

6. Übungsblatt zur Theoretischen Physik II: Elektrodynamik  
 Multipolentwicklung, Magnetostatik

Abgabe: 09.06.2004

**Aufgabe 1 (7 Punkte): Elektrostatische Multipolentwicklung**

1. In der Vorlesung wurde die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten hergeleitet. Leiten Sie diese nun in kartesischen Koordinaten her. Entwickeln Sie dazu das elektrostatische Potential

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

in eine Taylorreihe bis zur 2. Ordnung (entsprechend dem Quadrupolmoment). Bringen Sie die Entwicklung in die Form

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \left( \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{r^5} \right),$$

indem Sie das Quadrupolmoment  $\mathbf{Q}$  so definieren, daß es spurfrei ist ( $Q_{ii} = 0$ ). (3 Punkte)

2. Betrachten Sie das Ellipsoid

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 \leq 1$$

mit homogenverteilter Gesamtladung  $Q$  und Halbachsen  $a$ ,  $a$  und  $b$ . Berechnen Sie das Quadrupolmoment und geben Sie das Potential in Quadrupolnäherung an. (Benutzen Sie Übung 5, Aufgabe 2.) Betrachten Sie in dieser Näherung den Fall, daß  $\left(\frac{b}{a}\right) = 1 + \epsilon$ ,  $|\epsilon| \ll 1$  ist und diskutieren Sie das Ergebnis! (4 Punkte)

**Aufgabe 2 (8 Punkte): Magnetostatik**

Eine homogen geladene Kugelschale der Gesamtladung  $Q$  rotiere mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse.

1. Geben Sie die Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  an. (1 Punkt)
2. Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment. (2 Punkte)
3. Bestimmen Sie das Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  und die magnetische Induktion  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  im ganzen Raum. (5 Punkte)

(Hinweis:  $\int_{-1}^1 \xi(c - \xi)^{-1/2} d\xi = \frac{4}{3}c(\sqrt{c+1} - \sqrt{c-1}) - \frac{2}{3}(\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}).$ )

**Aufgabe 3 (5 Punkte): Spule**

Betrachten Sie eine (unendlich lange) Spule mit  $N_S$  Windungen pro Länge  $l_S$  auf einem Kreiszylinder mit Radius  $R$ , welche von einem konstanten Strom  $I$  durchflossen wird.

1. Geben Sie die Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  an. (1 Punkt)
2. Bestimmen Sie das Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  und die magnetische Induktion  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  innerhalb und außerhalb der Spule. Machen Sie hierzu einen geeigneten Ansatz für das Vektorpotential und benutzen Sie das Ampèresche Gesetz. Mit den Rand- und Stetigkeitsbedingungen kann dann  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ , und daraus  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , bestimmt werden. (4 Punkte)