind, also $V \subset T_x M_a$. Da die Vektoren $(Id\alpha_1)(x), \dots, (Id\alpha_f)(x)$ als linear unabhängig vorausgesetzt werden, hat V die maximale Dimension: $\dim V = f$, und V ist ein Lagrange-Raum von ω_x . Wegen $\dim T_x M_a = f$ ist V mit $T_x M_a$ identisch. ■

Seien nun $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ ein Satz kanonischer Koordinaten auf U , also $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$. Wir schreiben kurz $\mathbf{pdq} = \sum_k p_k dq_k$.

Hilfsatz 2: Das Kurvenintegral von \mathbf{pdq} ist auf M_a wegunabhängig, d.h. sind γ und γ' zwei Kurven auf M_a , die gleiche Anfangs- und Endpunkte haben und stetig ineinander überführt werden können, so gilt $\int_{\gamma'} \mathbf{pdq} = \int_{\gamma} \mathbf{pdq}$.

Beweis: Sei σ ein orientiertes Flächenstück auf M_a mit Rand $\partial\sigma = \gamma - \gamma'$. Dann folgt mit dem Allgemeinen Satz von Stokes $\int_{\gamma'} \mathbf{pdq} - \int_{\gamma} \mathbf{pdq} = \int_{\sigma} d(\mathbf{pdq}) = \int_{\sigma} \omega = 0$, wobei das letzte Gleichheitszeichen eine Konsequenz von Hilfsatz 1 ist.



SATZ 5.6 Für ein integrables System $(M, \omega; \alpha_1, \dots, \alpha_f; U)$ existiert auf U ein Satz lokaler Koordinaten β_1, \dots, β_f mit $\omega = \sum_{k=1}^f d\alpha_k \wedge d\beta_k$.

Beweis: Wir gehen ähnlich vor wie bei der Konstruktion von Winkel- und Wirkungsvariablen im eindimensionalen Fall $f = 1$. Durch Variieren der Parameter

$a = (a_1, \dots, a_f)$ erhalten wir mittels Gleichung (5.16) eine f -dimensionale Schar von Untermannigfaltigkeiten $M_a \subset U$. Sei ρ irgendeine f -dimensionale Fläche, die jedes M_a dieser Schar in genau einem Punkt schneidet. Für einen vorgegebenen Punkt $x \in U$ sei M_a diejenige Untermannigfaltigkeit, die x enthält, und $\gamma_{x_0, x}$ ein Weg von $x_0 = \rho \cap M_a$ nach x , der ganz in M_a verläuft. Nach Hilfsatz 2 bleibt das Kurvenintegral von $\mathbf{p}d\mathbf{q}$ unter stetigen Deformationen des Integrationsweges ungeändert. Deshalb wird durch

$$S(x) := \int_{\gamma_{x_0, x}} \mathbf{p}d\mathbf{q},$$

lokal eine Funktion S definiert. Wir benützen $S \equiv S_2(q_1, \dots, q_f; \alpha_1, \dots, \alpha_f)$ als erzeugende Funktion vom Typ 2:

$$p_k = \left. \frac{\partial S}{\partial q_k} \right|_{\alpha = \text{const}} \quad \text{und} \quad \beta_k := \left. \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \right|_{q = \text{const}} \quad (5.17)$$

für $k = 1, \dots, f$. Durch geeignete Wahl von $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ – wobei gegebenenfalls kanonische Transformationen $q_k, p_k \mapsto -p_k, q_k$ auszuführen sind – läßt sich immer erreichen, daß die Hessesche Matrix $(\partial^2 S / \partial q_k \partial \alpha_l)$ nichtsingulär ist. Nach Satz 4.20 (oder vielmehr dessen multidimensionaler Verallgemeinerung) wird dann durch die Gleichungen (5.17) lokal eine kanonische Transformation bestimmt, die q_k, p_k in α_k, β_k ($k = 1, \dots, f$) überführt.

KOROLLAR 5.6.1 *Die Bewegungsgleichungen eines integrablen Systems sind exakt lösbar durch Quadratur.*

Beweis: Wir fassen die zur Konstruktion von β_1, \dots, β_f notwendigen Schritte noch einmal zusammen. Dazu nehmen wir an, daß uns die Funktionen $\alpha_1, \dots, \alpha_f$ als Funktionen $P_1(q, p), \dots, P_f(q, p)$ von $q = (q_1, \dots, q_f)$ und $p = (p_1, \dots, p_f)$ gegeben sind.

1. Im ersten Schritt werden die Gleichungen $\alpha_i = P_i(q, p)$ nach p_j aufgelöst:

$$p_j = F_j(q, \alpha) \quad (j = 1, \dots, f).$$

2. Mit dem Ergebnis von 1. berechnet man dann das unbestimmte Integral

$$S = \int \mathbf{p}d\mathbf{q} \Big|_{\alpha = \text{const}} = \int \sum_j F_j(q, \alpha) dq_j =: S_2(q, \alpha).$$

3. Schließlich gewinnt man $\beta_i := Q_i(q, p) := (\partial S_2 / \partial \alpha_i)(q, P(q, p))$ durch Differenzieren und Einsetzen von $\alpha_i = P_i(q, p)$.

Wie man sieht, ist nur Auflösen von Gleichungen, Berechnung von Integralen und Differenzieren gefordert. Die Bewegungsgleichungen in den Koordinaten $\beta_1, \dots, \beta_f, \alpha_1, \dots, \alpha_f$ sind von der kanonischen Form und haben trivialerweise die Lösung

$$\beta_1(\gamma(t)) = t + \beta_1(\gamma(0)), \quad \beta_2(\gamma(t)) = \beta_2(\gamma(0)), \dots, \quad \alpha_f(\gamma(t)) = \alpha_f(\gamma(0)).$$

5.4.4 Einführung von Winkel- und Wirkungsvariablen

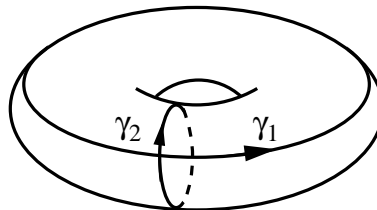
Das in Teilabschnitt 5.4.3 beschriebene Verfahren zur Quadratur integrierbarer Systeme erfordert die Berechnung eines unbestimmten mehrdimensionalen Integrals. Unter den Voraussetzungen des nachfolgenden Satzes läßt sich das Verfahren durch ein noch einfacheres ersetzen.

SATZ 5.7 *Gegeben sei ein integrables System $(M, \omega; \alpha_1, \dots, \alpha_f; U)$. Betrachte für $a = (a_1, \dots, a_f)$ die Niveaumenge*

$$M_a := \left\{ x \in U \mid \alpha_1(x) = a_1, \dots, \alpha_f(x) = a_f \right\}.$$

Wenn M_a nichtleer, kompakt und zusammenhängend ist, dann ist M_a diffeomorph zum f -dimensionalen Torus $T^f = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ (f Faktoren).

Beweis: Siehe Arnold.



Zweidimensionaler Torus $S^1 \times S^1$.

Da die Mannigfaltigkeit $M_a \simeq T^f$ unter dem Phasenfluß des integrablen Systems invariant ist, heißt sie auch ein **invarianter Torus**.

Satz 5.7 gestattet unter den angegebenen Voraussetzungen die Einführung von Winkel- und Wirkungsvariablen $\theta_1, \dots, \theta_f; I_1, \dots, I_f$ auf U analog zum Fall $f = 1$. Dazu wählt man – siehe die Zeichnung – eine Basis von Zyklen $\gamma_1, \dots, \gamma_f$ auf dem f -dimensionalen Torus M_a und definiert

$$I_k := \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_k} \mathbf{p} d\mathbf{q}.$$

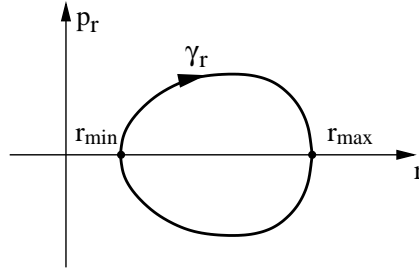
Wie im Beweis von Hilfsatz 2 zeigt man, daß I_k unter stetigen Deformationen von γ_k ungeändert bleibt. Die zugehörigen Winkel $\theta_1, \dots, \theta_f$ werden wieder über eine erzeugende Funktion $S = \int \mathbf{p} d\mathbf{q}$ definiert.

Beispiel: Teilchen im \mathbb{R}^3 im Zentralpotential, $H = |p|^2/2m + U(|q|)$. Die Ausdrücke für H, L^2, L_3 in Kugelkoordinaten r, θ, ϕ sind bekanntlich:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r),$$

$$L^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}, \quad L_3 = p_\phi.$$

Wir wählen Energie und Drehimpuls so, daß die für das vorgegebene Potential $U(r)$ durch $H = \text{const}$, $L^2 = \text{const}$, $L_3 = \text{const}$ bestimmte dreidimensionale Untermannigfaltigkeit des Phasenraums $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ kompakt und zusammenhängend ist. Dazu muß gegebenenfalls aus mehreren Zusammenhangskomponenten eine einzelne ausgewählt werden. Nach Satz 5.7 ist eine solche Untermannigfaltigkeit diffeomorph zum Torus $S^1 \times S^1 \times S^1$. Der im allgemeinen nichtleere Durchschnitt dieses invarianten Torus mit jeder der Ebenen (r, p_r) , (θ, p_θ) , (ϕ, p_ϕ) ist eine geschlossene Kurve, die wir mit γ_r bzw. γ_θ bzw. γ_ϕ bezeichnen.



Durchschnitt des invarianten Torus $S^1 \times S^1 \times S^1$ mit der (r, p_r) -Ebene.

Die Wirkungsvariablen I_r, I_θ, I_ϕ sind dann:

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \left(2m(H - U(r)) - \frac{L^2}{r^2} \right)^{1/2} dr,$$

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_\theta} p_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint \left(L^2 - \frac{L_3^2}{\sin^2 \theta} \right)^{1/2} d\theta = L - L_3,$$

$$I_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_\phi} p_\phi d\phi = \frac{L_3}{2\pi} \oint d\phi = L_3.$$

Für das Kepler-Problem $U(r) = -k/r$, mit $k > 0$ und $E < 0$, läßt sich das bestimmte Integral für I_r mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes in geschlossener Form berechnen:

$$I_r = \frac{mk}{(-2mH)^{1/2}} - L.$$

Im diesem Fall sind die Frequenzen $\omega_k = \partial H / \partial I_k$ entartet,

$$\omega_r = \omega_\theta = \omega_\phi = \frac{mk^2}{(I_r + I_\theta + I_\phi)^3},$$

was die bekannte Konsequenz hat, daß alle Phasenbahnen periodisch sind.

5.5 KAM-Theorem

Das in der Überschrift angekündigte Theorem von Kolmogorov, Arnold und Moser ist ein zentraler Stützpfiler der Theorie Hamiltonscher Systeme in der Nähe von Integrabilität. Wir werden das KAM-Theorem im folgenden motivieren und eine Version davon präzise formulieren, aber den recht umfangreichen Beweis unterdrücken.

Das KAM-Theorem macht eine Aussage über die Stabilität der Dynamik jener Hamiltonscher Systeme, die von einem integrablen System nur wenig verschieden sind. Für die Behandlung solcher Systeme bietet sich eine Variante der kanonischen Störungsrechnung an, die wir in Abschnitt 5.2 kennengelernt haben. Wir beschreiben das Verfahren kurz in niedrigster Ordnung.

Gegeben sei ein integrables System, dessen Bewegung wir als gebunden voraussetzen, mit Wirkungsvariablen $I = (I_1, \dots, I_f)$, Winkelvariablen $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_f)$ und Hamilton-Funktion $H_0(I)$. Die Hamilton-Funktion des gestörten Systems sei

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(\theta, I) .$$

Im ungestörten System ($\varepsilon = 0$) verlaufen die Phasenbahnen auf invarianten Tori T_ι ,

$$T_\iota = \{x \in M \mid I_1(x) = \iota_1, \dots, I_f(x) = \iota_f\} ,$$

wobei die Werte $(\iota_1, \dots, \iota_f)$ der Wirkungsvariablen durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Die Werte der Winkelvariablen θ_k wachsen linear in der Zeit mit Frequenzen $\omega_k(I) = \partial H_0(I) / \partial I_k$.

Ziel der Störungsrechnung ist die Konstruktion einer kanonischen Koordinatentransformation von θ, I zu $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_f)$ und $J = (J_1, \dots, J_f)$, welche die Abhängigkeit der Hamilton-Funktion von den Winkelvariablen beseitigt. Das entspricht dem Versuch, die invarianten Tori des integrablen Systems mit Hamilton-Funktion H_0 zu invarianten Tori des gestörten Systems mit Hamilton-Funktion $H_0 + \varepsilon H_1$ fortzusetzen. Um die Koordinatentransformation zu konstruieren, setzt man eine erzeugende Funktion vom Typ 2 an:

$$S = \langle J, \theta \rangle + \varepsilon S^{(1)}(\theta, J) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

mit $\langle J, \theta \rangle := \sum_{k=1}^f J_k \theta_k$. Der Zusammenhang zwischen alten und neuen Koordinaten ist wie immer durch $I_k = \partial S / \partial \theta_k$ und $\varphi_k = \partial S / \partial J_k$ ($k = 1, \dots, f$) gegeben.

Wie man durch Einsetzen leicht nachrechnet, wird das Ziel durch die Wahl

$$S^{(1)}(\theta, J) = - \sum_{m \in \mathbb{Z}^f \setminus \{0\}} \frac{h_m(J)}{i \langle m, \omega(J) \rangle} e^{i \langle m, \theta \rangle},$$

wobei $h_m(I)$ die Fourier-Koeffizienten der Störung $H_1(\theta, I)$ sind, bis zur ersten Ordnung im Störparameter ε formal erreicht. Tatsächlich hängt die in den neuen Koordinaten ausgedrückte Hamilton-Funktion bis zur 1. Ordnung in ε nicht von den Winkeln ab:

$$H = H_0(J) + \varepsilon h_0(J) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Wie in Abschnitt 5.2 geht auch hier in führender Ordnung von ε nur die über den invarianten Torus gemittelte Störung $h_0(I) = \langle H_1(\theta, I) \rangle$ ein.

