

# Gravitomagnetismus

Florian Löbbert

26. April 2006

## Zusammenfassung

Das Wort Gravitomagnetismus beschreibt die Effekte der Gravitation, die kurz hinter dem Newtonschen Tellerrand sichtbar werden. Interessanterweise ähnelt diese Stufe der Betrachtung in verblüffender Weise der Maxwell'schen Theorie des Elektromagnetismus. Im Folgenden soll der Gravitomagnetismus kurz vorgestellt werden. Es werden die Gravitomaxwell-Gleichungen aus der linearen Näherung der Einsteinschen Feldgleichungen hergeleitet, Analogien betrachtet sowie deren experimentell sichtbare Effekte diskutiert.

## 1 Konventionen

Im folgenden soll die Minkowski-Metrik die Form

$$\eta_{ik} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (1)$$

haben. Griechische Indizes sollen von 1 bis 3, lateinische Indizes von 0 bis 4 laufen. Es wird sich zeigen, dass in der hier betrachteten Näherung Indizes mittels  $\eta_{ik}$  hoch und runter gezogen werden, so dass es keinen Unterschied macht ob griechische Indizes oben oder unten stehen. Des Weiteren soll der Ricci-Tensor als Spur über den ersten und letzten Index des Riemann-Tensors definiert sein

$$R_{ik} := R^j{}_{ikj}. \quad (2)$$

Im Gegensatz dazu wird der Ricci-Tensor auch oft als Summe über den ersten und vorletzten Index definiert, was einen Vorzeichenwechsel der rechten Seite der Einsteinschen Feldgleichungen bewirkt.

## 2 Die lineare Näherung der Einsteinschen Feldgleichungen

In diesem Kapitel sollen kurz die linearisierten Feldgleichungen der Gravitation, die die Grundlage des Gravitomagnetismus bilden, abgeleitet werden (vgl. [2]). Dazu nehmen wir an, die Raumzeit sei nahezu flach, d.h.

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \psi_{ik}, \quad (3)$$

wobei  $\psi_{ik}^2$  sowie die Quadrate der Ableitungen von  $\psi_{ik}$  zu vernachlässigen seien. Damit findet man die Christoffel-Symbole

$$\begin{aligned} \Gamma_{jik} &= \frac{1}{2} (g_{ji,k} + g_{kj,i} - g_{ik,j}) \\ &= \frac{1}{2} (\psi_{ji,k} + \psi_{kj,i} - \psi_{ik,j}), \end{aligned} \quad (4)$$

den Krümmungstensor

$$R_{kmj}^i = \Gamma_{kj,m}^i - \Gamma_{km,j}^i + \underbrace{\Gamma_{lm}^r \Gamma_{kj}^l - \Gamma_{lj}^r \Gamma_{km}^l}_{\mathcal{O}(\psi'^2)} \quad (5)$$

und mit

$$\Gamma_{ki}^i = g^{im} \underbrace{\Gamma_{mki}}_{\mathcal{O}(\psi')} \approx \eta^{im} \Gamma_{mki} \quad (6)$$

auch Ricci-Tensor und Ricci-Skalar

$$\begin{aligned} R_{km} &= R_{kmi}^i & (7) \\ &= \Gamma_{ki,m}^i - \Gamma_{km,i}^i \\ &= \eta^{il} (\Gamma_{lki,m} - \Gamma_{lkm,i}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{il} (\psi_{kl,im} + \psi_{il,km} - \psi_{ki,lm} - \psi_{kl,mi} - \psi_{ml,ki} + \psi_{km,li}) \\ &= \frac{1}{2} (\psi_{i,km}^i - \psi_{k,mi}^i - \psi_{m,ik}^i + \psi_{km,i}^i) \\ R &= g^{km} \underbrace{R_{km}}_{\mathcal{O}(\psi'^2)} \approx \eta^{km} R_{km} \\ &= \frac{1}{2} (\psi_{i,k}^i{}^k - \psi_{ki,ik} - \psi^{ki}{}_{,ik} + \psi_k{}^k{}_{,i}) \\ &= \psi_{i,k}^i{}^k - \psi^{ik}{}_{,ik}. \end{aligned} \quad (8)$$

