Institut für
Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. C. Kiefer

1. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Sommersemester 2005

Aufgabe 1: **Wiederholung** (4 Punkte)

Beschreiben Sie auf maximal zwei Seiten die Grundbegriffe der Allgemeinen Relativitätstheorie und die wichtigsten Konsequenzen.

Aufgabe 2: **Kruskal-Koordinaten** (5 Punkte)

Leiten Sie die in der Vorlesung angegebene Form des Linienelementes der Schwarzschild-Metrik in Kruskal-Koordinaten ab. Führen Sie dazu zunächst die neue Radialkoordinate (für $r > 2M$)

$$r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \tag{1}$$

ein und vollführen dann die Koordinatentransformation

$$X = \exp\left(\frac{r_*}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) , \quad T = \exp\left(\frac{r_*}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) . \tag{2}$$

Aufgabe 3: **Ein weiteres Koordinatensystem** (5 Punkte)

Konstruieren Sie ein am Ereignishorizont singularitätsfreies Koordinatensystem, indem Sie die Schwarzschild-Zeit t gemäß

$$t \mapsto T = t + f(r) \tag{3}$$

transformieren. Bestimmen Sie $f(r)$ durch die Forderung, dass der Faktor vor $\mathrm{d}r^2$ im transformierten Linienelement gleich -1 ist. Wie sieht das transformierte Linienelement aus? Ist es noch statisch? Welche Bereiche des Kruskal-Diagramms werden durch diese Koordinaten überdeckt?

Bemerkung: Hierbei handelt es sich um das historisch früheste Beispiel eines am Horizont singularitätsfreien Koordinatensystems, aufgestellt von Painlevé (1921) und Gullstrand (1922).

Aufgabe 4: **Penrose-Diagramme** (6 Punkte)

a) Formulieren Sie das Linienelement für den Minkowski-Raum in Kugelkoordinaten (t, r, Θ, ϕ). Vollführen Sie dann die Koordinatentransformation $u = t - r$, $v = t + r$. Wie sieht dann das Linienelement aus? Welche Interpretation haben die Koordinaten u und v?

b) Unternehmen Sie jetzt eine weitere Koordinatentransformation $(u, v) \mapsto (u', v')$ mit

$$u' = \arctan(u) =: t' - r' , \quad v' = \arctan(v) =: t' + r' . \tag{4}$$

Schraffieren Sie in einem (t', r')-Diagramm den Bereich, den diese Koordinaten überdecken. Zeichnen Sie einen radialen Lichtstrahl ein, der (in den ursprünglichen Koordinaten) aus dem Unendlichen einläuft, durch $r = 0$ geht und wieder ins Unendliche läuft. Skizzieren Sie in einem separaten (t', r')-Diagramm die Flächen $t =$ konstant und $r =$ konstant.

c) Berechnen Sie das Linienelement in den gestrichenen Koordinaten und zeigen Sie, dass es konform zu dem Linienelement

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = 4\left(\mathrm{d}t' - \mathrm{d}r'^2\right) - \sin^2(2r')\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{5}$$

ist.

Abgabe: Di, 19.4.2005