Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber

20.04.2004

# 1. Übungsblatt zur Theoretischen Physik II: Elektrodynamik
## Fourier-Analyse

**Abgabe:** 28.04.2004

### **Aufgabe 1** (8 Punkte): *Einsteinsche Summenkonvention*

Das total antisymmetrische Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{ijk}$ ist in 3 Dimensionen folgendermaßen definiert:

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & (i,j,k) \text{ gerade Permutation von (1,2,3)} \\ -1 & (i,j,k) \text{ ungerade Permutation von (1,2,3)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie folgende, in der Elektrodynamik wichtige Ausdrücke mittels Einsteinscher Summenkonvention für eine zweifach stetig differenzierbare Funktion $\phi(\mathbf{x})$ bzw. ein zweifach stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{x})$: $(i)\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$, $(ii)\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$, $(iii)\ \nabla \times \nabla\phi$, $(iv)\ \nabla \cdot (\phi\mathbf{A})$. (2 Punkte)

2. Beweisen Sie folgende wichtige Identitäten: (2 Punkte)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

3. Berechnen Sie $\nabla r$ sowie, für $r \neq 0$, $\nabla(1/r)$ und $\Delta(1/r)$, wobei $r = |\mathbf{x}|$. (2 Punkte)

4. Für welche Funktionen $f(r)$ ist das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = f(r)\mathbf{x}$ auf dem Gebiet $\mathbf{R}^3 \backslash \{0\}$ quellenfrei? (2 Punkte)

### **Aufgabe 2** (2 Punkte): *Integralsätze*

Berechnen Sie Ausdrücke 1.1.$(ii)$ und 1.1.$(iii)$ mittels der Sätze von Gauß und Stokes. (2 Punkte)

### **Aufgabe 3** (8 Punkte): *Fourier-Analyse*

1. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$ und seine periodische Fortsetzung auf $\mathbf{R}$. Stellen Sie die reelle Fourier-Reihe auf. Leiten Sie aus dem Ergebnis folgende Formel ab:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(3 Punkte)

2. Leiten Sie auf analogem Wege folgende Formel ab, indem Sie die Funktion $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$ betrachten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(Dies ist gerade $\zeta(2)$, wobei $\zeta(n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int\limits_0^\infty du \frac{u^{n-1}}{e^u - 1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, n \in \mathbf{N}$ die Riemannsche Zeta-Funktion ist.) (3 Punkte)

3. Berechnen Sie die Fourier-Transformation eines Gaußpakets der Breite $a$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. Welche Breite besitzt die Fourier-Transformierte?

(Benutzen Sie hierzu, daß $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, exp[-\alpha(x + i\beta)^2] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \alpha \in \mathbf{R}$, welches sich mit Hilfe der Funktionentheorie herleiten läßt.) (2 Punkte)