Setzt man dies nun in die Feldgleichungen

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (9)$$

ein, so findet man

$$\begin{aligned}
-\kappa T_{km} &= R_{km} - \frac{1}{2} g_{km} \underbrace{R}_{\mathcal{O}(\psi'')} \\
&= R_{km} - \frac{1}{2} \eta_{km} R \\
&= \frac{1}{2} (\psi^i_{i,km} + \psi_{km,i}{}^i - \psi^i_{m,ik} - \psi^i_{k,mi} \\
&\quad - \eta_{km} \psi^i{}_{i,j}{}^j - \eta_{km} \psi^{ij}{}_{,ij}). \tag{10}
\end{aligned}$$

Dies ist bereits ein lineares Gleichungssystem, welches sich jedoch durch geschickte Koordinatenwahl noch entkoppeln lässt. Hierzu untersucht man zunächst wie sich die  $\psi_{ik}$  unter Koordinatentransformationen der Form

$$x^i = x'^i + \Lambda^i(x'), \quad (\Lambda^i)^2 \approx 0 \tag{11}$$

verhalten. Da wir kleine  $\psi_{ik}$  vorausgesetzt haben, dürfen auch die Transformationen nur kleine Abweichungen von den Minkowskikoordinaten zulassen. Das heißt die  $\Lambda^i$  sollen in erster Ordnung klein und der Unterschied zwischen  $\Lambda^i$  und  $\Lambda'^i$  zu vernachlässigen sein:

$$\begin{aligned}
\eta_{ik} + \psi'_{ik} = g'_{ik} &= \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} g_{jm} \\
&= \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} (\eta_{jm} + \psi_{jm}) \\
&= (\delta^j{}_i + \Lambda^j{}_{,i}) (\delta^m{}_k + \Lambda^m{}_{,k}) (\eta_{jm} + \psi_{jm}) \\
&= (\delta^j{}_i \delta^m{}_k + \delta^j{}_i \Lambda^m{}_{,k} + \delta^m{}_k \Lambda^j{}_{,i} + \Lambda^j{}_{,i} \Lambda^m{}_{,k}) (\eta_{jm} + \psi_{jm}) \\
&= \eta_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i} + \psi_{ik} + \underbrace{\Lambda^j{}_{,i} \Lambda_{j,k}}_{\text{klein}} \\
&\quad + \underbrace{\psi_{im} \Lambda^m{}_{,k} + \psi_{jk} \Lambda^j{}_{,i} + \psi_{jm} \Lambda^j{}_{,i} \Lambda^m{}_{,k}}_{\text{klein}}
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\psi'_{ik} = \psi_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i}, \tag{12}$$

was der Eichfreiheit für das elektrodynamische Potential

$$A'_i = A_i + \Lambda_{,i} \tag{13}$$

ähnelt. Diese Eichfreiheit wurde in der Elektrodynamik zur Vereinfachung der Gleichung

$$\square A_i - A^j{}_{,ji} = 4\pi j_i \tag{14}$$

zur bekannten Wellengleichung durch die Lorenz-Eichung  $A^j{}_{,j} = 0$  ausgenutzt.

Hier fordert man für  $\psi_{ik}$ , die **harmonische Eichung**

$$\psi_{ik,{}^k} = \frac{1}{2}\psi^k{}_{k,i}, \quad (15)$$

welche sich durch eine Koordinatentransformation der oben betrachteten Form rechtfertigen lässt. Mit Hilfe dieser Eichung vereinfacht sich der Ricci-Tensor zu

$$\begin{aligned} R_{km} &= \frac{1}{2} (\psi_{i,km}{}^i - \psi^i{}_{k,im} - \psi^i{}_{m,ik} + \psi_{km,{}^i i}) \\ &\stackrel{(15)}{=} \frac{1}{2} \left( \psi^i{}_{i,km} - \frac{1}{2}\psi^i{}_{i,km} - \frac{1}{2}\psi^i{}_{i,km} + \psi_{km,{}^i i} \right) \\ &= \frac{1}{2}\psi_{km,{}^i i} \\ &= \frac{1}{2}\square\psi_{km} \end{aligned} \quad (16)$$

und der Ricci-Skalar zu

$$\begin{aligned} R &= \psi^i{}_{i,{}^k k} - \psi^{ik}{}_{,ik} \\ &\stackrel{(15)}{=} \psi^i{}_{i,{}^k k} - \frac{1}{2}\psi^i{}_{i,{}^k k} \\ &= \frac{1}{2}\psi^i{}_{i,{}^k k} \\ &= \frac{1}{2}\square\psi^i{}_{i}. \end{aligned} \quad (17)$$

Somit erhält man für die lineare Näherung der Feldgleichungen

$$\frac{1}{2}\square\psi_{km} - \frac{1}{4}\eta_{km}\square\psi^i{}_{i} = -\kappa T_{km}. \quad (18)$$

