Institut für
Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. C. Kiefer

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II
im Sommersemester 2005

Aufgabe 8: **Akkretionsscheiben** (4 Punkte)

Schätzen Sie die charakteristische Energie ab, die von einer Akkretionsscheibe mit Radius R um ein kompaktes kugelsymmetrisches Objekt abgestrahlt wird. Nehmen Sie dazu der Einfachheit halber an (was nicht ganz realistisch ist), dass die Leuchtkraft die eines Schwarzen Körpers der Größe R und Temperatur T ist und einen gegebenen Bruchteil ϵ der Edddington-Leuchtkraft beträgt. (Setzen Sie am Ende $\epsilon \approx 0,5$ ein.)

Aufgabe 9: **Rotverschiebung beim Gravitationskollaps** (4 Punkte)

Ein Beobachter auf der Oberfläche eines kugelförmigen Sterns sende in kurzen Eigenzeitintervallen Δs radiale Lichtsignale ab, d.h. mit einer konstanten Frequenz $\omega_* = 2\pi/\Delta s$. Diese Signale werden von einem stationären Beobachter in großer Entfernung $r = r_E$ empfangen, also mit einer Frequenz $\omega_E = 2\pi/\Delta t_E$, wobei sich Δt_E auf die Schwarzschild-Zeit bezieht. Berechnen Sie die Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses ω_E/ω_* von t_E. Geben Sie die Zeitskala der Rotverschiebung in Sekunden an, wenn Sie M in Sonnenmassen messen.

Hinweis: Benutzen Sie die in der Vorlesung diskutierten Eddington-Finkelstein-Koordinaten und nehmen Sie an, dass sich der aussendende Beobachter bereits in der Nähe des Schwarzschildradius befindet.

Aufgabe 10: **Newtonsche Kosmologie** (12 Punkte)

a) Wie groß ist in der Newtonschen Gravitationstheorie die Gesamtkraft einer unendlich ausgedehnten Massenverteilung mit Massendichte $\rho(\vec{x})$ auf eine Masse m, die sich im Ursprung befinde? Welches Problem tritt bei einer unendlichen großen, homogenen Massenverteilung auf?

b) Betrachten Sie ein ,,Universum" mit einer homogenen Massendichte $\rho(t)$. Formulieren Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung für eine beliebige Galaxie der Massse m, deren Radiusvektor auf die Erde bezogen $\vec{x}(t)$ sei. Nach dem Hubble-Gesetz gilt $\vec{x}(t) = a(t)\vec{x}_0$ mit $\dot{a}/a = H(t)$ ($\vec{x}_0$ bezeichne den Ort zu einer beliebigen gegebenen Zeit). Formulieren Sie die Bewegungsgleichung für $a(t)$. Benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung, um $\rho(t)$ zu eliminieren. Ist ein statisches Universum ($a = \text{const.}$) möglich? Zeigen Sie, dass sich durch Integration der ,,Energiesatz"

$$\dot{a}^2 - \frac{C}{a} + k = 0 \tag{1}$$

ergibt, wobei $C > 0$ und k Konstanten sind. Welche Interpretation hat k? Skizzieren Sie grob $a(t)$ für die drei Fälle $k < 0$, $k = 0$ und $k > 0$.

c) Fügen Sie zur Newtonschen Gravitationskraft ad hoc eine abstoßende Kraft $m\Lambda\vec{x}/3$ mit der ,,Kosmologischen Konstante" $\Lambda > 0$ hinzu. Formulieren Sie die abgeänderte Bewegungsgleichung für $a(t)$ und den abgeänderten ,,Energiesatz". Ist jetzt ein statisches Universum möglich?

d) Fassen Sie kurz in eigenen Worten zusammen, was Sie für die wichtigsten Unterschiede der Newtonschen Kosmologie zur allgemeinrelativistischen Kosmologie halten. Wo liegen die Grenzen der Newtonschen Kosmologie?

Abgabe: Di, 10.5.2005