Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber

27.04.2004

2. Übungsblatt zur Theoretischen Physik II: Elektrodynamik
Greensche Funktionen, Distributionen

Abgabe: 05.05.2004

Aufgabe 1 (3 Punkte): *noch etwas Fourier-Analyse*

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation: ($\tilde{f} = \mathcal{F}(f)$)

(i) $\tilde{\tilde{f}}(t) = f(-t)$

(ii) $\langle f, g\rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle$

(iii) $\mathcal{F}(f * g) = \tilde{f}\,\tilde{g}$

(3 Punkte)

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Distributionen*

1. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der δ-Distribution (durch Anwendung auf Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{S}$):

(i) $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

(ii) $\delta(g(t)) = \sum_i \frac{1}{|g'(t_i)|}\delta(t - t_i)$, t_i Nullstelle von $g(t)$

(2 Punkte)

2. Betrachten Sie die Funktionen

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1 + n^2 t^2}.$$

Zeigen Sie, daß $f_n(t)$ im Grenzfall $n \to \infty$ gegen $\delta(t)$ konvergiert.

(2 Punkte)

3. Beweisen Sie durch Anwendung auf Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{S}$:

(i) $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

(ii) $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(t)\delta(t)$,

wobei $f \in \mathscr{S}$. (2 Punkte)

Aufgabe 3 (11 Punkte): *Greensche Funktionen*

In dieser Aufgabe soll die retardierte Greensche Funktion G_n der Wellengleichung in n Raumdimensionen (in der folgenden Aufgabe ist $c = 1$ gesetzt)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n\right) G_n(t, x) = \delta(t)\delta(x) \qquad (1)$$

berechnet werden, wobei $G_n(t < 0, x) = 0$ und die räumlichen Ableitungen im räumlich Unendlichen verschwinden. Dabei ist $x = (x_1, ..., x_n)$ und

$$\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Machen Sie den Ansatz $G_n(t, x) = g_n(t, r)$ mit $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

1. Zeigen Sie, daß

$$G_n(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n+1}\, G_{n+1}(t, x, x_{n+1})$$

eine Greensche Funktion gemäß (1) in n Raumdimensionen ist, wenn G_{n+1} eine solche in $n + 1$ Raumdimensionen war. *(Absteigemethode von Hadamard)* (1 Punkt)

2. Prüfen Sie durch direktes Nachrechnen nach, daß

$$g_1(t, r) = \frac{1}{2}\Theta(t - r), \quad g_3(t, r) = \frac{1}{4\pi}\frac{\delta(t - r)}{r}$$

gilt, und berechnen Sie daraus $g_2(t, r)$.
(Benutzen Sie hierzu die rotationssymmetrischen Darstellungen der Ableitungsoperatoren in Kugelkoordinaten: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$, $\nabla\delta(t - r) = \frac{\partial}{\partial r}\delta(t - r)\frac{\mathbf{x}}{r}$, sowie $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(x)$ und 2.1(ii)). (4 Punkte)

3. Indem Sie die Absteigemethode zweimal hintereinander ausführen, schreiben Sie $g_n(t, r)$ als Flächenintegral über einen Ausdruck, der g_{n+2} enthält. Benutzen Sie Polarkoordinaten für das Flächenintegral, um die Rekursionsformel

$$g_{n+2}(t, r) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} g_n(t, r)$$

herzuleiten. (2 Punkte)

4. Geben Sie exakte Formeln für g_{2k} und g_{2k+1} an, die noch Differentialoperatoren enthalten dürfen, und bestimmen Sie daraus g_4 und g_5. (3 Punkte)

5. Physikalisch ist hier die Greensche Funktion die zeitliche und räumliche Entwicklung eines zur Zeit $t = 0$ und zum Ort $x = 0$ ausgesandten (δ-förmigen) Lichtpulses. Welches Signal (qualitativ) empfängt ein Beobachter für $t \geq r$ für gerade und ungerade räumliche Dimensionen? (Es zeigt sich, daß allgemein bei geraden räumlichen Dimensionen n ein "Nachhall" auftritt, bei ungeraden n jedoch nicht.) (1 Punkt)