Allerdings versagt das Verfahren für Tori mit der Eigenschaft, daß der Nenner $\langle m, \omega(I) \rangle$ für irgendein $m \in \mathbb{Z}^f \setminus \{0\}$ verschwindet, denn dann tritt ja Division durch Null auf und der Ausdruck für $S^{(1)}$ ist gar nicht definiert. Solche Tori heißen “resonant”. Wir werden später sehen, daß die Bewegung in der Nähe eines resonanten Torus nach Anschalten der Störung “chaotisch” sein kann. Demnach ist das Divergieren von $S^{(1)}$ für resonante Tori ein fundamentales Hindernis und nicht etwa nur ein mathematisches Artefakt, das durch intelligentes Vorgehen beseitigt werden könnte. Es wird sich herausstellen, daß die Struktur des Phasenflusses in der Nähe eines resonanten Torus schon durch beliebig kleine Störungen qualitativ geändert wird und die Störungsrechnung deshalb zum Scheitern verurteilt ist.

Es bleibt die Möglichkeit offen, daß die Situation besser sein könnte für nichtresonante Tori, wo die Frequenzen inkommensurabel sind, d.h. $\langle m, \omega(I) \rangle$ für kein $m \in \mathbb{Z}^f \setminus \{0\}$ verschwindet. In der Tat kann man zeigen, daß die Fourier-Reihe für $S^{(1)}$ konvergiert, falls ω in einem gewissen (in den Voraussetzungen des KAM-Theorems näher beschriebenen) Sinn “genügend irrational” ist. Mit der Konvergenz der Fourier-Reihen für $S^{(1)}$ und alle höheren Koeffizienten $S^{(n)}$ ist es jedoch noch nicht getan, denn es verbleibt die nicht unbegründete Gefahr, daß die Störungsrechnung bis zu unendlicher Ordnung, also die Gesamtsumme $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n S^{(n)}$, divergiert. Poincaré (1889) bewies eine allgemeine Aussage, die diese Gefahr signalisierte und eine pessimistische Erwartung für das Gelingen der Störungsrechnung nach sich zog. Aus heutiger Sicht hatte die Schwierigkeit ihren tieferen Grund in der Tatsache, daß man für festgehaltene Anfangsbedingungen die Frequenzen der gestörten Bewegung als Potenzreihe in ε zu berechnen versuchte. Da die resonanten Tori dicht im Phasenraum liegen, gibt es in jeder beliebig kleinen Umgebung eines irrationalen Torus immer resonante Tori, und dieser Umstand wirkt sich ungünstig auf das

Konvergenzverhalten der Störungsentwicklung aus.

Der entscheidende Durchbruch wurde schließlich in den 1960er Jahren mit den Arbeiten von Kolmogorov, Arnold und Moser erzielt: es gelang, die Störungsentwicklung für genügend irrationale Tori dergestalt umzuformulieren, daß eine Reihe mit *endlichem* (wenn auch unbekanntem) Konvergenzradius entstand. Kolmogorovs Strategie unterschied sich von früheren in zwei wesentlichen Punkten:

- Durch Variieren der Anfangsbedingungen suchte er nach einem gestörten invarianten Torus mit *denselben* Frequenzen wie der ungestörte Torus.
- Er benutzte ein Verfahren mit beschleunigtem (nämlich quadratischem) Konvergenzverhalten.

Harte Beweisarbeit seines Schülers Arnold ergab im Jahre 1963 folgendes Resultat:

SATZ 5.8 (KAM-THEOREM) *Für ein integrables System mit f Freiheitsgraden, Hamilton-Funktion H_0 und Frequenzen $\omega_k = \partial H_0 / \partial I_k$ sei $M_I(0)$ ein invarianter Torus, auf dem die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Die Hesse-Matrix von H_0 ist nichtsingulär: $\det(\partial^2 H_0 / \partial I_k \partial I_l) \neq 0$.*
2. *Es existieren positive Konstanten $\kappa \geq f - 1$ und γ , so daß für alle $m = (m_1, \dots, m_f) \in \mathbb{Z}^f \setminus \{0\}$ gilt: $|\sum_{k=1}^f m_k \omega_k| \geq \gamma \|m\|^{-\kappa}$.*

Ferner sei H_1 eine C^∞ -Funktion. Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ läßt sich dann $M_I(0)$ in eine zu T^f diffeomorphe Mannigfaltigkeit $M_I(\varepsilon)$ fortsetzen, die unter dem Phasenfluß des Systems mit Hamilton-Funktion $H = H_0 + \varepsilon H_1$ invariant ist.

Populär ausgedrückt besagt das KAM-Theorem folgendes: “Falls ein ungestörtes System nichtentartet ist, dann werden für genügend kleine autonome Hamiltonsche Störungen die meisten nichtresonanten Tori lediglich leicht deformiert, so daß auch im Phasenraum des gestörten Systems invariante Tori existieren, welche von den Phasenbahnen dicht und quasiperiodisch umspunnen werden, wobei die Frequenzen rational unabhängig sind. Diese invarianten Tori bilden die Mehrheit in dem Sinne, daß das Maß des Komplements ihrer Vereinigung klein ist, wenn die Störung schwach ist” (Zitat aus Arnold, *Mathematical Methods...*, Appendix 8B).

Wir beschließen die Diskussion mit ein paar Mitteilungen. Obschon das KAM-Theorem im Prinzip als großer Triumph der analytischen Mechanik zu werten ist, wird seine Anwendbarkeit auf konkrete Problemstellungen durch die indirekte Beweisführung kompromittiert. Der Beweis besteht im wesentlichen aus einem Algorithmus, der zu einer qualitativen Aussage führt. Er liefert keine Methode, die

den Gültigkeitsbereich des Theorems in ε zu berechnen gestattet. Außerdem ist in der Regel nicht entscheidbar, ob eine fest vorgegebene Anfangsbedingung für endliches ε auf einem KAM-Torus liegt oder nicht, denn die Beweisstrategie erfordert ja gerade, daß man mit wachsendem ε die Anfangsbedingung abändert, um die Frequenzen nichtresonant zu halten. Aus diesen Gründen bleibt z.B. die Frage nach der Langzeit-Stabilität des Sonnensystems, eine der Hauptmotivationen für die Entwicklung der KAM-Theorie, unbeantwortet.

5.6 Poincaré–Abbildung

Im nächsten Abschnitt werden wir uns der Frage zuwenden, was bei der Störung eines integrablen Systems mit den resonanten Tori geschieht. Für diesen Zweck benötigen wir als diagnostisches Hilfsmittel die sogenannte Poincaré–Abbildung, die wir im folgenden einführen.

Die Stabilität einer Phasenbahn kann ermittelt werden, ohne ihre Zeitentwicklung kontinuierlich zu verfolgen. Es reicht, den Zustand der Phasenbahn zu einer diskreten Abfolge von (ins Unendliche reichenden) Zeitpunkten festzustellen, was ökonomisch und außerdem darstellungstechnisch bequem ist. Bei einer Poincaré–Abbildung besteht die Idee darin, nur die Kreuzungspunkte der Phasenbahnen mit einer geeignet gewählten Untermannigfaltigkeit des Phasenraums zu registrieren. Gegeben sei ein autonomes Hamiltonsches System (M, Ω, H) mit f Freiheitsgraden und Energieschale

$$\Gamma_E = \{x \in M \mid H(x) = E\} .$$

Unten werden wir zum Fall $f = 2$ spezialisieren, aber fürs erste halten wir die Diskussion allgemein. Die Energieschale sei eine kompakte und zusammenhängende Mannigfaltigkeit ohne kritische Punkte von H . Weiter sei $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und $D \neq \emptyset$ der Durchschnitt von Γ_E mit der Niveau-Menge von F zum Wert Null:

$$D := \{x \in \Gamma_E \mid F(x) = 0\} .$$

Wir verlangen von F , daß die Poisson-Klammer $\{F, H\}$ nirgendwo auf D verschwindet. Äquivalent hierzu ist die Bedingung $(dF)_a(X_H(a)) \neq 0$ für alle $a \in D$, wobei $X_H = IdH$ wie üblich das Hamiltonsche Vektorfeld zur Hamilton-Funktion H bezeichnet. Wir nennen D in diesem Fall **transversal** zum Phasenfluß. Die Transversalität garantiert, daß die Schnittmenge von D mit einer Phasenbahn des Hamil-

tonschen Systems aus isolierten Punkten besteht. D heißt ein Poincaré-Querschnitt (engl. Poincaré surface of section) des Phasenflusses.

Jede von D ausgehende Phasenbahn kehrt immer wieder nach D zurück. Diese Tatsache folgt aufgrund der Kompaktheit der Energieschale Γ_E mit einem ähnlichen Argument wie es im Beweis des Poincaréschen Wiederkehrsatzes verwendet wurde. Damit können wir über den Phasenfluß ϕ jedem Punkt $a \in D$ in eindeutiger Weise eine Zeit $T(a)$ durch die Forderung

$$F(\phi_{T(a)}) = 0, \quad \text{und} \quad F(\phi_t(a)) \neq 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < T(a)$$

zuordnen. $T(a)$ ist also die Zeit, zu der die zur Zeit Null von a ausgehende Phasenbahn erstmals nach D zurückkehrt. Wegen der Differenzierbarkeit von F und der Transversalität von D zum Phasenfluß ist $T : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

DEFINITION 5.5 *Unter dem zum Phasenfluß ϕ und der transversalen Untermannigfaltigkeit D assoziierten Poincaré-Abbildung verstehen wir die Abbildung*

$$\psi : D \rightarrow D, \quad a \mapsto \phi_{T(a)}(a),$$

wobei $T : D \rightarrow \mathbb{R}$ die Zeitfunktion der ersten Rückkehr ist.

Da der Phasenfluß eine differenzierbare Abbildung ist und auch $T(a)$ in differenzierbarer Weise von a abhängt, gilt dasselbe für die Poincaré-Abbildung ψ .

Beispiel: Sei (M, Ω, H) ein harmonischer Oszillator mit zwei Freiheitsgraden: $M = \mathbb{R}^4$, $\Omega = \sum_{i=1}^2 dp_i \wedge dq_i$ und

$$H = H_1 + H_2, \quad H_i = \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{k_i q_i^2}{2}.$$

Jede Energieschale $\Gamma_E = \{x \mid H(x) = E > 0\}$ ist in diesem Fall diffeomorph zu einer 3-Sphäre. Als Poincaré-Querschnitt wählen wir den Durchschnitt D von Γ_E (für irgendein $E > 0$) mit der Niveaumenge $F = p_2 = 0$. Da dp_2 und dH auf D überall linear unabhängig sind, ist D nach dem Hauptsatz über implizit definierte Funktionen eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M . Es handelt sich um eine 2-Sphäre, mit Nordpol $q_2 = \sqrt{2E/k_2}$, Südpol $q_2 = -\sqrt{2E/k_2}$ und Äquator

$$A = \{a \mid p_2(a) = q_2(a) = 0\}.$$

Die Poisson-Klammer $\{F, H\} = -k_2 q_2$ verschwindet auf A , weshalb D dort nicht transversal zum Phasenfluß sein kann. (Tatsächlich bedeutet $p_2 = q_2 = 0$, daß der zweite Oszillator permanent in Ruhe und die gesamte Energie im ersten Oszillator konzentriert ist. Eine Phasenbahn durch $a \in A$ verweilt deshalb für immer auf A .)

Um diesen Mangel zu beheben, entfernen wir A und konstruieren die Poincaré-Abbildung ψ auf $D' = D \setminus A$ statt D . Da die Oszillatorfrequenzen unabhängig von der Energie durch $k_i = m_i \omega_i^2$ gegeben sind, hat die Rückkehrzeit den konstanten Wert $T = 2\pi\sqrt{m_2/k_2}$. Die Poincaré-Abbildung ψ springt zwischen der oberen ($q_2 > 0$) und unteren ($q_2 < 0$) Hemisphäre hin und her. Verwenden wir für beide Hemisphären der Bequemlichkeit halber dieselben Koordinaten q_1, p_1 , so ist ψ mit $\alpha = 2\pi\sqrt{k_1 m_2 / m_1 k_2}$ durch

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

gegeben. ■

Wir fragen nun, ob der Poincaré-Querschnitt D als "reduzierter Phasenraum" taugt. Sei ι die Inklusion $\iota : D \rightarrow M$, $a \mapsto a$, und $\omega := \iota^* \Omega$ die nach D zurückgezogene symplektische Struktur.

SATZ 5.9 (D, ω) ist eine $(2f-2)$ -dimensionale symplektische Untermannigfaltigkeit des Phasenraumes (M, Ω) .

Beweis: Nach Voraussetzung haben die differenzierbaren Funktionen F und H auf D keine kritischen Punkte. Auch sind die Differentiale dF und dH wegen des Nichtverschwindens der Poisson-Klammer $\{F, H\}$ überall auf D linear unabhängig. Hieraus folgt nach dem Hauptsatz über implizit definierte Funktionen, daß $D \subset M$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension $2f-2$ ist.

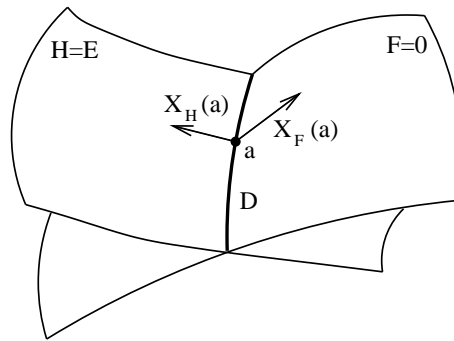
Aus der Geschlossenheit von Ω resultiert wegen der Vertauschbarkeit der Cartan-Ableitung mit dem Zurückziehen von Differentialformen

$$d\omega = d(\iota^* \Omega) = \iota^*(d\Omega) = 0,$$

also die Geschlossenheit von ω . Damit (D, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit bildet, muß ω zudem noch nichtentartet sein. Zum Beweis dieser Eigenschaft stellen wir zunächst fest, daß für jeden Punkt $a \in D$ aus der Voraussetzung $\{F, H\}(a) \neq 0$ zwei Dinge folgen: (i) die Vektoren $X_H(a) = (IdH)(a)$ und $X_F(a) = (IdF)(a)$ sind voneinander linear unabhängig, und keiner dieser Vektoren liegt im Tangentialraum $T_a D$:

$$(dF)_a(X_H(a)) = -(dH)_a(X_F(a)) = \{F, H\}(a) \neq 0.$$

Die Vektoren $X_F(a)$ und $X_H(a)$ zusammen mit einer Basis des Tangentialraumes $T_a D$ bilden also ein linear unabhängiges System und spannen somit den Tangentialraum $T_a M$ auf.