Hieraus findet man durch Bildung der Spur

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\square\psi^i{}_{i} - \square\psi^i{}_{i} &= -\kappa T^i{}_{i} \\ \Rightarrow \square\psi^i{}_{i} &= 2\kappa T^i{}_{i}, \end{aligned} \quad (19)$$

woraus man schließlich die entkoppelte Version der linearisierten Feldgleichungen ableitet

$$\square\psi_{km} = -2\kappa \left( T_{km} - \frac{1}{2}\eta_{km}T^i{}_{i} \right). \quad (20)$$

Um die Maxwell'sche Struktur in der linearen Näherung sichtbar zu machen, schreibt man diese linearisierten Gleichungen noch etwas um. Dazu definiert man

$$\bar{\psi}_{ik} := \psi_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}\psi^l{}_l. \quad (21)$$

Mit (19) folgt dann die endgültige Version der **linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen**

$$\begin{aligned} \square \bar{\psi}_{ik} &= \square \psi_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}\square \psi^l{}_l \\ &= -2\kappa \left( T_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}T^l{}_l \right) - \kappa\eta_{ik}T^l{}_l \\ &\Rightarrow \boxed{\square \bar{\psi}_{ik} = -2\kappa T_{ik}.} \end{aligned} \quad (22)$$

Aus der Elektrodynamik ist die retardierte Lösung

$$\bar{\psi}_{ik}(\mathbf{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{T_{ik}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (23)$$

$$t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \quad (24)$$

dieser Gleichung bekannt. Dieselbe linearisierte Gleichung (22) erhält man auch im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie, wenn man annimmt, dass  $\bar{\psi}_{ik}$  ein Lorentz kovariantes, masseloses Spin-2 Tensorfeld ist und von einer entsprechenden Lagrangefunktion ausgeht[8]. Aus der harmonischen Eichung für die  $\psi_{ik}$

$$\psi_{ik,}{}^k = \frac{1}{2}\psi^k{}_{k,i}$$

folgt

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{ik,}{}^k &= \psi_{ik,}{}^k - \frac{1}{2}\eta_{ik}\psi^l{}_{l,}{}^k \\ &= \frac{1}{2}\psi^k{}_{k,i} - \frac{1}{2}\psi^l{}_{l,i} \\ &\Rightarrow \boxed{\bar{\psi}_{ik,}{}^k = 0.} \end{aligned} \quad (25)$$

### 3 Die Gravito-Maxwell-Gleichungen

Betrachtet man jetzt die Eichung (25) für die  $\bar{\psi}_{ik}$  etwas genauer

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{i0,0} - \bar{\psi}_{i\alpha,}{}^\alpha &= 0 \\ \Rightarrow \bar{\psi}_{00,0} - \bar{\psi}_{0\alpha,}{}^\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

so ähnelt dies bereits der Lorenz-Eichung der Elektrodynamik für die Potentiale  $\Phi$  und  $\mathbf{A}$ . Definiert man nun ein gravitoelektrisches bzw. gravitomagnetisches Potential

$$\Phi_g := \frac{c^2}{4} \bar{\psi}_{00} \quad (27)$$

$$(A_g)_\alpha := -\frac{c^2}{2} \bar{\psi}_{0\alpha}, \quad (28)$$

so findet man fast genau die aus der Elektrodynamik bekannte Lorenz-Eichung für diese Felder

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2\phi_{g,0} + (A_g)_{\alpha, \alpha} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{c} \partial_t \Phi_g + \nabla \cdot \frac{\mathbf{A}_g}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Der Faktor  $1/2$  vor dem  $\mathbf{A}_g$  hätte natürlich auch noch in die Definition mit aufgenommen werden können, um vollständige Übereinstimmung zu erhalten, allerdings findet man dann an anderer Stelle abweichende Vorfaktoren im Vergleich mit der Maxwell'schen Struktur. Diese Definition ist so gewählt, dass letztendlich eine möglichst große Analogie besteht. Eine vollständige Übereinstimmung ist nicht zu erreichen.

