Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber

Sommersemester 2004

Klausur zur Theoretischen Physik II: Elektrodynamik

Kurzaufgaben (20 Punkte):

1. Formulieren Sie die Maxwell-Gleichungen (homogen und inhomogen) einmal in relativistisch kovarianter Form und einmal in nichtrelativistischer Schreibweise (differentielle Form) für den Fall von Ladungen und Strömen im Vakuum (keine kontinuierliche Medien). Definieren Sie die Größen und interpretieren Sie die Gleichungen *kurz* in Worten. Geben Sie das benutzte Einheitensystem an. (4 Punkte)

2. Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen die Kontinuitätsgleichung her. (2 Punkte)

3. Wie berechnet sich das magnetostatische Potential $\mathbf{A}$ zu einer vorgegebenen Stromdichte $\mathbf{j}$? (2 Punkte)

4. Zeigen Sie, daß das elektrostatische Quadrupolmoment Q_{ij}, so wie es in der Vorlesung definiert wurde, spurfrei ist. (2 Punkte)

5. Formulieren Sie die Randbedingungen für $\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}$, $\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ sowie $\mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}$, $\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{t}}$ an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ und $\hat{\mathbf{t}}$ den Einheitsnormal- bzw. -tangentialvektor bezeichnen. (2 Punkte)

6. Was besagt das Relativitätsprinzip? (2 Punkte)

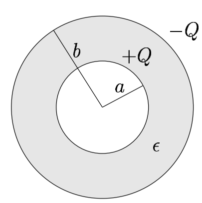
7. Interpretieren Sie die einzelnen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors T_F^{ik} für das elektromagnetische Feld. (2 Punkte)

8. Ein elektromagnetisches Feld wirke auf ein Teilchen der Ladung q. Zeigen Sie, daß das Magnetfeld keine Arbeit an dem Teilchen leistet. (2 Punkte)

9. Mit welcher Potenz in r fallen das Coulomb-Feld bzw. das Strahlungsfeld für $r \to \infty$ ab? (2 Punkte)

Aufgabe 1 (18 Punkte): *Dielektrika*

Betrachten Sie zwei konzentrische Kugelschalen mit Gesamtladung Q bzw. $-Q$ sowie Radius a bzw. b. Der Zwischenraum der Kugeln sei mit einem homogen-isotropen Dielektrikum der Dielektrizitätskonstante ϵ gefüllt.



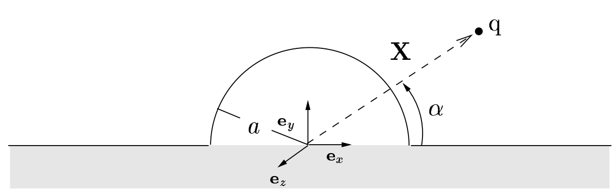
1. Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{x})$ sowie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ und die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ im ganzen Raum. (12 Punkte)

2. Bestimmen Sie die Kapazität C des Kondensators sowie die elektrostatische Feldenergie W_{el} im Zwischenraum. (6 Punkte)

(In Kugelkoordinaten: $\Delta = \frac{1}{r}\partial_r^2 r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right)$, $\nabla = \mathbf{e}_r\partial_r + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi$.)

Aufgabe 2 (21 Punkte): *Bildladungen*

Eine metallische Halbkugel mit Radius a liege mit ihrer ebenen Seite auf einer unendlich ausgedehnten Metallplatte, die in der x-z-Ebene liegt. Am Ort $\mathbf{X} = (R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0)$ befinde sich eine Ladung q (s. Skizze).



1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Bildladungen das Potential $\phi(\mathbf{x})$ im Außenraum. Zeigen Sie, daß das Potential im Außenraum der Poisson-Gleichung genügt. (9 Punkte)

2. Schreiben Sie das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{x})$ in Quadrupolnäherung mit Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment, und definieren Sie diese Größen. (3 Punkte)

3. Berechnen Sie jeweils bezüglich des Ursprungs das Monopol-, Dipol-, und Quadrupolmoment des Systems aus Ladung und Bildladung(en). (9 Punkte)

Aufgabe 3 (6 Punkte): *Magnetostatik*

Berechnen Sie die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ für einen (unendlich langen) dünnen, stromdurchflossenen Leiter.
(Es gibt mehrere Wege, dieses Problem zu lösen, evtl. tritt folgendes Integral auf: $\int dy \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}^3} = \frac{y}{a^2\sqrt{a^2+y^2}}$.)

Aufgabe 4 (18 Punkte): *Elektromagnetische Wellen*

Betrachten Sie eine elektromagnetische Welle im Vakuum, gegeben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kx}-\omega t)}, \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{kx}-\omega t)},$$

wobei $\mathbf{E}_0$,$\mathbf{B}_0$ komplexe Größen sein können.
1. Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum (keine Ladungen, keine Ströme) die homogene Wellengleichung für die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ her. (3 Punkte)

2. Zeigen Sie, daß $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ Lösungen der homogenen Wellengleichung sind. (2 Punkte)

3. Zeigen Sie, daß die Welle transversal ist, d.h. $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0$. Drücken Sie $\mathbf{B}_0$ durch $\mathbf{E}_0$ aus. (4 Punkte)

4. Berechnen Sie die zeitlich gemittelte Energiedichte $\overline{e(\mathbf{x},t)}$ sowie den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor $\overline{\mathbf{S}(\mathbf{x},t)}$ der elektromagnetischen Welle. Schreiben Sie die Ergebnisse als Funktion nur von $\mathbf{E}_0$. (6 Punkte)

5. Die Welle falle auf ein Metall. Berechnen Sie die Eindringtiefe δ im Metall, d.h. die Länge im Metall, in der die Amplitude der Welle auf den Wert $1/\mathrm{e}$ des Wertes der transmittierten Welle an der Oberfläche gedämpft ist. Dabei seien $\bar{n}$ und κ der Brechungsindex bzw. der Extinktionskoeffizient der transmittierten Welle, also $k = \frac{\omega}{c}(\bar{n} + \mathrm{i}\kappa)$. Betrachten Sie eine senkrecht auffallende Welle. (3 Punkte)

Aufgabe 5 (17 Punkte): *Spezielle Relativitätstheorie*

1. Formulieren Sie die Lorentz-Transformation in einer Raum- und einer Zeitdimension, und leiten Sie daraus die Zeitdilatation und Lorentz-Kontraktion her. (5 Punkte)

2. Ein Zug der Ruhelänge Z_0 fahre mit konstanter Geschwindigkeit v in einen Tunnel der Ruhelänge $L_0 < Z_0$. Zeichnen Sie in einem Raumzeit-Diagramm des Ruhesystems des Tunnels den Tunnel und den Zug ein. (3 Punkte)

3. Zeichnen Sie die Koordinatenachsen des Ruhesystems des Zuges ein (leiten Sie den Winkel zwischen x- und x'-Achse her), und kennzeichnen Sie die Ruhelänge des Zuges. Zeigen Sie, daß die Einheitspunkte aller durch einen Lorentz-Boost aus dem Ruhesystem hervorgehenden Inertialsysteme einer Hyperbelgleichung genügen. Zeichnen Sie die Einheitspunkte im neuen Koordinatensystem ein, wobei die Raum- und Zeiteinheitslängen im Ruhesystem des Tunnels durch die Ruhelänge des Tunnels gegeben sind. (6 Punkte)

4. Mit welcher Geschwindigkeit muß der Zug in den Tunnel fahren, damit er für einen Beobachter, welcher im Ruhesystem des Tunnels ruht, komplett im Tunnel verschwindet? (3 Punkte)