Sei nun $u \in T_a D$ ein Nullvektor von ω_a :

$$\omega_a(u, v) = 0 \quad \text{für alle } v \in T_a D .$$

Mit $\omega = \iota^* \Omega$ und $D_a \iota(u) = u$ und $D_a \iota(v) = v$ gilt dann auch

$$\Omega_a(u, v) = 0 \quad \text{für alle } v \in T_a D .$$

Außerdem gilt

$$\Omega_a(u, X_F(a)) = (dF)_a(u) = 0 ,$$

$$\Omega_a(u, X_H(a)) = (dH)_a(u) = 0 ,$$

denn u liegt als Element von $T_a D$ tangential zu den Niveauflächen von F und H . Da die Vektoren $X_F(a)$, $X_H(a)$ zusammen mit $T_a D$ den Tangentialraum $T_a M$ aufspannen, gilt insgesamt $\Omega_a(u, v) = 0$ für alle $v \in T_a M$. Jeder Nullvektor u von ω_a ist also auch Nullvektor von Ω_a . Da Ω nichtentartet ist, folgt $u = 0$ und somit die Nichtentartetheit von ω .

Beispiel: Im obigen Beispiel des zweidimensionalen harmonischen Oszillators besteht der Poincaré-Querschnitt aus zwei Hemisphären: $D' = S_+ \cup S_-$. Die zurückgezogene symplektische Struktur auf beiden Hemisphären ist die geschlossene und nichtentartete 2-Form $\omega = dp_1 \wedge dq_1$. ■

Da die Poincaré-Abbildung ψ nur auf einer Untermannigfaltigkeit $D \subset M$ erklärt ist, macht es keinen Sinn zu fragen, ob ψ kanonisch im üblichen Sinn ist. Sinnvoll hingegen ist die Frage nach der Kanonizität von ψ bzgl. (D, ω) .

SATZ 5.10 Die Poincaré-Abbildung $\psi : D \rightarrow D$ erhält die reduzierte symplektische Struktur ω auf D :

$$\psi^* \omega = \omega .$$

Bemerkung: Man beachte die Analogie zu Korollar 4.16.4 und dem Liouvilleschen Satz. Letztere sind hier allerdings nicht anwendbar, weil in der Poincaré-Abbildung

der Phasenfluß auf verschiedene Anfangsbedingungen mit verschieden langer Zeitdauer wirkt.

Beweis des Satzes: Wir beweisen die äquivalente Aussage

$$\int_A \omega = \int_{\psi(A)} \omega$$

für jedes bzgl. ω meßbare Flächenstück $A \subset D$. Dazu besorgen wir uns zunächst eine nützliche Präsentation der Poincaré–Abbildung ψ . Wir betten D in den erweiterten Phasenraum $M \times \mathbb{R}$ auf dreierlei Weise $\psi_i : D \rightarrow M \times \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, 2$) ein; erstens in trivialer Manier durch

$$\psi_1(a) = (a, 0) ,$$

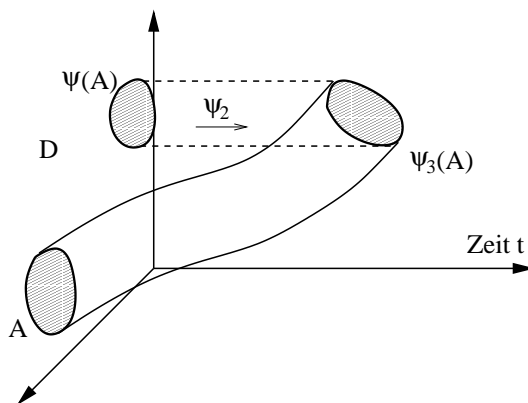
zweitens mit Hilfe der Rückkehrzeit T durch

$$\psi_2(a) = (a, T(a)) ,$$

und drittens über den Phasenfluß ϕ durch

$$\psi_3(a) = (\phi_{T(a)}(a), T(a)) .$$

Die Poincaré–Abbildung ist dann die Verkettung $\psi = \psi_2^{-1} \circ \psi_3$.



Sei jetzt $A \subset D$ ein orientiertes Flächenstück mit Rand ∂A . Die Kurven $\psi_1(\partial A)$ und $\psi_3(\partial A)$ umlaufen denselben Schlauch von Integralkurven des Hamiltonschen Vektorfeldes IdH . Deshalb folgt aus der Kombination des Stokes'schen Lemmas (Satz 4.15) mit dem Allgemeinen Satz von Stokes

$$\int_{\psi_1(A)} (\Omega - dH \wedge dt) = \int_{\psi_3(A)} (\Omega - dH \wedge dt) .$$

Diese Gleichung ist so zu verstehen, daß die symplektische Struktur Ω in der natürlichen Weise zu einer 2-Form im erweiterten Phasenraum ausgedehnt wurde. Den

Term $dH \wedge dt$ dürfen wir auf beiden Seiten weglassen, weil $\psi_3(A)$ und $\psi_1(A)$ in Flächen konstanter Energie $H = E$ liegen. Da Ω keine Zeitkomponente besitzt, ist die mittels ψ_1 oder ψ_2 nach D zurückgezogene Form in beiden Fällen $\psi_1^* \Omega = \omega = \psi_2^* \Omega$. Mit $\psi_3(A) = \psi_2 \circ \psi_1(A)$ und dem Transformationssatz folgt

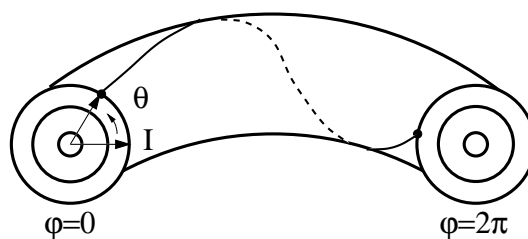
$$\int_A \omega = \int_{\psi_3(A)} \Omega = \int_{\psi_1(A)} \psi_2^* \Omega = \int_{\psi_1(A)} \omega,$$

also die zu zeigende Aussage $\int_{\psi(A)} \omega = \int_A \omega$.

Beispiel: Wir betrachten ein integrables System mit Winkel- und Wirkungsvariablen $\theta, \varphi; I, J$. Die symplektische Struktur habe die kanonische Form $\Omega = dI \wedge d\theta + dJ \wedge d\varphi$, und die Hamilton-Funktion sei $H = H_0(I, J)$. Wir fixieren eine Energie E . Die zugehörige Energieschale Γ_E besteht aus den invarianten Tori, deren Wirkungen die Gleichung $H_0(I, J) = E$ erfüllen. Als Poincaré-Querschnitt D wählen wir den Durchschnitt von Γ_E mit $\varphi = 0$. (Daß φ nicht global definiert ist, macht hier keine Probleme. Der Poincaré-Querschnitt bildet eine glatte Mannigfaltigkeit, solange nur die Funktion F in einer offenen Umgebung von D definiert werden kann, was für $F = \varphi$ der Fall ist.) Wir setzen $\omega_1 = \partial H / \partial I$, $\omega_2 = \partial H / \partial J$ und nehmen an, daß ω_2 strikt positiv sei. Dann können wir θ, I als lokale Koordinaten für D verwenden. Die Wirkungsvariable J betrachten wir als abhängige Größe, deren Wert bei fest gewählter Energie E durch die Gleichung $E = H_0(I, J)$ bestimmt wird. Die nach D zurückgezogene symplektische Struktur ist $\omega = dI \wedge d\theta$. Aus der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega_2$ errechnen wir die Rückkehrzeit $T = 2\pi/\omega_2$. Integration der Bewegungsgleichung $\dot{\theta} = \omega_1$ gibt dann die Poincaré-Abbildung

$$\psi : \begin{pmatrix} \theta \\ I \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta + \rho(I) \\ I \end{pmatrix}$$

mit $\rho(I) = 2\pi\omega_1/\omega_2$. Für strikt monotonen ρ nennen wir ψ eine **Twist-Abbildung**. Sie erhält die reduzierte symplektische Struktur, denn $dI \wedge d(\theta + \rho(I)) = \omega = dI \wedge d\theta$. Alle Kreise $I = I_0$ des Poincaré-Querschnitts D sind invariante Mannigfaltigkeiten von ψ . Für jede Anfangsbedingung a mit irrationalem $\rho_0/2\pi = \rho(I(a))/2\pi$ ist die Bewegung **ergodisch**, d.h. die normierte Dirac-Distribution der Punkte $a, \psi(a), \psi^2(a), \dots, \psi^n(a)$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ im schwachen Sinn gegen das drehinvariante Maß $d\theta/2\pi$ auf dem Kreis. Im Falle von rationalem $\rho_0/2\pi = m/n$ ist die Bewegung periodisch mit Periode n .

Zur Definition der Twist-Abbildung ψ .

5.7 Poincaré–Birkhoff–Theorem

Ausgehend von einem integrablen System mit zwei Freiheitsgraden untersuchen wir jetzt das Schicksal resonanter Tori bei Anschalten einer kleinen Störung. Dazu greifen wir das eben besprochene Beispiel wieder auf und ersetzen die Hamilton-Funktion durch

$$H = H_0(I, J) + \varepsilon H_1(\theta, \varphi, I, J),$$

wobei die Störung H_1 eine analytische Funktion ihrer Argumente sei. Die zugehörige Poincaré-Abbildung ψ_ε können wir nicht ohne größeren Rechenaufwand bestimmen. Es ist aber klar, daß sie von der allgemeinen Form

$$\psi_\varepsilon : \begin{pmatrix} \theta \\ I \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta' \\ I' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta + \rho(I) + f_\varepsilon(\theta, I) \\ I + g_\varepsilon(\theta, I) \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

sein muß, wobei die Funktionen f_ε und g_ε analytisch von ε , θ und I abhängen und für $\varepsilon = 0$ verschwinden. Da die Hamilton-Funktion global definiert ist, sind $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ periodisch in θ mit Periode 2π . Eine weitere Einschränkung folgt aus Satz 5.10. Demnach ist ψ_ε flächenerhaltend bzgl. der zurückgezogenen symplektischen Struktur ω auf dem reduzierten Phasenraum D . Aus $\omega = dI \wedge d\theta = dI' \wedge d\theta'$ resultiert nach kurzer Rechnung die Bedingung

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial I} - \rho'(I) \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial \theta} + \{f_\varepsilon, g_\varepsilon\} = 0,$$

wobei die Poisson-Klammer $\{\bullet, \bullet\}$ bzgl. ω gebildet wird. Wir nennen (5.18) eine **gestörte Twist-Abbildung**, falls ρ strikt monoton ist.

Beispiel: Das einfachste Beispiel einer gestörten Twist-Abbildung wird durch die **Standard-Abbildung von Chirikov und Taylor** geliefert:

$$\rho(I) = \kappa I, \quad f_\varepsilon(\theta, I) = 0, \quad g_\varepsilon(\theta, I) = \varepsilon I_0 \sin(\theta + \kappa I).$$

Sie und ihr quantentheoretisches Analogon treten in einer Reihe von physikalischen Problemstellungen auf, u.a. in der Modellierung des Ionisierungsvorganges in Rydberg-Atomen. ■

Wir betrachten jetzt die Schnittmenge Γ von D mit einem resonanten Torus des integrablen Systems ($\varepsilon = 0$), also einen Kreis $\{a \in D \mid I(a) = I_0\}$, für den das Verhältnis der ungestörten Frequenzen rational ist: $\rho(I_0) = 2\pi m/n$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$. Alle Punkte a von Γ sind Fixpunkte der n -mal iterierten Twist-Abbildung,

$$\psi_0^n(a) = a ,$$

denn deren Winkeländerung auf Γ beträgt $n \times \rho(I_0) = 2\pi m = 0$ (modulo 2π). Der Konkretheit halber nehmen wir an, daß die Ableitung von ρ auf Γ positiv sei: $\rho'(I_0) > 0$. Unter der Abbildung ψ_0^n nimmt der Winkel θ dann für Punkte auf invarianten Kreisen mit leicht vergrößerter Wirkung $I > I_0$ zu und auf solchen mit leicht verkleinerter Wirkung $I < I_0$ ab.

