

5. Übungsblatt zur Vorlesung  
**Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie II**  
im Sommersemester 2005

Aufgabe 11: **Ideale Flüssigkeiten in der Kosmologie**  
(4+6+4+4 Punkte)

Betrachten Sie eine ideale Flüssigkeit in einem Friedmann-Lemaître-Modell.

- a) Zeigen Sie, dass sich mitbewegte Beobachter auf Geodätischen bewegen.
- b) Werten Sie für solche Beobachter die kovariante Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors der idealen Flüssigkeit aus und zeigen Sie, dass diese nur *eine* nichttriviale Gleichung liefert, die ihrerseits auch aus den Friedmann-Gleichungen gefolgert werden kann.
- c) Betrachten Sie eine Zustandsgleichung der Form  $p = w\rho$  mit  $w = \text{const.}$  Berechnen Sie die Funktion  $\rho(a)$ . Für welche Werte von  $w$  ist  $\ddot{a}(t) > 0$ ? Wann ist die starke Energiebedingung erfüllt? Berechnen Sie  $\rho(a)$  für ein sogenanntes „Chaplygin-Gas“, welches der Zustandsgleichung  $p = -A/\rho$  ( $A = \text{const.} > 0$ ) genügt und diskutieren Sie die Grenzfälle  $a \rightarrow 0$  und  $a \rightarrow \infty$ .
- d) Betrachten Sie ein flaches Friedmann-Universum, das  $\Omega_m + \Omega_x = 1$  erfüllt, wobei sich  $\Omega_m$  wie in der Vorlesung auf drucklose Materie bezieht und  $\Omega_x = \rho_x/\rho_c$  für eine hypothetische Energieform mit Dichte  $\rho_x$  und Zustandsgleichung  $p_x = w_x\rho_x$  steht. Welcher Bedingung muss  $w_x$  in Abhängigkeit von  $\Omega_m$  genügen, damit die Expansion beschleunigt ist? Berechnen Sie den Hubble-Parameter als Funktion der Rotverschiebung,  $H(z)$ .

Aufgabe 12:

(2 Punkte)

Beobachtungen legen nahe, dass für das heutige Universum  $\Omega_{m,0} \approx 0,3$  und  $\Omega_v \approx 0,7$  ist. Bei welcher Rotverschiebung war die Energiedichte der Materie gleich der des Vakuums?

Abgabe: Di, 24.5.2005