Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber

29.06.2004

10. Übungsblatt zur Theoretischen Physik II: Elektrodynamik
Bildladungen in Dielektrika, Maxwell-Gleichungen

Abgabe: 07.07.2004

Aufgabe 1 (8 Punkte): *Methode der Bildladungen in Dielektrika*

Der ganze Raum sei mit einem Dielektrikum gefüllt, welches im oberen Halbraum ($z > 0$) die Dielektrizitätskonstante ϵ_1 und im unteren Halbraum ($z < 0$) die Dielektrizitätskonstante ϵ_2 besitzt. Auf der positiven z-Achse befinde sich eine Ladung q bei $\mathbf{x}_0 = d\mathbf{e}_z$.

1. Bestimmen Sie das Potential im ganzen Raum. Betrachten Sie dazu den oberen und unteren Halbraum separat.

(i) $z > 0$: Betrachten Sie den ganzen Raum als Dielektrikum mit ϵ_1. Der Einfluß des Dielektrikums ϵ_2 kann durch eine Ladung q' bei $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}_0$ berücksichtigt werden.

(ii) $z < 0$: Betrachten Sie den ganzen Raum als Dielektrikum mit ϵ_2. Das durch q hervorgerufenen Potential wird durch die veränderte Dielektrizitätskonstante modifiziert, welches durch eine veränderte Ladung q'' bei $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}_0$ berücksichtigt werden kann.

Benutzen Sie die Randbedingungen an den Grenzflächen. (3 Punkte)

2. Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte σ_P sowie die Gesamtladung Q_P der x-y-Ebene. (2 Punkte)

3. Wie sieht das Potential im Grenzfall $\epsilon_1 = \epsilon_2$ aus? Für welchen Wert von ϵ_2 ergibt sich das Potential einer Punktladung vor einem leitenden Halbraum? (1 Punkt)

4. Skizzieren Sie die Feldlinien für die Fälle $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $\epsilon_1 > \epsilon_2$ und $\epsilon_1 < \epsilon_2$. (2 Punkte)

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Telegraphengleichung*

1. Betrachten Sie einen ladungsfreien, homogen-isotropen elektrischen Leiter mit Leitfähigkeit σ, welcher dem Ohmschen Gesetz genügt. Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen die Wellengleichungen für $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ her, und zeigen Sie, daß diese gegeben sind durch

$$\left[\left(\Delta - \frac{1}{v_P^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\right]\mathbf{V}(\mathbf{x},t) = 0,$$

wobei $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$ das $\mathbf{E}$- bzw. das $\mathbf{B}$-Feld repräsentiert. Zeigen Sie, daß dies im Falle $\sigma = 0$ eine elektromagnetische Welle mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $v_P = \frac{c}{n}$ mit dem Brechungsindex $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ beschreibt. (2 Punkte)

2. Zeigen Sie, daß unter obigen Voraussetzungen eine verschwindende Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x},t)$ zur Zeit $t = 0$ $\rho(\mathbf{x},t) \equiv 0$ für alle Zeiten t impliziert. (1 Punkt)

3. Berechnen Sie mit dem Ansatz $\mathbf{V}(\mathbf{x},t) = \mathbf{V}_0 e^{i(\mathbf{kx}-\omega t)}$ für $\sigma = 0$ und $\sigma \neq 0$ die (allgemein komplexe) Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c}(\bar{n} + i\kappa)$, und beschreiben Sie, was das physikalisch für eine auf einen Leiter mit $\sigma \neq 0$ treffende Welle bedeutet. Sei $n = \sqrt{\mu\epsilon(\omega)} \in \mathbf{R}$. (2 Punkte)

Aufgabe 3 (7 Punkte): *Reflexion/Transmission*

Eine ebene, linear polarisierte elektromagnetische Welle der Frequenz ω trifft senkrecht auf eine Metalloberfläche mit Leitfähigkeit σ und Permeabilität μ. Für den verallgemeinerten Brechungsindex $\bar{n}$ und den Extinktionskoeffizienten κ des Metalls, definiert durch $k = \frac{\omega}{c}(\bar{n} + i\kappa)$, wobei k die komplexe Wellenzahl ist, gelte

$$\bar{n} = \kappa \approx \sqrt{\frac{\sigma\mu}{2\omega\epsilon_0}} \gg 1,$$

welches für gute Leiter erfüllt ist (vgl. Aufgabe 2, Teil 3).

1. Wie groß sind die Amplituden der reflektierten und der eindringenden Welle? Berechnen Sie sowohl das $\mathbf{E}$- also auch das $\mathbf{H}$-Feld. Legen Sie die Schwingungsrichtung des $\mathbf{E}$-Feldes parallel zur x-Achse und die Grenzfläche in die x-y-Ebene. Benutzen Sie die Randbedingungen der Felder. (4 Punkte)

2. Die eindringende Welle wirkt auf das Metall mit der Kraft

$$\mathbf{K} = \mu_0\mu \int d^3x\, \mathbf{j} \times \mathbf{H}.$$

Welchen Druck übt die Welle im zeitlichen Mittel auf das Metall aus? (3 Punkte)