Was passiert nun mit der Fixpunktcurve Γ von ψ_0^n , wenn wir zur gestörten Twist-Abbildung ψ_ε^n übergehen? Da das KAM-Theorem über resonante Tori keine Aussage macht, erwarten wir nicht, daß sich Γ zu einer invarianten Kurve von ψ_ε^n fortsetzt. Tatsächlich verbleiben von ihr nur isolierte Fixpunkte:

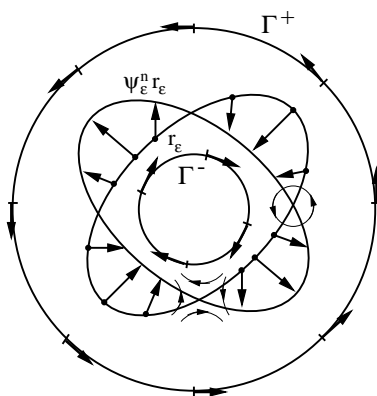
SATZ 5.11 (POINCARÉ–BIRKHOFF–THEOREM) *Die gestörte Twist-Abbildung ψ_ε^n besitzt für genügend kleines $\varepsilon > 0$ eine endliche Zahl von Fixpunkten in der Nähe der Kurve Γ . Werden die Fixpunkte mit Multiplizität gezählt, ist ihre Zahl immer ein gerades Vielfaches von n .*

Beweis: Nach dem KAM-Theorem wird Γ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ durch invariante Kurven Γ^+ und Γ^- von ψ_ε^n eingeschlossen. O.B.d.A. nehmen wir $\rho'(I_0) > 0$ an. Die Abbildung ψ_ε^n dreht dann die Kurven Γ^- und Γ^+ im Uhrzeiger- bzw. Gegenuhrzeigersinn. Hieraus folgt mit der Stetigkeit von ψ_ε^n , daß auf jedem Strahl $\theta = \text{const}$ ein Punkt x existiert, dessen Winkelcoordinate unter der Abbildung invariant ist: $\theta(x) = \theta(\psi_\varepsilon^n(x))$. Die Gesamtheit dieser Punkte bildet, wieder für genügend kleines $\varepsilon > 0$, eine geschlossene analytische Kurve r_ε , die in der Nähe von Γ liegt. Nun wissen wir, daß ψ_ε^n flächenerhaltend ist. Deshalb kann das Bild $\psi_\varepsilon^n(r_\varepsilon)$ der Kurve r_ε weder innerhalb noch außerhalb von r_ε liegen, und die zwei Kurven müssen einander schneiden. Da ψ_ε^n auf der Kurve r_ε radial wirkt, ist jeder Schnittpunkt von r_ε mit $\psi_\varepsilon^n(r_\varepsilon)$ ein Fixpunkt von ψ_ε^n . Damit ist die Existenz von Fixpunkten in der Nähe von Γ gezeigt.

Nun betrachten wir die radiale Verschiebung $\Delta : r_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Delta(x) = I(\psi_\varepsilon^n(x)) - I(x) .$$

Die Fixpunkte von ψ_ε^n sind offenbar Nullstellen von Δ . Wir erinnern an die Tatsache, daß eine analytische Funktion auf jedem Kompaktum höchstens endlich viele



Nullstellen hat. Da die geschlossene Kurve r_ϵ analytisch ist, folgt hiermit die Endlichkeit der Zahl von Fixpunkten in der Nähe von Γ .

Sind alle Nullstellen von Δ einfach – das ist der “generische” Fall –, dann muß ihre Gesamtzahl gerade sein, denn auf jede Nullstelle mit positiver Ableitung folgt eine Nullstelle mit negativer Ableitung. Im Fall von Entartung zählen wir die Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit, d.h. eine zweifache Nullstelle doppelt, eine dreifache Nullstelle dreimal usw. Mit dieser Zählweise (“mit Multiplizität”) ist die Zahl der Nullstellen und somit die Zahl der Fixpunkte immer gerade.

Im generischen Fall einfacher Nullstellen zeigt ein Blick auf das obige Diagramm, daß der Charakter der Fixpunkte zwischen elliptisch und hyperbolisch alterniert. Sei nun x ein elliptischer Fixpunkt: $x = \psi_\epsilon^n(x)$. Das **Orbit** von x besteht aus den Punkten $x, \psi_\epsilon(x), \psi_\epsilon^2(x), \dots, \psi_\epsilon^{n-1}(x)$. Es gilt

$$\theta(\psi_\epsilon^l(x)) = \theta(x) + 2\pi l \frac{m}{n} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Das Orbit besteht also aus n verschiedenen Punkten. Wegen $\psi_\epsilon^n \circ \psi_\epsilon^l(x) = \psi_\epsilon^l \circ \psi_\epsilon^n(x) = \psi_\epsilon^l(x)$ sind mit x auch alle anderen Punkte des Orbits von x Fixpunkte von ψ_ϵ^n . Anwendung der Kettenregel gibt (ϵ wird der Kürze halber unterdrückt)

$$D_{\psi^l(x)} \psi^n \circ D_x \psi^l = D_x(\psi^n \circ \psi^l) = D_x(\psi^l \circ \psi^n) = D_x \psi^l \circ D_x \psi^n.$$

Hieraus folgt, daß die Spur des Differential von ψ_ϵ^n für alle Punkte auf dem Orbit von x denselben Wert hat: $\text{Tr } D_x \psi_\epsilon^n = \text{Tr } D_{\psi^l(x)} \psi_\epsilon^n$. Alle n Punkte auf dem Orbit von x sind demnach elliptische Fixpunkte. Die Gesamtheit aller elliptischen Fixpunkte teilt sich daher in Orbits von n Punkten ein. Sei k die Zahl solcher Orbits. Dann gibt es insgesamt kn elliptische Fixpunkte, und die Gesamtzahl aller Fixpunkte ist $2kn$, also ein geradzahliges Vielfaches von n . ■

5.8 Heteroklinische Oszillation

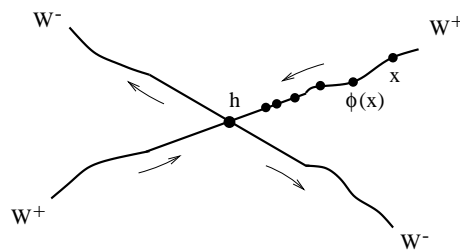
Fazit des letzten Abschnitts ist, daß die Fixpunktcurve Γ der n -mal iterierten ungestörten Twist-Abbildung ψ_0^n im generischen Fall in eine alternierende Anordnung von elliptischen und hyperbolischen Fixpunkten der gestörten Abbildung ψ_ε^n aufgebrochen wird. Wir untersuchen nun die Verhältnisse in der Nähe der hyperbolischen Fixpunkte genauer. Die folgenden Überlegungen hängen nicht von der speziellen Form einer gestörten Twist-Abbildung ab, sondern gelten für jede flächenerhaltende Abbildung, weshalb wir die Notation in $\phi := \psi_\varepsilon^n$ abändern.

An jedem Fixpunkt x von ϕ ist das Differential $L := D_x\phi$ eine symplektische lineare Abbildung des Tangentialraumes T_xD auf sich. Für einen elliptischen Fixpunkt gilt $\text{Tr}L < 2$, für einen hyperbolischen hingegen $\text{Tr}L > 2$; siehe Abschnitt 2.6. Im letzteren Fall hat L zwei reelle Eigenwerte, $\lambda_- > 1$ und $\lambda_+ = 1/\lambda_- < 1$. Die zugehörigen Eigenvektoren geben die Richtungen an, entlang derer die Abbildung in der Nähe des Fixpunkts expandierend (λ_-) bzw. kontrahierend (λ_+) wirkt.

Die Eigenrichtungen von ϕ an einem hyperbolischen Fixpunkt, nennen wir ihn h , werden durch die Definition

$$W^\pm := \{x \in D \mid \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \phi^k(x) = h\} \quad (5.19)$$

zu expandierenden (W^-) bzw. kontrahierenden (W^+) Mannigfaltigkeiten von h fortgesetzt. W^+ besteht also aus allen Punkten des Poincaré-Querschnitts D , die in der fernen Zukunft in h enden werden, und W^- aus jenen, die in der fernen Vergangenheit ihren Ursprung in h nahmen. Wir nennen W^+ und W^- auch die stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit des Fixpunkts h . In der Nähe von h haben diese Mannigfaltigkeiten die Form glatter Kurven, und aus der Definition von W^\pm folgt sofort, daß die Tangentenvektoren im Punkt h Eigenvektoren der linearisierten Abbildung $L = D_h\phi$ zu den Eigenwerten λ^\pm sind.



Thema des laufenden Abschnitts ist die Form der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten W^\pm fern vom ihrem Fixpunkt h . Wir werden zeigen, daß die Kurven W^\pm dort im allgemeinen zu oszillieren beginnen und letztendlich die Eigenschaft

der Differenzierbarkeit verlieren und nichtglatt werden. Dieses Phänomen der **heteroklinischen Oszillation** wurde von Poincaré (1889) entdeckt. Es impliziert die Abwesenheit eines vollständigen Satzes von Bewegungintegralen in der Nähe hyperbolischer Fixpunkte, also die Abwesenheit von Integrabilität, und ist somit ein Keim für Chaos in Hamiltonschen Systemen.

Wir beginnen mit einigen simplen Feststellungen. Zuvorderst sei bemerkt, daß die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten W^\pm nicht mit Phasenbahnen zu verwechseln sind. Die durch die Poincaré-Abbildung ϕ vermittelte Dynamik ist ja diskret. Daß W^\pm die Gestalt kontinuierlicher Kurven haben, liegt daran, daß wir alle Punkte, die unter der Dynamik von ϕ dieselbe Destination bzw. denselben Ursprung haben, gleichzeitig auftragen. Es steht dann auch nicht im Widerspruch zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen, wenn solche Kurven sich kreuzen.

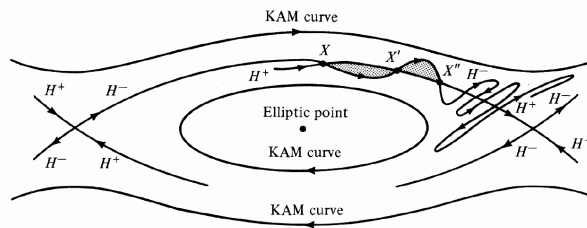
Was läßt sich nun über die Schnittmengen der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten hyperbolischer Fixpunkte aussagen? Wir betrachten den allgemeinen Fall, wo mehrere hyperbolische Fixpunkte h_1, h_2, \dots vorliegen, und bezeichnen die zugehörigen (in)stabilen Mannigfaltigkeiten mit $W_{h_1}^\pm, W_{h_2}^\pm$, usw. Es ist klar, daß zwei Mannigfaltigkeiten vom gleichen Typ (d.h. zwei stabile, oder zwei instabile) sich niemals kreuzen, denn die Existenz eines Schnittpunkts wäre mit Definition (5.19) unverträglich: kreuzten sich z.B. zwei stabile Mannigfaltigkeiten $W_{h_1}^+$ und $W_{h_2}^+$ in einem Punkt x , so müßte $\phi^k(x)$ für $k \rightarrow \infty$ sowohl gegen h_1 wie h_2 konvergieren, was im Widerspruch zu $h_1 \neq h_2$ stehen würde. Das gleiche Argument greift für zwei instabile Mannigfaltigkeiten.

Auch im Fall $h_1 = h_2$ können sich die stabilen oder instabilen Mannigfaltigkeiten nicht selbst schneiden. Zum Beweis nehmen wir an, es gäbe einen Schnittpunkt x von W_h^+ mit sich selbst. Dann wäre x der Anfangs- und Endpunkt einer Schleife ℓ auf W_h^+ . Das Urbild $\phi^{-1}(\ell)$ von ℓ läge auf W_h^+ , und da ϕ stetig ist, müßte $\phi^{-1}(\ell)$ ein zusammenhängender Abschnitt der Kurve W_h^+ sein. Dieser Abschnitt hätte einen Anfangs- und einen Endpunkt, die voneinander verschieden wären. Beide Punkte würden aber durch ϕ auf x abgebildet, was im Widerspruch zur Injektivität von ϕ stünde.

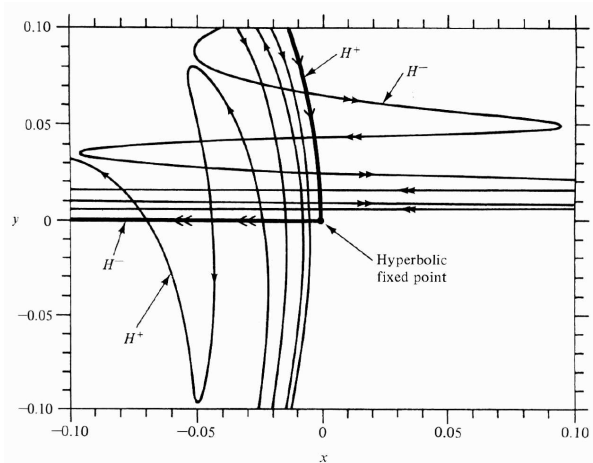
Es gibt also keine Kreuzungen zwischen zwei stabilen oder instabilen Mannigfaltigkeiten vom gleichen Typ. Kreuzungen zwischen Mannigfaltigkeiten unterschiedlichen Typs sind jedoch erlaubt, und mit ihrem Auftreten ist im allgemeinen auch zu rechnen: Im generischen Fall liegen die Mannigfaltigkeiten $W_{h_i}^+$ und $W_{h_j}^-$ zweier benachbarter hyperbolischer Fixpunkte h_i und h_j nicht aufeinander, sondern schnei-

den sich gegenseitig. Ein solcher Schnittpunkt heißt ein **heteroklinischer Punkt**. Die Existenz eines einzigen heteroklinischen Punktes x impliziert sofort die Existenz einer unendlichen Zahl solcher Punkte: mit x liegt auch $\phi^k(x)$ ($k \in \mathbb{Z}$) sowohl auf $W_{h_i}^+$ wie auch auf $W_{h_j}^-$, und ist somit heteroklinischer Punkt.

Betrachten wir nun die Folge von heteroklinischen Punkten $x, \phi(x), \dots, \phi^k(x), \dots$ in $W_{h_i}^+ \cap W_{h_j}^-$. Diese Folge konvergiert gegen h_i , und sie liegt auf der bei Annäherung an h_i linear werdenden Kurve $W_{h_i}^+$. Das Flächenstück, das von den Abschnitten der Kurven $W_{h_i}^+$ und $W_{h_j}^-$ zwischen den Punkten $\phi^{k-1}(x)$ und $\phi^k(x)$ eingeschlossen wird, geht unter Abbildung mit ϕ in das entsprechende Flächenstück zwischen $\phi^k(x)$ und $\phi^{k+1}(x)$ über. Dabei bleibt die eingeschlossene Fläche konstant, denn die Poincaré-Abbildung ϕ ist ja flächenerhaltend. Die Kombination von Flächenerhaltung und Konvergenz der Folge erzwingt, daß die Kurve $W_{h_j}^-$ seitlich ausweicht und mit wachsendem k immer stärker ausschlägt: es kommt zu einer sogenannten **heteroklinischen Oszillation** von $W_{h_j}^-$ um $W_{h_i}^+$.