Im Folgenden soll der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit mit Geschwindigkeiten klein gegen  $c$  betrachtet werden. Hierzu führt man die Massendichte  $\rho_m$  und die Massenstromdichte  $\mathbf{j}_m = \rho_m \cdot \mathbf{v}$  ein. Der Energie-Impuls-Tensor habe die Gestalt

$$T^{ik} = \left( \begin{array}{c|c} \rho_m c^2 & \mathbf{j}_m c \\ \hline \mathbf{j}_m c & \mathcal{O}(c^0) \end{array} \right). \quad (30)$$

Mit (22) und  $T_{0\alpha} = -T^{0\alpha}$ ,  $T_{00} = T^{00}$ ,  $T_{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}$  folgt also

$$\left( \begin{array}{c|c} \square \bar{\psi}_{00} & \square \bar{\psi}_{0\alpha} \\ \hline \square \bar{\psi}_{0\alpha} & \square \bar{\psi}_{\alpha\beta} \end{array} \right) = -2\kappa \left( \begin{array}{c|c} \rho_m c^2 & -\mathbf{j}_m c \\ \hline -\mathbf{j}_m c & \mathcal{O}(c^0) \end{array} \right), \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (31)$$

Definiert man weiter

$$\mathbf{E}_g := -\nabla \Phi_g - \frac{1}{c} \partial_t \left( \frac{\mathbf{A}_g}{2} \right) \quad (32)$$

$$\mathbf{B}_g := \nabla \times \mathbf{A}_g, \quad (33)$$

so findet man für die Komponenten der obigen Gleichung

$$\begin{aligned}
\Box \Phi_g &= -4\pi G \rho_m \\
\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi_g}_{\stackrel{(26)}{=} \frac{1}{c} \partial_t (-\nabla(\frac{\mathbf{A}_g}{2}))} - \Delta \Phi_g &= 4\pi G \rho_m \\
\Rightarrow \underbrace{\nabla \left( -\frac{1}{c} \partial_t \left( \frac{\mathbf{A}_g}{2} \right) - \nabla \Phi_g \right)}_{\mathbf{E}_g} &= 4\pi G \rho_m \\
\Rightarrow \boxed{\nabla \mathbf{E}_g = 4\pi G \rho_m} & \tag{34}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E}_g &= \nabla \times \left( -\nabla \Phi_g - \frac{1}{c} \partial_t \left( \frac{\mathbf{A}_g}{2} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{c} \partial_t \left( \nabla \times \left( \frac{\mathbf{A}_g}{2} \right) \right) \\
\Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{E}_g = -\frac{1}{c} \partial_t \left( \frac{\mathbf{B}_g}{2} \right)}. & \tag{35}
\end{aligned}$$

Außerdem findet man

$$\begin{aligned}
\Box \bar{\psi}_{0\alpha} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{0\alpha} = \frac{16\pi G}{c^3} j_m^\alpha \\
\Rightarrow \Box \left( \frac{A_g}{2} \right)_\alpha &= -\frac{4\pi G}{c} j_m^\alpha \\
\Rightarrow \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \left( \frac{A_g}{2} \right)_\alpha - \Delta \left( \frac{A_g}{2} \right)_\alpha &= \frac{4\pi G}{c} j_m^\alpha \\
\Rightarrow \frac{1}{c} \partial_t \underbrace{\left( \frac{1}{c} \partial_t \left( \frac{\mathbf{A}_g}{2} \right) \right)}_{-\nabla \Phi_g - \mathbf{E}_g} - \Delta \left( \frac{\mathbf{A}_g}{2} \right) &= \frac{4\pi G}{c} \mathbf{j}_m \\
\Rightarrow \underbrace{\nabla \left( -\frac{1}{c} \partial_t \Phi_g \right)}_{\stackrel{(26)}{=} \nabla \left( \frac{\mathbf{A}_g}{2} \right)} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}_g - \Delta \left( \frac{\mathbf{A}_g}{2} \right) &= \frac{4\pi G}{c} \mathbf{j}_m \\
\Rightarrow \underbrace{\nabla \left( \nabla \left( \frac{\mathbf{A}_g}{2} \right) \right)}_{\nabla \times (\nabla \times \left( \frac{\mathbf{A}_g}{2} \right))} - \Delta \left( \frac{\mathbf{A}_g}{2} \right) - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}_g &= \frac{4\pi G}{c} \mathbf{j}_m
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \frac{\mathbf{B}_g}{2} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}_g + \frac{4\pi G}{c} \mathbf{j}_m} \quad (36)$$

und aus der Definition von  $\mathbf{B}_g$  folgt

$$\boxed{\nabla \left( \frac{\mathbf{B}_g}{2} \right) = 0.} \quad (37)$$

Die Analogie zu den Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik ist gut zu erkennen und wird später noch etwas genauer betrachtet.

