

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Sommersemester 2005

Aufgabe 8: Akkretionsscheiben (4 Punkte)

Schätzen Sie die charakteristische Energie ab, die von einer Akkretionsscheibe mit Radius R um ein kompaktes kugelsymmetrisches Objekt abgestrahlt wird. Nehmen Sie dazu der Einfachheit halber an (was nicht ganz realistisch ist), dass die Leuchtkraft die eines Schwarzen Körpers der Größe R und Temperatur T ist und einen gegebenen Bruchteil ϵ der Eddington-Leuchtkraft beträgt. (Setzen Sie am Ende $\epsilon \approx 0,5$ ein.)

Aufgabe 9: Rotverschiebung beim Gravitationskollaps (4 Punkte)

Ein Beobachter auf der Oberfläche eines kugelförmigen Sterns sende in kurzen Eigenzeitintervallen Δs radiale Lichtsignale ab, d.h. mit einer konstanten Frequenz $\omega_* = 2\pi/\Delta s$. Diese Signale werden von einem stationären Beobachter in großer Entfernung $r = r_E$ empfangen, also mit einer Frequenz $\omega_E = 2\pi/\Delta t_E$, wobei sich Δt_E auf die Schwarzschild-Zeit bezieht. Berechnen Sie die Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses ω_E/ω_* von t_E . Geben Sie die Zeitskala der Rotverschiebung in Sekunden an, wenn Sie M in Sonnenmassen messen.

Hinweis: Benutzen Sie die in der Vorlesung diskutierten Eddington-Finkelstein-Koordinaten und nehmen Sie an, dass sich der aussendende Beobachter bereits in der Nähe des Schwarzschildradius befindet.

Aufgabe 10: **Newtonsche Kosmologie** (12 Punkte)

- a) Wie groß ist in der Newtonschen Gravitationstheorie die Gesamtkraft einer unendlich ausgedehnten Massenverteilung mit Massendichte $\rho(\vec{x})$ auf eine Masse m , die sich im Ursprung befindet? Welches Problem tritt bei einer unendlich großen, homogenen Massenverteilung auf?
- b) Betrachten Sie ein „Universum“ mit einer homogenen Massendichte $\rho(t)$. Formulieren Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung für eine beliebige Galaxie der Masse m , deren Radiusvektor auf die Erde bezogen $\vec{x}(t)$ sei. Nach dem Hubble-Gesetz gilt $\vec{x}(t) = a(t)\vec{x}_0$ mit $\dot{a}/a = H(t)$ (\vec{x}_0 bezeichne den Ort zu einer beliebigen gegebenen Zeit). Formulieren Sie die Bewegungsgleichung für $a(t)$. Benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung, um $\rho(t)$ zu eliminieren. Ist ein statisches Universum ($a = \text{const.}$) möglich? Zeigen Sie, dass sich durch Integration der „Energiesatz“

$$\dot{a}^2 - \frac{C}{a} + k = 0 \quad (1)$$

ergibt, wobei $C > 0$ und k Konstanten sind. Welche Interpretation hat k ? Skizzieren Sie grob $a(t)$ für die drei Fälle $k < 0$, $k = 0$ und $k > 0$.

- c) Fügen Sie zur Newtonschen Gravitationskraft ad hoc eine abstoßende Kraft $m\Lambda\vec{x}/3$ mit der „Kosmologischen Konstante“ $\Lambda > 0$ hinzu. Formulieren Sie die abgeänderte Bewegungsgleichung für $a(t)$ und den abgeänderten „Energiesatz“. Ist jetzt ein statisches Universum möglich?
- d) Fassen Sie kurz in eigenen Worten zusammen, was Sie für die wichtigsten Unterschiede der Newtonschen Kosmologie zur allgemeinrelativistischen Kosmologie halten. Wo liegen die Grenzen der Newtonschen Kosmologie?

Abgabe: Di, 10.5.2005