Wer sich die geometrischen Verhältnisse auf zeichnerische Weise vor Augen zu führen versucht, wird schnell einsehen, daß die Kurve $W_{h_j}^-$ ($W_{h_i}^+$) bei h_i (bzw. h_j) nicht differenzierbar ist. Als Konsequenz hiervon kann in der Nähe eines hyperbolischen Fixpunkts kein zweites glattes Bewegungsintegral neben der Energie existieren.



Als Poincaré (1889) das Phänomen der heteroklinischen Oszillation entdeckte, schrieb

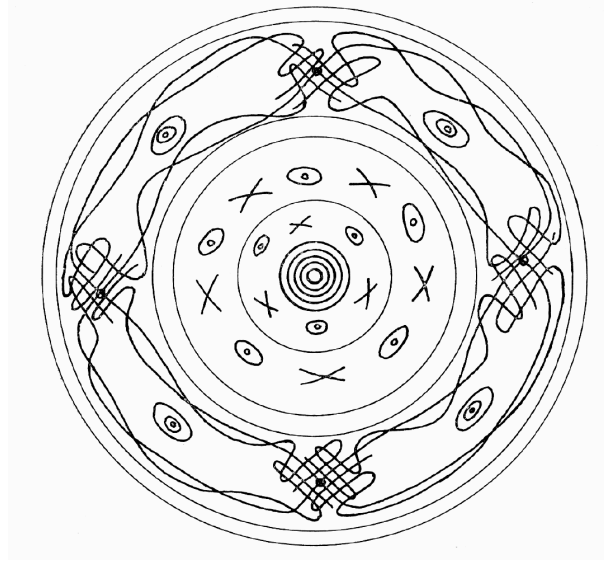
er: “Versucht man die von diesen beiden Kurven [gemeint sind die sich kreuzenden stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten] gebildete Figur darzustellen, so ist man von ihrer Komplexität derart frappiert, daß ich nicht einmal den Versuch einer Zeichnung unternehmen werde. Nichts ist besser geeignet [als diese Komplexität], um uns eine Ahnung von der Kompliziertheit des 3-Körperproblems und allgemeiner von allen dynamischen Systemen, die nicht global integrabel sind, zu vermitteln.”

Mitteilung: Während im Fall einer schwach gestörten Twist-Abbildung die heteroklinische Oszillation das natürliche Szenario darstellt, treten im Fall starker Störungen auch sogenannte homoklinische Oszillationen auf. Hierbei schneidet die instabile Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen Fixpunkts h die stabile Mannigfaltigkeit desselben Fixpunkts in unendlich vielen **homoklinischen Fixpunkten**.

Wir fassen die Kernaussagen und einige Konsequenzen des laufenden Kapitels kurz zusammen:

Zunächst einmal sei erwähnt, daß es für die in der Natur vorkommenden Kräfte geschehen kann, daß Teilchen, die genug Energie besitzen, aus der Wechselwirkungszone entweichen. In einem solchen Fall wird die Bewegung für den entsprechenden Freiheitsgrad asymptotisch trivial, nämlich gleichförmig geradlinig. Wenn dagegen die Bewegung aller Freiheitsgrade auf ein Gebiet endlichen Phasenraumvolumens beschränkt ist, dann kann sich ein reichhaltige Vielfalt von Phänomenen abspielen:

1. Die Verhältnisse sind sehr geordnet für integrable Systeme. In diesem Fall findet die Bewegung auf f -dimensionalen Tori statt. Die Bewegungsgleichungen sind durch Quadratur lösbar, und das Langzeitverhalten des Systems ist somit vollständig bekannt und vorhersagbar.
2. Das Schicksal eines integrablen Systems bei Anschalten einer generischen schwachen Störung ist in der berühmten Arnold-Skizze dargestellt (siehe unten). Nach dem KAM-Theorem bleiben die irrationalen Tori unter kleinen Störungen erhalten; sie werden lediglich etwas deformiert. Die resonanten Tori hingegen lösen sich in alternierende Folgen von hyperbolischen und elliptischen Fixpunkten auf, wobei letztere selbst wieder von KAM-Tori umgeben sind. Wenn die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten hyperbolischer Fixpunkte sich schneiden, was im allgemeinen der Fall ist, muß notgedrungen eine homo- oder heteroklinische Oszillation vorliegen. Dies eröffnet in der Nähe hyperbolischer Fixpunkte die Möglichkeit zu chaotischer Bewegung, und das Langzeitverhalten kann dann numerisch unvorhersagbar sein.



Arnold-Skizze

3. Bei wachsender Stärke einer generischen Störung werden mehr und mehr KAM-Tori vernichtet. In vielen Fällen kommt es schließlich zu globalem Chaos. Das heißt insbesondere, daß *eine einzige* Phasenbahn den gesamten verfügbaren Phasenraum (bei fester Energie) ausfüllt.
4. Schließlich ist noch zu bemerken, daß ein qualitativer Unterschied zwischen $f = 2$ und $f = 3$ besteht. Im Fall zweier Freiheitsgrade sind die Gebiete chaotischer Bewegung durch dazwischenliegende KAM-Tori separiert. Für mehr als zwei Freiheitsgrade können die chaotischen Phasenbahnen von einem chaotischen Gebiet zu einem anderen durch Ausnutzen der zusätzlichen Freiheiten wandern. Man nennt dieses Phänomen **Arnold-Diffusion**.

Anhang A

A.1 Symplektische Vektorräume

Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n . Unter dem Dualraum, V^* , zu V versteht man bekanntlich den linearen Raum $V^* = L(V, \mathbb{R})$. Die Elemente von V^* sind lineare Abbildungen $V \rightarrow \mathbb{R}$ und heißen Linearformen.

DEFINITION A.1 Ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V , so ist die **Dualbasis** $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ von V^* erklärt durch $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$.

Anwendung von θ^i auf einen Vektor $v = \sum_j v^j e_j$ gibt die i -te Komponente von v :

$$\theta^i(v) = \theta^i\left(\sum_j v^j e_j\right) = \sum_j v^j \theta^i(e_j) = \sum_j v^j \delta_j^i = v^i.$$

Analog erhält man durch Einsetzen von e_j in ein Element $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \theta^i \in V^*$ die j -te Komponente von α :

$$\alpha(e_j) = \sum_i \alpha_i \theta^i(e_j) = \alpha_j.$$

Wir betrachten nun den Raum der 2-linearen Formen $L^2(V, \mathbb{R})$. Ein Element ω von $L^2(V, \mathbb{R})$, $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \omega(u, v)$ ist linear in beiden Argumenten.

DEFINITION A.2 Sei $\omega \in L^2(V, \mathbb{R})$.

(i) ω heißt **schief**, wenn gilt: $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ für alle $u, v \in V$.

(ii) ω heißt **entartet**, falls ein $v \in V$ existiert, $v \neq 0$, so daß gilt: $\omega(u, v) = 0$ für alle $u \in V$. Andernfalls heißt ω **nichtentartet**.

Der Vektorraum V habe nun gerade Dimension: $n = 2f$.

DEFINITION A.3 Eine nichtentartete schiefe 2-lineare Form $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **symplektische Form** auf V . Das Paar (V, ω) heißt ein **symplektischer**

Vektorraum. ω hat Normalgestalt bezüglich einer Basis $\{e_1, \dots, e_{2f}\}$, wenn die durch $J_{ij} = \omega(e_i, e_j)$ definierte $2f \times 2f$ -Matrix J die Gestalt hat

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1}_f \\ \mathbf{1}_f & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

SATZ A.1 Zu jedem symplektischen Vektorraum (V, ω) existiert eine Basis $\{e_1, \dots, e_{2f}\}$ von V , bezüglich welcher ω Normalgestalt hat.

Um eine symplektische Form ω bzgl. einer Basis darzustellen, benötigen wir den Begriff des äußeren Produkts.

DEFINITION A.4 Das äußere Produkt zweier Linearformen α und β ist die 2-lineare Form $\alpha \wedge \beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto (\alpha \wedge \beta)(u, v) := \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u)$.

Bemerkungen:

(i) Offensichtlich gilt: $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.

(ii) Die Definition ist auch für ungerade Dimension $\dim V = n$ sinnvoll.

Ist $\{\theta^1, \dots, \theta^{2f}\}$ die Dualbasis zu $\{e_1, \dots, e_{2f}\}$, so lautet die Basisdarstellung einer symplektischen Form ω :

$$\begin{aligned} \omega = \omega(e_i, e_j) &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} \omega_{kl} (\theta^k \wedge \theta^l)(e_i, e_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} \omega_{kl} (\theta^k(e_i)\theta^l(e_j) - \theta^k(e_j)\theta^l(e_i)) = \frac{1}{2}(\omega_{ij} - \omega_{ji}) = \omega_{ij}. \end{aligned}$$

Für beliebige Vektoren $u = \sum_i u^i e_i$ und $v = \sum_j v^j e_j$ gilt:

$$\omega(u, v) = \sum_{i,j} u^i \omega_{ij} v^j.$$

Ist die symplektische Form ω in Normalform bezüglich $\{e_1, \dots, e_{2f}\}$, so gilt

$$\omega(u, v) = \sum_{k=1}^f (u^k v^{f+k} - v^k u^{f+k}).$$

A.2 Alternierende k -lineare Formen

DEFINITION A.5 Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n . Eine **alternierende k -lineare Form** auf V ist eine k -lineare Abbildung $\omega : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(v_1, v_2, \dots, v_k) \mapsto \omega(v_1, v_2, \dots, v_k)$ mit der Eigenschaft

$$\omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = (-1)^{|\pi|} \omega(v_1, \dots, v_k)$$

für jede Permutation π der Indexmenge $1, 2, \dots, k$. Den linearen Raum der alternierenden k -linearen Formen auf V bezeichnen wir mit $\text{Alt}^k(V)$.

Mitteilung: $\dim(\text{Alt}^k(\mathbb{V})) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

DEFINITION A.6 Das äußere Produkt \wedge ,

$$\begin{aligned} \wedge : \quad \text{Alt}^k(\mathbb{V}) \times \text{Alt}^l(\mathbb{V}) &\rightarrow \text{Alt}^{k+l}(\mathbb{V}) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

ist erklärt durch

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\ := \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi} (-1)^{|\pi|} \alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \beta(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}), \end{aligned}$$

wobei die Summe über alle Permutationen π der Indexmenge $1, 2, \dots, k+l$ läuft.

SATZ A.2 Bezeichne mit α^k ein Element von $\text{Alt}^k(\mathbb{V})$, und mit λ, μ zwei reelle Zahlen. Dann hat das äußere Produkt die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\alpha^k \wedge \alpha^l = (-1)^{kl} \alpha^l \wedge \alpha^k$ (Schiefsymmetrie);
- (ii) $(\lambda \alpha^k + \mu \alpha^l) \wedge \alpha^m = \lambda(\alpha^k \wedge \alpha^m) + \mu(\alpha^l \wedge \alpha^m)$ (Distributivität);
- (iii) $(\alpha^k \wedge \alpha^l) \wedge \alpha^m = \alpha^k \wedge (\alpha^l \wedge \alpha^m)$ (Assoziativität).

Bemerkung: Aus (i) folgt insbesondere $\alpha^k \wedge \alpha^k = 0$ für k ungerade. Außerdem gilt: $\alpha^k \wedge \alpha^l \equiv 0$ für $k+l > n = \dim \mathbb{V}$.

SATZ A.3 Seien $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ Linearformen: $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \eta_1(v_1) & \dots & \eta_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \eta_k(v_1) & \dots & \eta_k(v_k) \end{pmatrix}.$$

SATZ A.4 Seien $\{e_1, \dots, e_n\}$ und $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ zueinander duale Basen von \mathbb{V} und \mathbb{V}^* . Dann ist jedes Element $\omega \in \text{Alt}^k(\mathbb{V})$ darstellbar in der Form

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k},$$

wobei $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$.

A.3 Operationen auf Differentialformen

DEFINITION A.7 Eine Differentialform k -ten Grades ω (kurz: eine k -Form) ist eine differenzierbare Abbildung $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$, $p \mapsto \omega_p$.

“Differenzierbar” bedeutet hier der Einfachheit halber immer von der Klasse C^∞ .

Beispiel: Das Differential einer differenzierbaren Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \equiv \text{Alt}^1(\mathbb{R}^n), \\ p &\mapsto (df)_p, \end{aligned}$$

ist eine Differentialform ersten Grades.

Koordinatendarstellung von Differentialformen:

Wir bezeichnen die kanonischen Koordinatenfunktionen des \mathbb{R}^n mit $x^i \equiv \theta^i$ ($i = 1, \dots, n$). Dann gilt

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

wobei die **Koordinaten-1-Form** $dx^i : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ erklärt ist durch $dx^i : p \mapsto (dx^i)_p = \theta^i$ (unabhängig von p). Die Koordinatendarstellungen einer 1-Form α und einer 2-Form ω sind

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i, \quad \omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i < j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$

mit $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Das äußere Produkt zweier Differentialformen α und β ist punktweise definiert durch

$$(\alpha \wedge \beta)_p = \alpha_p \wedge \beta_p.$$

So wie Vektoren in k -lineare Formen eingesetzt werden können, läßt sich auch das Einsetzen von Vektorfeldern in Differentialformen definieren. Diese Operation heißt das **innere Produkt**. Beim Einsetzen eines Vektorfeldes in eine k -Form entsteht eine $(k-1)$ -Form. 0-Formen werden mit Funktionen $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ identifiziert. Die Operation des Einsetzens ist punktweise definiert.

Beispiel: Sei $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Alt}^2(\mathbb{R}^n)$ eine 2-Form, und sei $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann ist

$$\omega(\bullet, v) : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

die durch $p \mapsto \omega_p(\bullet, v_p)$ erklärte 1-Form. Sind die Koordinatendarstellungen von ω und v durch

$$\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \quad \text{und} \quad v = \sum_i v^i \partial_i$$

gegeben, so ist

$$\omega(\bullet, v) = \sum_{i < j} \omega_{ij} (dx^i v^j - v^i dx^j) = \sum_i \alpha_i dx^i$$

mit $\alpha_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} v^j$. Hier ist ∂_i wie immer das konstante Vektorfeld $\partial_i(p) = e_i$.