Neben den Maxwellschen Gleichungen lässt sich auch ein Analogon zur Lorentzkraft bestimmen. Hierzu berechnet man zunächst die metrischen Koeffizienten unter der Annahme, dass der Energie-Impuls-Tensor die Gestalt (30) habe und zeitlich konstant sei, d. h. dass auch die zeitlichen Ableitungen der Felder  $\Phi_g$  und  $\mathbf{A}_g$  verschwinden. Außerdem sollen zunächst alle Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(c^{-4})$  vernachlässigt werden.

Aus der Gleichung

$$\square \bar{\psi}_{ik} = -2\kappa T_{ik}$$

folgt (vgl. z. B. [1])

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{ik} &= \frac{\kappa}{2\pi} \int d^3x' \frac{T_{ik}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \\ &= \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{T_{ik}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned}$$

Hiermit erhält man

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\alpha\beta} &= \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \underbrace{T_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')}_{\mathcal{O}(c^0)} \\ &= \mathcal{O}(c^{-4}) \approx 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Erinnert man sich nun, wie  $\bar{\psi}_{ik}$  definiert war

$$\bar{\psi}_{ik} = \psi_{ik} - \frac{1}{2} \eta_{ik} \psi^l{}_l, \quad (39)$$

so findet man

$$\begin{aligned} \alpha \neq \beta : \psi_{\alpha\beta} &\approx 0 \\ \alpha \neq \beta : g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta} &\approx 0. \end{aligned} \quad (40)$$



Außerdem folgt aus (39)

$$g_{0\alpha} = \eta_{0\alpha} + \psi_{0\alpha} = \eta_{0\alpha} + \bar{\psi}_{0\alpha} = -\frac{2}{c^2} (A_g)_\alpha. \quad (41)$$

Für die Nullnullkomponente der Metrik ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi_{00} &= \bar{\psi}_{00} + \frac{1}{2} \eta_{00} \psi^l{}_l \\ \bar{\psi}^n{}_n &= \psi^l{}_l - \frac{1}{2} \underbrace{\eta^n{}_n}_{4} \psi^l{}_l \\ \Rightarrow \psi^l{}_l &= -\bar{\psi}^n{}_n = \bar{\psi}_{00} - \mathcal{O}(c^{-4}) \\ \Rightarrow \psi^l{}_l &\approx \bar{\psi}_{00} = \frac{4}{c^2} \Phi_g \\ \Rightarrow \psi_{00} &= \frac{4}{c^2} \Phi_g - \frac{2}{c^2} \Phi_g = \frac{2}{c^2} \Phi_g \\ \Rightarrow g_{00} &= \eta_{00} + \psi_{00} = -1 + \frac{2}{c^2} \Phi_g \end{aligned}$$

und für die restlichen Diagonalterme findet man

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\alpha} &= \underbrace{\bar{\psi}_{\alpha\alpha}}_{\mathcal{O}(c^{-4})} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\alpha} \psi^l{}_l \\ &\approx \frac{1}{2} \psi^l{}_l = \frac{2}{c^2} \Phi_g \\ \Rightarrow g_{\alpha\alpha} &= \eta_{\alpha\alpha} + \psi_{\alpha\alpha} = 1 + \frac{2}{c^2} \Phi_g. \end{aligned}$$

Zusammenfassend kann man also schreiben ( $x^0 = ct$ )

$$\boxed{ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2}{c^2} \Phi_g\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2}{c^2} \Phi_g\right) dx^2 - \frac{4}{c} (\mathbf{A}_g d\mathbf{x}) dt.} \quad (42)$$

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichung eines Teilchens fordert man das Verschwinden der Variation des Integrals über das Linienelement

$$\delta \int ds = \delta \int \frac{ds}{dt} dt = 0. \quad (43)$$

Um also die Kraft auf ein Teilchen der Masse  $m$  zu berechnen, betrachtet man dessen Lagrangefunktion

$$L = -mc \frac{ds}{dt}. \quad (44)$$

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \left[ (-c^2 + 2\Phi_g) - \frac{4}{c} \left( \mathbf{A}_g \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) + \left( \frac{2}{c^2} \Phi_g + 1 \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\stackrel{\Phi_g, \mathbf{A}_g \text{ klein}}{=} c \sqrt{-1 + \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{c \sqrt{-1 + \frac{v^2}{c^2}}} \left[ -\frac{2}{c} \mathbf{A}_g \mathbf{v} + \Phi_g \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\Phi_g^2) + \mathcal{O}(A_g^2) \\
&\approx ic \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - i \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[ -\frac{2}{c} \mathbf{A}_g \mathbf{v} + \Phi_g \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \\
&\stackrel{\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{=} i \left[ \frac{c}{\gamma} + \frac{2\gamma}{c^2} \mathbf{A}_g \mathbf{v} - \Phi_g \frac{\gamma}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

