Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber

22.06.2004

9. Übungsblatt zur Theoretischen Physik II: Elektrodynamik
Liénard-Wiechert-Potentiale,Dielektrika

Abgabe: 30.06.2004

Aufgabe 1 (9 Punkte): *Liénard-Wiechert-Potentiale*

In dieser Aufgabe betrachten wir die Potentiale von bewegten Ladungen, die sogenannten Liénard-Wiechert-Potentiale.

1. Ausgehend von der allgemeinen Form der retardierten Potentiale

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x' \int \mathrm{d}t' \, \frac{\mathrm{h}(\mathbf{x}',\mathrm{t}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\delta(\mathrm{t}-\mathrm{t}'-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{\mathrm{c}}),$$

wobei $h(\mathbf{x},t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x},t) & : \ u(\mathbf{x},t) = \phi(\mathbf{x},t) \\ \mu_0 j_i(\mathbf{x},t) & : \ u(\mathbf{x},t) = A_i(\mathbf{x},t) \end{cases}$, zeigen Sie, daß die Potentiale einer bewegten Punktladung q mit der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x},t) = q\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))$ und der Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = q\mathbf{V}(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))$ durch

$$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R(t') - \frac{\mathbf{V}(t')\cdot\mathbf{R}(t')}{c}}\Big|_{t'=t_{ret}} \tag{1}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{V}(t')}{R(t') - \frac{\mathbf{V}(t')\cdot\mathbf{R}(t')}{c}}\Big|_{t'=t_{ret}}. \tag{2}$$

gegeben sind, wobei t_{ret} die Lösung der Gleichung $f(t') = t - t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c} = 0$ und $\mathbf{R}(t) := \mathbf{x} - \mathbf{X}(t)$ ist. Warum hat $f(t') = 0$ nur eine Lösung? (Hinweis: $|\mathbf{V}(t)| < c$.) (4 Punkte)

2. Berechnen Sie die Liénard-Wiechert-Potentiale gemäß (1) und (2) für eine Punktladung q, die sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = v\mathbf{e}_z$ auf der z-Achse bewegt, und zeigen Sie, daß diese durch

$$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\tilde{R}} \text{ und } \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{\tilde{R}}\mathbf{e}_z$$

gegeben sind, mit $\tilde{R} = \sqrt{(1-\beta^2)(x^2+y^2)+(z-vt)^2}$ und $\beta = \frac{v}{c}$. Zur Zeit $t = 0$ sei die Ladung im Ursprung. (3 Punkte)

3. Berechnen Sie für den Fall in Teil 2 die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$. (2 Punkte)

Aufgabe 2 (2 Punkte): *Randbedingungen*

Leiten Sie aus den stationären Maxwell-Gleichungen das Verhalten der Felder $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ an den Grenzflächen zwischen zwei Materialien der Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 bzw. ϵ_2 und der Permeabilitäten μ_1 bzw. μ_2 her. Betrachten Sie Tangential- sowie Normalkomponenten, und beschränken Sie sich auf die Fälle, wo die einfachen Relationen $\mathbf{D} = \epsilon\,\epsilon_0\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ gelten. (Hinweis: Benutzen Sie die Sätze von Gauß und Stokes!)

Aufgabe 3 (9 Punkte): *Hohlraum im Dielektrikum*

Betrachten Sie einen kugelförmigen Hohlraum mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung, welcher von einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ umgeben ist. Weit vom Hohlraum entfernt ($r \to \infty$) sei das Potential $\phi_\infty = \phi_1 + \phi_2$ mit $\phi_1 = -E_0 z$ und $\phi_2 = -\frac{1}{2}F_0(3z^2 - r^2)$, E_0 und F_0 Konstanten, vorgegeben. Berechnen Sie zu dieser Anordnung das Potential in folgender Weise:

1. Da keine freien Ladungen vorhanden sind, genügt das Potential der Laplacegleichung $\Delta\phi = 0$. Machen Sie für das Potential im Innen- (ϕ_i) und Außenraum (ϕ_a) einen Ansatz wie in der Vorlesung (Entwicklung nach Legendre-Polynome). Untersuchen Sie das Verhalten der Potentiale im Ursprung und im Unendlichen, und schränken Sie dadurch die Koeffizienten ein. (2 Punkte)

2. Um die verbleibenden Koeffizienten zu bestimmen, nutzen Sie die Stetigkeitsbedingungen des Potentials bei $r = R$ aus:

$$\phi_i(R,\theta) = \phi_a(R,\theta) \qquad \partial_r\phi_i(r,\theta)|_{r=R} = \epsilon\partial_r\phi_a(r,\theta)|_{r=R}.$$

Nutzen Sie dabei die lineare Unabhängigkeit der Legendre-Polynome aus. (3 Punkte)

3. Geben Sie die Potentiale ϕ_i und ϕ_a an. Zeigen Sie, daß das durch den Hohlraum im Dielektrikum induzierte Feld eine Überlagerung aus Dipol- und Quadrupolfeld ist. Geben Sie die entsprechenden Multipolmomente $\mathbf{p}$ und $\mathbf{Q}$ an. Vergleichen Sie $\mathbf{E}_\infty$ und $\mathbf{E}_i$. (4 Punkte)