DEFINITION A.8 Die **Cartansche (oder äußere) Ableitung** $d\omega$ einer k -Form $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$ ist erklärt durch

$$d\omega : U \rightarrow \text{Alt}^{k+1}(\mathbb{R}^n),$$

$$p \mapsto (d\omega)_p(v_0, \dots, v_k) := \sum_{j=0}^k (-1)^j ((D_p \omega)(v_j))(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k).$$

Hierbei ist $(D_p \omega)(u)$ das Differential der Abbildung $\omega : U \rightarrow \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$ ausgewertet auf u im Punkt p , also:

$$(D_p \omega)(u) = \left. \frac{d}{ds} \omega_{p+su} \right|_{s=0}.$$

Beispiel $k = 1$: Sei $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ eine 1-Form. Mit

$$(D_p \alpha)(u) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) u^j (dx^i)_p$$

folgt aus Definition A.8:

$$\begin{aligned} (d\alpha)_p(u, v) &= ((D_p \omega)(u))(v) - ((D_p \omega)(v))(u) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) (u^j v^i - v^j u^i). \end{aligned}$$

Hieraus liest man ab:

$$d\alpha = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j.$$

Ähnlich zeigt man für $\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$:

$$d\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j,l=1}^n \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^i \wedge dx^j.$$

SATZ A.5 Bezeichne mit α^k eine Differentialform k -ten Grades. Dann gilt

$$d(\alpha^k \wedge \alpha^l) = (d\alpha^k) \wedge \alpha^l + (-1)^k \alpha^k \wedge (d\alpha^l).$$

DEFINITION A.9 Eine k -Form $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$ heißt **geschlossen**, wenn gilt $d\omega = 0$ auf U .

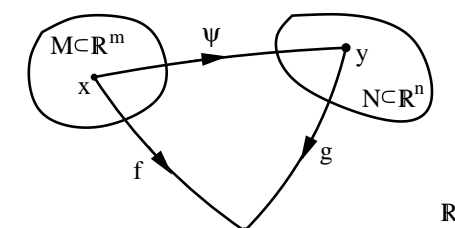
DEFINITION A.10 Eine 2-Form $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Alt}^2(\mathbb{R}^n)$, $p \mapsto \omega_p$, heißt **nichtentartet**, falls ω_p nichtentartet ist für alle $p \in U$.

A.4 Zurückziehen von Formen

Wir beschreiben zunächst das **Zurückziehen von Null-Formen** $g : N \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mittels einer Abbildung $\psi : M \subset \mathbb{R}^m \rightarrow N$. Betrachte die nachfolgende Skizze. Man sieht: $g(\psi(x)) = f(x)$; insgesamt $f = g \circ \psi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Hierfür schreibt man auch

$$f = g \circ \psi =: \psi^* g$$

und nennt f die “zurückgezogene” Funktion.



Verallgemeinerung auf k -Formen $\omega : N \rightarrow \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$.

Wir gehen vom Transformationsgesetz für Vektorfelder unter Abbildungen aus. Gegeben sei das Vektorfeld $X : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ und wie zuvor die Abbildung $\psi : M \rightarrow N$, die wir jetzt als differenzierbar voraussetzen. Dann ist das transformierte Vektorfeld $\psi_* X : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ erklärt durch

$$(\psi_* X)(\psi(p)) = (D_p \psi)(X(p)) = \left. \frac{d}{ds} \psi(p + sX(p)) \right|_{s=0}.$$

Außerdem wissen wir, daß beim Einsetzen eines Vektorfeldes in eine 1-Form eine Funktion entsteht. Damit können wir das Transformationsgesetz für 1-Formen deduzieren. Gegeben sei die 1-Form $\beta : N \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Wir definieren die zurückgezogene 1-Form $\psi^* \beta : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ durch die Forderung

$$(\psi^* \beta)(X) := \beta(\psi_* X) \circ \psi$$

für alle Vektorfelder $X : M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Hieraus ergibt sich

$$(\psi^* \beta)_p(u) = \beta_{\psi(p)}(D_p \psi(u)).$$

In Koordinatendarstellung findet man mit $y^j \circ \psi =: \psi^j$:

$$\beta = \sum_{j=1}^n \beta_j dy^j \xrightarrow{\psi} \psi^* \beta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\beta_j \circ \psi) \frac{\partial \psi^j}{\partial x^i} dx^i,$$

also $\psi^* \beta = \sum_{i=1}^m \alpha_i dx^i$ mit

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n (\beta_j \circ \psi) \frac{\partial \psi^j}{\partial x^i}.$$

Für eine 2-Form ω findet man durch die Forderung, daß $\omega(\bullet, X) = \beta$ sich wie eine 1-Form transformiert, das Transformationsgesetz

$$(\psi^*\omega)_p(u, v) = \omega_{\psi(p)}(D_p\psi(u), D_p(v)) .$$

In Koordinatendarstellung gilt

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} dy^i \wedge dy^j \xrightarrow{\psi} \psi^*\omega = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^m \Omega_{kl} dx^k \wedge dx^l$$

mit

$$\Omega_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\omega_{ij} \circ \psi) \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial x^k} \frac{\partial \psi^j}{\partial x^l} - \frac{\partial \psi^i}{\partial x^l} \frac{\partial \psi^j}{\partial x^k} \right) .$$

SATZ A.6 *Das Zurückziehen von Formen vertauscht mit dem äußeren Produkt und und der äußeren Ableitung:*

$$\psi^*(\alpha \wedge \beta) = (\psi^*\alpha) \wedge (\psi^*\beta) \quad \text{und} \quad \psi^*(d\alpha) = d(\psi^*\alpha) .$$

A.5 Raumwinkelform auf S^2

Wir besprechen einige Details zur Definition der in Abschnitt 4.4.1 verwendeten Raumwinkelform ω auf der 2-Sphäre

$$S^2 = \{ \sigma \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \sigma, \sigma \rangle = 1 \} .$$

Die Raumwinkelform ω ist eine Differentialform zweiten Grades: $S^2 \rightarrow \text{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$, $\sigma \mapsto \omega_\sigma$. Die schiefe 2-lineare Form ω_σ weist jedem Paar von Tangentenvektoren u, v in einem Punkt $\sigma \in S^2$ die reelle Zahl $\omega_\sigma(u, v) = -\omega_\sigma(v, u)$ zu. Der Wert $\omega_\sigma(u, v)$ läßt sich ohne Verwendung differentialgeometrischer Hilfsmittel erklären, wenn man die Tangentenvektoren u, v in der natürlichen Weise als Elemente von \mathbb{R}^3 auffaßt. Sei $\Omega(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle$ das übliche Spatprodukt im Euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 und n_σ der radial nach außen gerichtete Einheitsvektor im Punkt $\sigma \in S^2$. Dann haben wir

$$\omega_\sigma(u, v) := \Omega(u, v, n_\sigma) = \langle n_\sigma, u \times v \rangle . \quad (\text{A.1})$$

Anschaulich gesprochen ist $\omega_\sigma(\varepsilon u, \varepsilon v)$ die orientierte Fläche des durch die Tangentenvektoren $\varepsilon u, \varepsilon v \in T_\sigma S^2$ am Punkt σ aufgespannten Parallelogramms. Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ paßt sich das Parallelogramm an S^2 immer besser an, und da es sich um die Einheitssphäre handelt, geht die Fläche in den Raumwinkel über, unter dem das Parallelogramm vom Mittelpunkt der Sphäre aus gesehen wird.

Bei einer Drehung $R \in \text{SO}(3) : S^2 \rightarrow S^2$ werden der Punkt σ und die Vektoren u und v alle gleichzeitig gedreht — per Definition von R^* gilt ja: $(R^*\omega)_\sigma(u, v) = \omega_{R(\sigma)}(D_\sigma R(u), D_\sigma R(v))$. Deshalb ist klar, daß ω sich unter Drehungen nicht ändert:

$$R^*\omega = \omega .$$

Zur Berechnung der Koordinatendarstellung von ω gehen wir am besten wie folgt vor. Die natürliche Volumenform des \mathbb{R}^3 ist jene 3-Form, die jedem Punkt des \mathbb{R}^3 das Spatprodukt Ω zuweist. Wir verzichten auf die Einführung eines neuen Symbols und bezeichnen diese Volumenform ebenfalls mit Ω . In kartesischen Koordinaten x, y, z hat sie den Ausdruck $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Dann bilden wir das innere Produkt von Ω mit dem in Radialrichtung zeigenden Einheitsvektorfeld ∂_r , d.h. wir setzen ∂_r in Ω ein:

$$\Omega_r := \Omega(\partial_r, \bullet, \bullet) = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy .$$

Sei nun ι die Inklusion $\iota : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma \mapsto \sigma$. Hiermit erhalten wir die Raumwinkel-form auf S^2 , indem wir Ω_r mittels ι von \mathbb{R}^3 nach S^2 zurückziehen:

$$\omega = \iota^* \Omega_r .$$

Wir koordinatisieren die 2-Sphäre durch Polarwinkel θ und Azimutwinkel ϕ . Die nach S^2 zurückgezogenen kartesischen Koordinatenfunktionen sind dann

$$\iota^* x = \sin \theta \cos \phi , \quad \iota^* y = \sin \theta \sin \phi , \quad \iota^* z = \cos \theta .$$

Mit Hilfe der Formeln von Anhang A.4 errechnet man dann leicht

$$\omega = \sin \theta \, d\theta \wedge d\phi .$$

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die symplektische Struktur ω des klassischen Spins (Abschnitt 4.4.1) sich von der Raumwinkel-form ω auf S^2 durch den Faktor $-S$ unterscheidet.

A.6 Lie–Ableitung

Gegeben sei auf einem Gebiet $M \subset \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld

$$X : M \rightarrow \mathbb{R}^n , \quad a \mapsto X(a) .$$

Der (lokale) Fluß des Vektorfeldes, $\phi : M \times I \rightarrow M, (a, s) \mapsto \phi_s(a)$ wird bestimmt durch die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{d}{ds} \phi_s(a) = X(\phi_s(a))$$

mit der Anfangsbedingung $\phi_{s=0} = \text{id}$. Insbesondere gilt

$$\left. \frac{d}{ds} \phi_s(a) \right|_{s=0} = X(a).$$

DEFINITION A.11 Ist ω eine k -Form und ϕ_s der Fluß des Vektorfeldes X , dann wird die Lie-Ableitung $L_X \omega$ von ω definiert durch

$$L_X \omega := \left. \frac{d}{ds} \phi_s^* \omega \right|_{s=0}.$$

Interpretation: Arnold nennt die Lie-Ableitung auch die "Fischer-Ableitung" (engl. "fisherman's derivative"). Er schreibt: "The flow carries all possible differential-geometric objects past the fisherman and the fisherman sits there and differentiates them...". Die Lie-Ableitung einer Funktion f fällt mit der Richtungsableitung zusammen:

$$L_X f = \left. \frac{d}{ds} \phi_s^* f \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} f \circ \phi_s \right|_{s=0} = (df)(X). \blacksquare$$

Wir bezeichnen das innere Produkt des Vektorfeldes X mit der Differentialform ω mit $\iota(X)\omega := \omega(X, \dots)$. Für den Fall einer 0-Form oder Funktion f vereinbaren wir $\iota(X)f \equiv 0$. Das innere Produkt genügt wie die Cartan-Ableitung d der Anti-Derivationsregel

$$\iota(X)(\alpha \wedge \beta) = (\iota(X)\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \iota(X)\beta.$$

SATZ A.7 (HAUPTSATZ DER CARTANSCHEN DIFFERENTIALRECHNUNG)

$$\boxed{L_X = \iota(X) \circ d + d \circ \iota(X).}$$

Beweisskizze:

1. Man zeigt zunächst, daß L_X eine Derivation der äußeren Algebra von Differentialformen ist, d.h. der Leibnizregel genügt:

$$\begin{aligned} L_X(\alpha \wedge \beta) &= \left. \frac{d}{ds} \phi_s^*(\alpha \wedge \beta) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} (\phi_s^* \alpha \wedge \phi_s^* \beta) \right|_{s=0} = (L_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X \beta). \end{aligned}$$

2. Dann beweist man durch explizites Rechnen und Anwenden der Produktregeln für die Cartan-Ableitung und das innere Produkt, daß $\iota(X) \circ d + d \circ \iota(X)$ ebenfalls eine Derivation ist.
3. Wegen 1. und 2. genügt der Nachweis des Hauptsatzes für Funktionen f und 1-Formen dg . Aus $\iota(X)f = 0$ folgt $L_X f = \iota(X)df = (\iota(X)d + d \circ \iota(X))f$, und

für $\omega = dg$ berechnet man mit Hilfe von Satz A.6

$$\begin{aligned} L_X(dg) &= \left. \frac{d}{ds} \phi_s^*(dg) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} d(\phi_s^*g) \right|_{s=0} \\ &= d(\iota(X)dg) = (d\iota(X) + \iota(X)d)(dg). \end{aligned}$$

SATZ A.8 Sei $X := \left. \frac{d}{ds} g^s \right|_{s=0}$ das Vektorfeld zu einer Einparametergruppe $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ von Abbildungen $g^s : M \rightarrow M$. Dann gilt:

$$\left. \frac{d}{ds} g^{s*} \omega \right|_{s=0} = d(\omega(X, \bullet))$$

für jede geschlossene 2-Form ω auf M .