findet man

$$\begin{aligned}
L &= -mc \frac{ds}{dt} \\
&= i \left[ -\frac{mc^2}{\gamma} + m\gamma \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \Phi_g - \frac{2m\gamma}{c} \mathbf{A}_g \mathbf{v} \right] \\
&= i \left[ -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + m\Phi_g - \frac{2m}{c} \mathbf{A}_g \mathbf{v} \right] + \mathcal{O}(c^{-2}). \quad (45)
\end{aligned}$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt nun für nicht explizit zeitabhängiges  $\mathbf{A}_g$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( mv_\alpha - \frac{2m}{c} (A_g)_\alpha \right) &= m\Phi_{g,\alpha} - \frac{2m}{c} v^\beta (A_g)_{\beta,\alpha} \\
\Rightarrow m\ddot{x}_\alpha - \frac{2m}{c} v^\beta (A_g)_{\alpha,\beta} &= m\Phi_{g,\alpha} - \frac{2m}{c} v^\beta (A_g)_{\beta,\alpha} \\
\Rightarrow m\ddot{x}_\alpha &= m\Phi_{g,\alpha} - \frac{2m}{c} v^\beta \underbrace{\left( (A_g)_{\beta,\alpha} - (A_g)_{\alpha,\beta} \right)}_{(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}_g)_\alpha} \\
\Rightarrow m\ddot{\mathbf{x}} &= m\nabla\Phi_g - \frac{2m}{c} \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}_g \\
\Rightarrow m\ddot{\mathbf{x}} &= -m\mathbf{E}_g - 2m \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_g.
\end{aligned}$$

Definiert man nun noch eine gravitoelektrische und gravitomagnetische Testladung durch

$$\begin{aligned}
q_E &:= -m \\
q_B &:= -2m, \quad (46)
\end{aligned}$$

so findet man schließlich auch eine Gravito-Lorentzkraft

$$\boxed{\mathbf{F}_L = q_E \mathbf{E}_g + q_B \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_g.} \quad (47)$$

Bei dieser Herleitung wurden Terme der Form  $\mathcal{O}(A_g^2)$ ,  $\mathcal{O}(\Phi_g^2)$  und  $\mathcal{O}(v^2/c^2)$  vernachlässigt sowie  $\partial_t \mathbf{A}_g = 0$  angenommen. Die Gravito-Lorentzkraft wird sich später in einem anderen Zusammenhang auf interessante Weise zu erkennen geben.

Im folgenden sollen nun die Potentiale  $\mathbf{A}_g$  und  $\Phi_g$  um eine um den räumlichen Ursprung beschränkte Massenverteilung berechnet werden. Die Bewegung der Masse wird wieder zeitlich konstant angenommen. Hierzu verwendet man die Lösung von

$$\begin{aligned} \square \bar{\psi}_{ik} &= -2\kappa \bar{T}_{ik} \\ \Rightarrow \Delta \bar{\psi}_{ik} &= -2\kappa T_{ik}, \end{aligned} \quad (48)$$

die gegeben ist durch

$$\bar{\psi}_{ik} = \frac{\kappa}{2\pi} \int d^3 x' \frac{T_{ik}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (49)$$

Entwickelt man nun

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \stackrel{|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}|}{\approx} \frac{1}{r} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{x} \mathbf{x}'}{r^3}, \quad r := |\mathbf{x}|, \quad (50)$$

so folgt zunächst

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{00} &= \frac{4G}{c^4} \int d^3 x' \left( \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{x} \mathbf{x}'}{r^3} \right) T_{00}(\mathbf{x}') \\ \Rightarrow \Phi_g &= \frac{G}{r} \int d^3 x' \rho_m - \frac{G}{r^3} \int d^3 x' \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x} \rho_m(\mathbf{x}') \\ \Rightarrow \boxed{\Phi_g = \frac{GM}{r} - \frac{G \mathbf{x} \mathbf{p}}{r^3},} \quad \mathbf{p} &:= \int d^3 x' \mathbf{x}' \rho_m(\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (51)$$