Beweis:

$$\left. \frac{d}{ds} g^{s*} \omega \right|_{s=0} = L_X \omega = \iota(X) \underbrace{(d\omega)}_{=0} + d(\iota(X)\omega) = d(\omega(X, \bullet)).$$

A.7 Nachhilfeunterricht

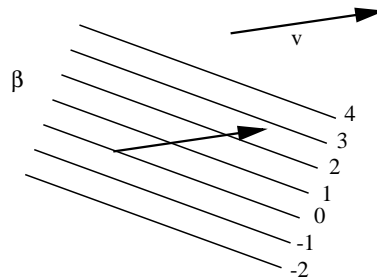
Ein dynamisches System wird durch die Angabe eines Vektorfeldes X auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M festgelegt: X bestimmt an jedem Punkt $a \in M$ die Geschwindigkeit der Bewegung durch a . Im Falle Hamiltonscher Systeme ist M gerade-dimensional, und das Vektorfeld X hat spezielle Eigenschaften. Es läßt sich nämlich aus einer vorgegebenen symplektischen Struktur ω und einer Funktion H , der Hamilton-Funktion, konstruieren. Wir schreiben $X = IdH$ und nennen X ein Hamiltonsches Vektorfeld.

In diesem Anhang geben wir eine geometrische Veranschaulichung der Konstruktion von $X = IdH$ für den einfachen Fall autonomer Hamiltonscher Systeme mit nur einem Freiheitsgrad. Dazu ist es bequem, obwohl völlig unnötig, den Phasenraum $M = \mathbb{R}^2$ mit einer Euklidischen Struktur, nämlich Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle$ und Vektorprodukt \times , zu versehen. Begriffe wie "Abstand", "Länge eines Vektors", "Fläche" usw. sind dann definiert und haben ihre natürliche Bedeutung.

A.7.1 Linearformen

Jeder kann sich einen Vektor anschaulich vorstellen, nämlich als geraden Pfeil, der zwei Punkte verbindet. Der Begriff der **Linearform** ist hiervon abgeleitet: es handelt sich um eine lineare Abbildung, die jedem Vektor v eine reelle Zahl zuweist. Ist β eine Linearform, so bezeichnen wir das Resultat der Anwendung von β auf v mit $\beta(v)$. Eine Linearform ist also wie ein Automat, der einen Eingabeschlitz für Vektoren hat und auf die Eingabe eines Vektors mit der Ausgabe einer Zahl antwortet.

Im Euklidischen \mathbb{R}^2 läßt sich eine Linearform β als eine Schar von parallelen und nummerierten Geraden mit konstantem Abstand veranschaulichen:



Um $\beta(v)$ zu bestimmen, schieben wir den Schaft des Vektors v auf die Nullgerade und zählen ab, wieviele Geraden der Vektor durchstößt. Im Beispiel: $\beta(v) = 2.7$.

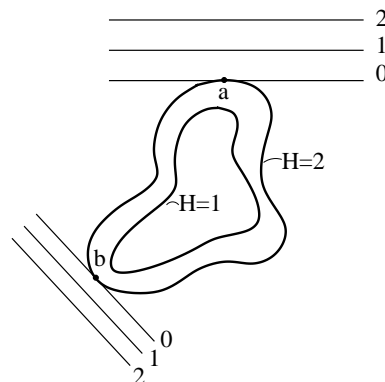
A.7.2 Das Differential einer Funktion

Eine Differentialform ersten Grades (= 1-Form) ist eine Abbildung, die jedem Punkt eine Linearform zuweist. Für unsere Zwecke stelle man sich also vor, daß an jedem Punkt des \mathbb{R}^2 ein Automat aufgestellt sei, der nach Eingabe eines Vektors eine Zahl anzeigt.

Ein wichtiges Beispiel für eine 1-Form ist das Differential dH einer Funktion H . dH weist jedem Punkt a eine Linearform zu, die mit $(dH)_a$ bezeichnet wird. Die Linearform $(dH)_a$ ist als diejenige lineare Abbildung definiert, die einem Vektor v die Ableitung von H in Richtung von v im Punkt a zuordnet. Für $M = \mathbb{R}^n$ gilt in Formeln:

$$(dH)_a(v) = \left. \frac{d}{dt} H(a + tv) \right|_{t=0}.$$

Wie kann man nun dH graphisch veranschaulichen? Dazu charakterisieren wir die Funktion H durch ihre Niveaulinien, d.h. die Lösungen der Gleichung $H = \text{const.}$



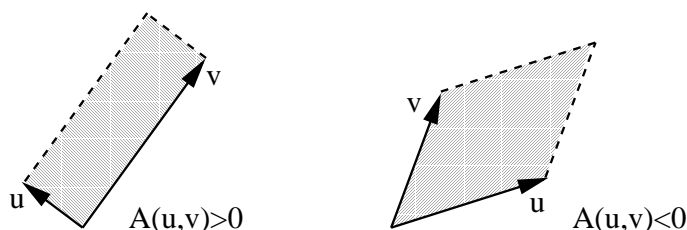
Das Differential $(dH)_a$ im Punkt a läßt sich durch eine zur Niveaulinie durch a tangentielle Geradenschar (siehe A.7.1) darstellen. Der Abstand der Geraden von

einander ist gleich dem lokalen Abstand der Niveaukurven in diesem Punkt. Ist n ein Einheitsvektor ($|n| = 1$) in Richtung des stärksten Anstieges von H , so verstehen wir unter dem lokalen Abstand der Niveaukurven im Punkt a den Grenzwert $\left| \frac{d}{dt} H(a + tn) \Big|_{t=0} \right|^{-1}$. Der Abstand zwischen den Geraden ist also klein (groß), wenn die Niveaukurven dicht (weit voneinander entfernt) liegen. Die Numerierung ist so vorzunehmen, daß die Geraden in Richtung des Anwachsens von H positiv gezählt werden.

A.7.3 Symplektische Struktur

Wir erklären zunächst den Begriff einer symplektischen Form. Darunter versteht man eine nichtentartete schiefe 2-lineare Abbildung A , die einem Paar von Vektoren u und v die reelle Zahl $A(u, v)$ zuweist. Im Euklidischen \mathbb{R}^2 existiert eine ausgezeichnete symplektische Form, nämlich $A(u, v) :=$ die (orientierte) Fläche des von u und v aufgespannten Parallelogramms. Das Vorzeichen von $A(u, v)$ entnehmen wir dem Vektorprodukt:

$$\begin{aligned} A(u, v) &> 0, & \text{ falls } v \times u \text{ aus der Ebene herauszeigt;} \\ A(u, v) &< 0, & \text{ falls } v \times u \text{ in die Ebene hineinzeigt.} \end{aligned}$$



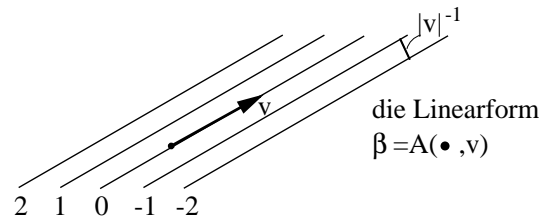
Die so definierte Abbildung A ist offensichtlich 2-linear (d.h. linear in beiden Argumenten), schief und nichtentartet.

Als nächstes besprechen wir die Operation des Einsetzens eines festen Vektors v in die symplektische Form A . Hierbei entsteht ein linearer Automat mit nur noch einem Eingabeschlitz für Vektoren, d.h. eine Linearform, sagen wir $\beta := A(\bullet, v)$.

Behauptung: In dem hier betrachteten Fall ($A = \pm$ Fläche) ist β die Schar der zu v parallelen Geraden mit Abstand $|v|^{-1}$. Die Numerierung wächst in Blickrichtung von v nach links an.

Verifikation der Behauptung:

1. Sei $u \parallel v$. Dann ist $\beta(u) = 0 = A(u, v)$.
2. Sei $u \perp v$, $|u| = |v|^{-1}$, und $u \wedge v$ zeige in die Ebene hinein. Dann gilt:
 $\beta(u) = 1 = A(u, v)$.



Eine symplektische Struktur ω ist eine Abbildung, die jedem Punkt a des Phasenraums eine symplektische Form ω_a zuordnet, und zwar so, daß die Cartansche Ableitung von ω verschwindet. Wir wählen hier $\omega_a \equiv A =$ Flächenform, d.h. durch ω werde an jedem Punkt des \mathbb{R}^2 eine identische Kopie desselben Automaten aufgestellt.

A.7.4 Konstruktion von $X = IdH$

Wir kommen nun zum Zweck des Ganzen: durch die Angabe eines Paares (ω, H) wird ein Vektorfeld X festgelegt. Sei a ein Punkt des Phasenraumes. An diesem Punkt befinden sich per Vorgabe von (ω, H) zwei Automaten, nämlich eine symplektische Form, ω_a , und eine Linearform, $(dH)_a$. Da ω_a nichtentartet ist, existiert ein eindeutiger Vektor v , so daß

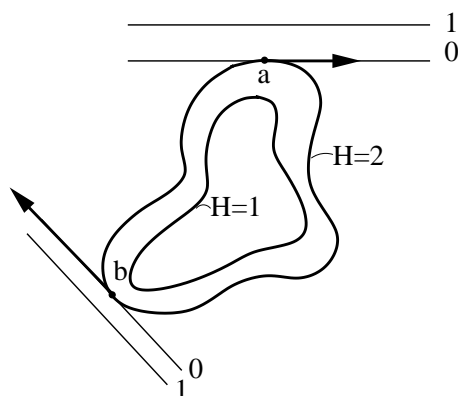
$$\omega_a(\bullet, v) = (dH)_a.$$

In der Praxis berechnet man v , indem man ω_a , $(dH)_a$ und v in einer geeigneten Basis darstellt und das resultierende lineare Gleichungssystem löst. Das Ergebnis für v ist aber von der Wahl der Basis unabhängig.

Für den hier betrachteten Fall, nämlich $\omega_a \equiv A =$ Flächenform im Euklidischen \mathbb{R}^2 , wird v geometrisch dadurch bestimmt, daß man die Geradenschar der Linearform $\beta = A(\bullet, v)$ mit der Geradenschar von $(dH)_a$ zur Deckung bringt. Mit Hilfe der Erläuterungen unter A.7.2 und A.7.3 sieht man, daß v tangential zur Niveaukurve von H durch a ist. Blickt man in Richtung des stärksten Anstiegs von H , so zeigt v nach rechts. Die inverse Länge von v ist gleich dem lokalen Abstand der Niveaukurven im Punkt a .

Durch das beschriebene Vorgehen erhält man für jeden Punkt a des Phasenraumes einen Vektor $v =: X(a)$. Die Gesamtheit dieser Vektoren ist das Hamiltonsche Vektorfeld $X = IdH$. ■

Aus unserer geometrischen Konstruktion folgt sofort und ohne jede Rechnung die bekannte Tatsache, daß die Bewegung von autonomen Hamiltonschen Systemen mit 1 Freiheitsgrad längs der Niveaukurven der Energie verläuft. Die Bewegungsgleichungen sind nämlich $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$, und wir haben ja gezeigt, daß $X(\gamma(0))$



tangential zur Energie-Niveaueigenschaft durch $\gamma(0) = a$ ist. Die Bewegung läuft umso schneller, je dichter die Niveaueigenschaft liegen. ■

Frage: Warum macht man den Umweg über den Kalkül mit Differentialformen, anstatt das Vektorfeld X auf “direktem” Weg aus H zu konstruieren?

Antwort: Ein solcher Weg würde immer von der Koordinatenwahl im Phasenraum abhängen. In der modernen theoretischen Physik vertritt man aber den Standpunkt, daß nur invariante, d.h. koordinatenfrei definierbare Größen auch sinnvolle Größen sind.

Resümee: Wir haben (für den einfachsten Fall) gezeigt, wie man ein Hamiltonsches Vektorfeld X in anschaulicher und koordinatenfreier Weise konstruiert. Was man hierzu benötigt, ist eine symplektische Struktur ω und eine Funktion H . Die Konstruktion trägt den “Namen” $X = IdH$ oder $X = X_H$ und heißt der symplektische Gradient von H . ■

Aufgabe: Formuliere die obige geometrische Konstruktion so um, daß von der Euklidischen Struktur des \mathbb{R}^2 kein Gebrauch gemacht wird!

A.8 Reduktion des Phasenraumes

[nicht Stoff der Vordiplomprüfung!]

Thema dieses Anhangs ist die Frage: Wie macht man sich die Existenz von ersten Integralen im Falle nichtintegrabler Systeme zunutze, um die Zahl der zu lösenden Bewegungsgleichungen zu reduzieren? Durch geschicktes Rechnen in Koordinaten läßt sich diese Aufgabenstellung oft auf die Elimination entsprechender “zyklischer Koordinaten” zurückführen, aber wir wollen sehen, wie man die Reduktion in allgemeiner und koordinatenfreier Weise macht.

Wir beginnen mit einem ausführlichen Beispiel, dem kräftefreien unsymmetrischen Kreisel (mit Fixpunkt) und geben zunächst eine adaptierte Formulierung dieses

Systems. Wir definieren durch

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$. Sei $\Omega := \sum_{k=1}^3 \Omega_k J_k \in \mathfrak{so}(3)$ ($\Omega_k \in \mathbb{R}$). Dann ist $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$, $g^s = \exp(s\Omega)$ eine Einparametergruppe in $\mathrm{SO}(3)$: $g^0 = \mathrm{Id}$ und $g^s \circ g^t = g^t \circ g^s$, siehe Satz 3.8. Der Bewegungszustand des starren Körpers mit Fixpunkt wird durch die Angabe einer Drehmatrix g (die vormalig mit R bezeichnet wurde und die Basisvektoren des raumfesten Koordinatensystems K in die Basisvektoren des körperfesten Koordinatensystems K' überführt) und ihrer zeitlichen Änderung \dot{g} charakterisiert. In Formeln:

$$\text{Phasenraum} = T^*\mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3.$$

Das T steht für ‘‘Tangentialbündel’’, und $*$ signalisiert, daß wir per Legendre-Transformation von der Winkelgeschwindigkeit zum Drehimpuls als unabhängige Variable übergehen müssen.

Die **Winkelgeschwindigkeit** bzgl. K lautet $\omega := \dot{g}g^{-1} = \sum_{k=1}^3 \omega_k J_k$; bzgl. K' ist sie $\eta := g^{-1}\dot{g} = \sum_k \omega'_k J_k$.

Drehimpuls bzgl. K : $L = \sum_k L_k J_k$; bzgl. K' : $M = \sum_k L'_k J_k$.