Außerdem erhält man analog eine Näherung für  $\mathbf{A}_g$ :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{0\alpha} &= \frac{2G}{c^4} \int d^3 x' \left( \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{x}' \mathbf{x}}{r^3} \right) T_{0\alpha}(\mathbf{x}') \\ \Rightarrow (A_g)_\alpha &= -\frac{2G}{cr} \underbrace{\int d^3 x' (j_m)^\alpha}_{0, \text{ da } \nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0, \text{ vgl. [1] Kap.5.6}} + \frac{2G}{cr^3} \int d^3 x' \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x} (j_m)^\alpha \\ \Rightarrow (A_g)_\alpha &= \frac{2G}{cr^3} \int d^3 x' x'^\beta x_\beta (j_m)^\alpha. \end{aligned}$$

Mit der Relation (vgl. [1] Kap. 5.6)

$$\int d^3x' x'^\beta (j_m)^\alpha = - \int d^3x' x'^\alpha (j_m)^\beta \quad (52)$$

folgt hieraus

$$\begin{aligned} (A_g)_\alpha &= \frac{G}{cr^3} \int d^3x' x'_\beta (x'^\beta (j_m)^\alpha - x'^\alpha (j_m)^\beta) \\ &= \frac{G}{cr^3} \int d^3x' \mathbf{x} \mathbf{x}' (j_m)^\alpha - \mathbf{x} \mathbf{j}_m x^\alpha \\ \Rightarrow \mathbf{A}_g &= \frac{G}{cr^3} \int d^3x' (\mathbf{x}' \times \mathbf{j}_m \times \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (53)$$

und somit letztendlich

$$\boxed{\mathbf{A}_g = \frac{G \mathbf{J}_m \times \mathbf{x}}{c r^3}}, \quad \mathbf{J}_m := \int d^3x' \mathbf{x}' \times \mathbf{j}_m. \quad (54)$$

Offenbar erkennt man auch hier in  $\Phi_g$  das Newtonsche Gravitationspotential wieder, welches dem skalaren Potential der Elektrodynamik entspricht. Das Potential  $\mathbf{A}_g$  ist nur ungleich Null, falls der Drehimpuls  $\mathbf{J}_m$  der Quelle verschwindet. Somit drückt  $\mathbf{A}_g$  die Gravitationswirkung der bewegten Materieverteilung aus (Thirring-Lense-Potential). Auch diese Gleichungen erhält man bis auf Faktoren analog für eine rotierende Ladungsverteilung.

Der Vergleich mit der Elektrodynamik zeigt, dass die Maxwell'schen Gleichungen von der Struktur mit den Gravito-Maxwell-Gleichungen übereinstimmen. Vorfaktoren lassen sich allerdings mittels veränderter Definitionen der Potentiale  $\Phi_g$  und  $\mathbf{A}_g$  manipulieren. Die hier gewählte Konvention suchen eine möglichst starke Übereinstimmung mit der Elektrodynamik. Das Newtonsche Gravitationsfeld entspricht offenbar dem gravitoelektrischen Feld, wohingegen das gravitomagnetische Feld in der Newtonschen Theorie nicht zu finden ist. Um die Theorie in dieser Form konsistent zu machen, sind die gravitoelektromagnetischen Ladungen eines Testteilchens durch  $q_E = -m$  bzw.  $q_B = -2m$  zu definieren, wohingegen die felderzeugenden Ladungen eines rotierenden Körpers der Masse  $M$  durch  $Q_E = GM$  und  $Q_B = 2GM$  zu wählen sind. Durch diese Definitionen wird die anziehende Natur der Gravitation erhalten. Das abweichende Verhältnis von magnetischer zu elektrischer Ladung lässt sich auf die Tatsache zurückführen, dass die Elektrodynamik mit dem Photon ein Spin-1 Austauschteilchen aufweist, während die linearisierte Gravitationstheorie eine Spin-2 Theorie ist.