Offenbar gilt: $\eta = g^{-1}\omega g$, und folglich auch $M = g^{-1}Lg$. Wir halten fest, daß ω , η , L und M allesamt Elemente von $\mathfrak{so}(3)$ sind.

Trägheitstensor $I : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$, $\eta \mapsto M = I\eta$.

Skalarprodukt $\langle L, \omega \rangle := \sum_{k=1}^3 L_k \omega_k = -\frac{1}{2} \mathrm{tr}(L\omega)$. (Benütze $\mathrm{tr} J_k J_l = -2\delta_{kl}$.)

Kinetische Energie $T = \frac{1}{2} \langle L, \omega \rangle = \frac{1}{2} \langle M, \eta \rangle = \frac{1}{2} \langle I\eta, \eta \rangle = \frac{1}{2} \langle M, I^{-1}M \rangle$.

Mitteilung: In einer optimalen Formulierung würde man L, M als Elemente des Dualraums $\mathfrak{so}^*(3)$ einführen. Mit Hilfe des Skalarprodukts $\langle \bullet, \bullet \rangle$ können wir aber $\mathfrak{so}^*(3)$ mit $\mathfrak{so}(3)$ identifizieren.

A.8.1 Ableitung der Eulerschen Gleichungen

Wie wir wissen, erzeugen die Komponenten L_k ($k = 1, 2, 3$) des Drehimpulses L Drehungen. Da die Hamilton-Funktion $H = \frac{1}{2} \langle M, I^{-1}M \rangle$ des kräftefreien Kreisels drehinvariant ist, folgt nach dem Noether-Theorem der Hamilton-Mechanik $dL/dt = 0$. Hiermit erhält man:

$$\frac{d}{dt}M = \frac{d}{dt}(g^{-1}Lg) = g^{-1}\dot{L}g - g^{-1}\dot{g}g^{-1}Lg = M\eta - \eta M,$$

die Euler–Gleichungen des kräftefreien Kreisels in koordinatenfreier Schreibweise lauten also

$$\boxed{\dot{M} = [M, \eta]} \quad (\text{A.2})$$

Frage: Lassen sich diese Gleichungen als kanonische Gleichungen auffassen, d.h. hat die rechte Seite eine Interpretation als Hamiltonsches Vektorfeld auf einer geeignet gewählten symplektischen Mannigfaltigkeit?

Die Antwort ist positiv, wie die folgenden Betrachtungen zeigen werden. Zunächst zeigen wir, daß die Gleichungen (A.2) die Erhaltung der Länge des Drehimpulses M implizieren:

$$\frac{d}{dt}|M|^2 = \frac{d}{dt} \langle M, M \rangle = 2 \langle M, \dot{M} \rangle = 2 \langle M, [M, \eta] \rangle = 2 \langle \eta, [M, M] \rangle = 0.$$

Die Gleichung $|M|^2 = |M(t=0)|^2 = \text{const}$ definiert eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\text{SO}(3)$, die wir mit \mathcal{M} bezeichnen. \mathcal{M} heißt **reduzierter Phasenraum**. Über den Isomorphismus $\text{so}(3) \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ sieht man sofort, daß \mathcal{M} zur 2–Sphäre S^2 diffeomorph ist.

Sei $T_a\mathcal{M}$ der Tangentialraum von \mathcal{M} im Punkt $a \in \mathcal{M}$.

Hilfsatz: $T_a\mathcal{M}$ besteht genau aus den Elementen $[u, a]$ mit beliebigem $u \in \text{so}(3)$.

Beweis:

1. $\xi = [u, a] \Rightarrow \xi \in T_a\mathcal{M}$: Sei $\xi = [u, a]$ mit $u \in \text{so}(3)$ beliebig. Betrachte die Kurve $s \mapsto g^s a g^{-s}$ mit $g^s = \exp(su)$. Dies ist eine Kurve auf \mathcal{M} , denn $|g^s a g^{-s}|^2 = |a|^2$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Sie passiert durch a für $s = 0$. Deshalb ist

$$\left. \frac{d}{ds} g^s a g^{-s} \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} e^{su} a e^{-su} \right|_{s=0} = [u, a]$$

ein Tangentenvektor von \mathcal{M} im Punkt a , also $\xi \in T_a\mathcal{M}$.

2. $\xi \in T_a\mathcal{M} \Rightarrow$ existiert $u \in \text{so}(3)$ mit $\xi = [u, a]$: Der lineare Raum von Elementen $[u, a]$ mit $u \in \text{so}(3)$ ist zweidimensional. Folglich wird $T_a\mathcal{M}$ durch Elemente dieser Form aufgespannt. ■

A.8.2 Einführung einer symplektischen Struktur

Seien $\xi_1 = [u_1, a]$ und $\xi_2 = [u_2, a]$ zwei Tangentenvektoren von \mathcal{M} im Punkt $a \in \mathcal{M}$. Dann definieren wir eine symplektische Struktur ω (nicht mit der Winkelgeschwindigkeit zu verwechseln!) auf \mathcal{M} durch

$$\boxed{\omega_a(\xi_1, \xi_2) = \langle a, [u_1, u_2] \rangle}. \quad (\text{A.3})$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist wohldefiniert: zwar bestimmt die Relation $\xi = [u, a]$ das Element u nur bis auf Addition eines Vielfachen von a , doch hat die Addition eines solchen Terms keinen Einfluß auf den Wert von $\langle a, [u_1, u_2] \rangle$.

Wir erinnern an den Ausdruck für die kinetische Energie:

$$T(M) = \frac{1}{2} \langle M, I^{-1}M \rangle$$

und betrachten

$$\langle \bullet, (\text{grad}T)(M) \rangle = (dT)_M(\bullet) = \langle \bullet, I^{-1}M \rangle,$$

Wir sehen, daß gilt $\eta = \text{grad}T$. Somit ist die Einschränkung der rechten Seite der Euler-Gleichungen $\dot{M} = [M, \eta]$ auf \mathcal{M} das Vektorfeld $a \mapsto [a, X(a)]$ mit $X = \text{grad}H$ und $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $H(a) = \frac{1}{2} \langle a, I^{-1}a \rangle$.

SATZ A.9 *Das Vektorfeld $a \mapsto [a, X(a)]$, $X = \text{grad}H$, ist das Hamiltonsche Vektorfeld zur Hamilton-Funktion H .*

Beweis: Sei $\xi = [u, a] \in T_a\mathcal{M}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega_a(\xi, [a, X(a)]) &= -\langle a, [u, X(a)] \rangle \\ &= \langle X(a), [u, a] \rangle = \langle \xi, X(a) \rangle = (dH)_a(\xi). \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- (i) Es läßt sich zeigen, daß (A.3) die Einschränkung der natürlichen symplektischen Struktur $\sum_k dp^k \wedge dq_k$ des starren Körpers von $T^*\text{SO}(3)$ auf \mathcal{M} ist.
- (ii) Beachte die Ähnlichkeit von (A.3) mit der symplektischen Struktur des klassischen Spins! Tatsächlich existiert ein Isomorphismus $\mathcal{M} \leftrightarrow \text{S}^2$, der die zwei symplektischen Strukturen bis auf eine multiplikative Konstante ineinander überführt.

Resümée: Wir haben Erhaltungssätze (Drehimpuls $L = \text{const}$) ausgenutzt, um den Phasenraum des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels von $T^*\text{SO}(3)$ nach \mathcal{M} zu reduzieren. Die symplektische Struktur und die Hamilton-Funktion des reduzierten Systems erhält man einfach durch Einschränkung. ■

Da es sich bei dem gewählten Beispiel um ein integrables System handelt, ist das obige Vorgehen nicht zwingend. Man könnte Abschnitte 5.4.3, 5.4.4 benützen und das Problem direkt lösen mit den ersten Integralen H, L^2, L_3 . Für nichtintegrale Systeme ist ein solches Vorgehen aber enorm nützlich, weil hierdurch der "exakt

lösbar" Teil der Bewegungsgleichung eliminiert wird. Wir wollen das oben beschriebene Verfahren jetzt in einer allgemeinen Sprache, aber für den Spezialfall eines einzigen Erhaltungssatzes, formulieren:

Sei (M, ω, H) ein autonomes Hamiltonsches System mit f Freiheitsgraden und erstem Integral der Bewegung F . Nach dem Noether-Theorem der Hamilton-Mechanik (Abschnitt 4.7) ist der Erhaltungssatz $F = \text{const}$ mit der Existenz einer Einparameter-Gruppe von (durch das Hamiltonsche Vektorfeld $\text{Id}F$ erzeugten) Symmetrie-Transformationen $G := (g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ verbunden. Die Elemente von G sind kanonische Transformationen $g^s : M \rightarrow M$, und es gilt: $H \circ g^s = H$. Nun betrachte die durch

$$M_p := \left\{ x \in M \mid F(x) = p \right\} \quad (p \text{ reell und fest})$$

definierte Niveaumenge. Wir machen die Annahme, daß F auf M_p keine kritischen Punkte hat. Nach dem Hauptsatz über implizit definierte Funktionen ist M_p dann eine glatte Untermannigfaltigkeit des Phasenraums. Wegen $F \circ \phi_t^H = F$ ist M_p unter dem Phasenfluß invariant: $\phi_t^H(M_p) = M_p$. Die Einparametergruppe G operiert auf M , und wegen $\frac{d}{ds} F \circ g^s \Big|_{s=0} = \{F, F\} = 0$ läßt auch sie M_p invariant. Wir schreiben $G \equiv G_p$.

Da F auf M_p per Voraussetzung keine kritischen Punkte hat, operiert G_p auf M_p frei, d.h. ohne Fixpunkte. Durch die Aktion von G_p auf M_p wird M_p in **Orbiten** eingeteilt, d.h. in Äquivalenzklassen von Punkten, die durch die Gruppenaktion ineinander überführt werden ($x \sim y \iff \exists s \in \mathbb{R} : y = g^s(x)$). Der Raum solcher Orbiten heißt reduzierter Phasenraum und sei mit $F_p = M_p/G_p$ bezeichnet. Er hat die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $2f - 2$. (Jedes Orbit ist eine Koordinatenlinie der zum "Impuls" F gehörenden "zyklischen Koordinate".) Für die Projektion von M_p auf F_p schreiben wir $\pi : M_p \rightarrow F_p$.

Auf dem reduzierten Phasenraum F_p läßt sich in natürlicher Weise eine symplektische Struktur einführen. Dazu betrachten wir zwei Tangentialvektoren ξ und η von F_p im Punkt $a \in F_p$. Der Punkt a ist einer der Orbiten der Gruppe G_p auf der Mannigfaltigkeit M_p . Sei x einer der Punkte auf dem Orbit a . Die Tangentialvektoren ξ und η entstehen durch die Projektion $\pi : M_p \rightarrow F_p$ aus zwei Vektoren ξ' und η' , die im Punkt x tangential zu M_p sind.

DEFINITION A.12 *Das schiefsymmetrische Skalarprodukt zweier Vektoren ξ und η , die in einem Punkt a tangential zum reduzierten Phasenraum liegen, ist definiert als das schiefsymmetrische Skalarprodukt der entsprechenden Tangentialvektoren ξ' und η' im Punkt x der ursprünglichen symplektischen Mannigfaltigkeit M :*

$$\tilde{\omega}_a(\xi, \eta) := \omega_x(\xi', \eta') .$$

SATZ A.10 *Das schiefssymmetrische Skalarprodukt der Vektoren ξ und η hängt nicht von der Wahl des Punktes x und der Repräsentanten ξ' und η' ab, und es macht den reduzierten Phasenraum zu einer symplektischen Mannigfaltigkeit. Integralkurven des Hamiltonschen Systems (M, ω, H) gehen unter der Projektion $M \xrightarrow{F=p} M_p \xrightarrow{G_p} F_p$ in Integralkurven des reduzierten Hamiltonschen Systems $(F_p, \tilde{\omega}, \tilde{H})$ über, wobei die Hamilton-Funktion \tilde{H} durch Einschränkung gewonnen wird: $\tilde{H} \circ \pi = H|_{M_p}$.*

Beweisidee: Man benütze die Kanonizität $(g^s)^*\omega = \omega$, um zu zeigen, daß $\omega_x(\xi', \eta')$ von der Wahl des Punktes x und der Vektoren ξ', η' unabhängig ist. Die eingeschränkte Hamilton-Funktion ist wohldefiniert wegen $H \circ g^s = H$. Details und Verallgemeinerungen findet man in Appendix 5 des Buches von Arnold.

Anwendung: Schwerer unsymmetrischer Kreisel mit Fixpunkt. Die Symmetrieachse des homogenen Schwerfeldes sei die raumfeste 3-Achse. Der Erhaltungssatz $L_3 = \text{const}$ "schenkt" uns eine zyklische Koordinate (nämlich ϕ), wenn wir Euler-Winkel ϕ, θ, ψ mit kanonischen Impulsen p_ϕ, p_θ, p_ψ benützen:

$$H = \frac{M_1^2}{2I_1} + \frac{M_2^2}{2I_2} + \frac{M_3^2}{2I_3} + mgl \cos \theta,$$

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \psi / \sin \theta & \cos \psi & -\cot \theta \sin \psi \\ \cos \psi / \sin \theta & -\sin \psi & -\cot \theta \cos \psi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \\ p_\psi \end{pmatrix}.$$

Wir haben $\phi =$ zyklische Koordinate, $p_\phi = L_3 = \text{const}$ und die Hamiltonsche Funktion des reduzierten Problems $\tilde{H} = H(\theta, \psi; p_\theta, p_\psi)$.

Frage: Haben die Singularitäten bei $\theta = 0, \pi$ irgendeine physikalische Bedeutung, oder sind sie ein Artefakt der Koordinatenwahl?

Antwort: Der reduzierte Phasenraum ist eine glatte vierdimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , die sich nach obigem Verfahren koordinatenfrei konstruieren läßt. Die symplektische Struktur und die Hamilton-Funktion des reduzierten Systems sind nach Aussage des Satzes wohldefiniert und glatt. Die Singularitäten sind eine Pathologie der Koordinaten $\theta, \psi; p_\theta, p_\psi$.