	Elektromagnetismus	Gravitoelektromagnetismus
elektr. Feldstärke	$\mathbf{E} := -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}_g$	$\mathbf{E}_g := -\nabla\Phi_g - \frac{1}{c}\partial_t\left(\frac{\mathbf{A}_g}{2}\right)$
magn. Feldstärke	$\mathbf{B} := \nabla \times \mathbf{A}$	$\mathbf{B}_g := \nabla \times \mathbf{A}_g$
Gaußsches Gesetz	$\nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla\mathbf{E}_g = 4\pi G\rho_m$
Faradaysches Induktionsgesetz	$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{B} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E}_g + \frac{1}{c}\partial_t\left(\frac{\mathbf{B}_g}{2}\right) = 0$
Ampèresches Gesetz	$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{E} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$	$\nabla \times \frac{\mathbf{B}_g}{2} - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{E}_g = \frac{4\pi G}{c}\mathbf{j}_m$
	$\nabla\mathbf{B} = 0$	$\nabla\left(\frac{\mathbf{B}_g}{2}\right) = 0$
Lorentzkraft	$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$	$\mathbf{F}_L = -m\mathbf{E}_g - 2m\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_g$
elektr. Testladung	$q$	$q_E = -m$
magn. Testladung	$q$	$q_B = -2m$
elektr. Quelle	$Q$	$Q_E = GM$
magn. Quelle	$Q$	$Q_B = 2GM$
Ladungsverhältnis	1	2
elektr. Potential(Dipolnäherung)	$\Phi = \frac{GM}{r} - \frac{G\mathbf{x}\mathbf{p}}{r^3}$	$\Phi_g = \frac{GM}{r} - \frac{G\mathbf{x}\mathbf{p}_m}{r^3}$
elektr. Moment	$\mathbf{p} := \int d^3x' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}')$	$\mathbf{p}_m := \int d^3x' \mathbf{x}' \rho_m(\mathbf{x}')$
magn. Potential(Dipolnäherung)	$\mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3}$	$\mathbf{A}_g = \frac{2G}{c} \frac{\frac{\mathbf{J}_m}{2} \times \mathbf{x}}{r^3}$
magn. Moment	$\mathbf{m} := \frac{1}{2} \int d^3x' \mathbf{x}' \times \mathbf{j}$	$\frac{\mathbf{J}_m}{2} := \frac{1}{2} \int d^3x' \mathbf{x}' \times \mathbf{j}_m$

## 4 Thirring-Lense-Effekte

Nach dem Äquivalenzprinzip lässt sich das Schwerfeld einer Masse durch Übergang zu einem beschleunigten Bezugssystem lokal wegtransformieren. Also wirkt in einem beschleunigten Bezugssystem auf eine Testmasse eine

Kraft, die nicht von der Gravitationskraft unterschieden werden kann. Analog kann man sich fragen, welche Schwerefelder Kräfte erzeugen, die anderen „Scheinkräften“ wie der Zentrifugal- oder Corioliskraft entsprechen. Wir werden sehen, dass diese gerade mit dem gravitomagnetischen Feld in Verbindung gebracht werden können.

## 4.1 Der Thirring-Schiff-Effekt

### 4.1.1 Riemannsche Koordinaten

Um den Thirring-Schiff-Effekt zu berechnen benötigen wir ein bekanntes Hilfsmittel: Im Fall des euklidischen Raumes eignen sich die geodätischen Linien (kartesische Koordinaten) besonders gut als Koordinatenlinien. Analog führt man mit Hilfe der Riemannschen Normalkoordinaten ein lokales Inertialsystem ein, dessen Koordinatenlinien die Tangenten an die Geodätischen durch den gewählten Ursprung sind.

Sei  $x^i$  ein beliebiges Koordinatensystem, in dem wir einen Punkt  $x^i_0$  als

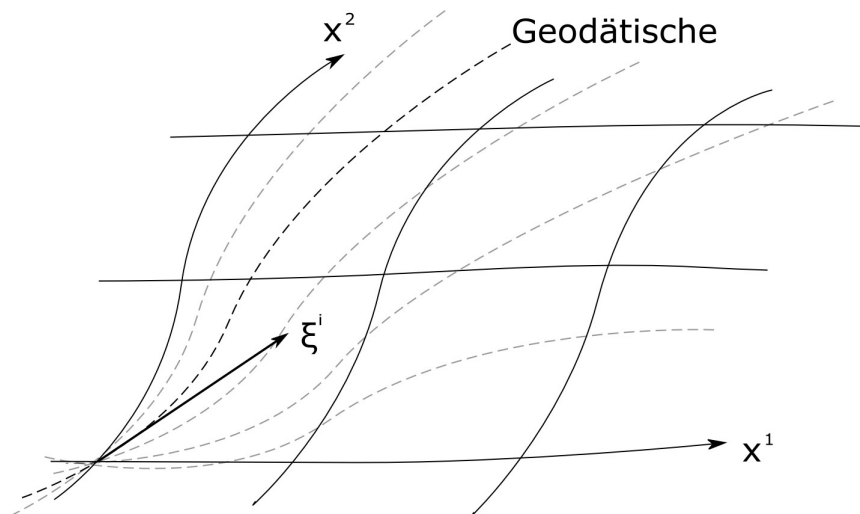


Abbildung 1: Riemannsche Koordinaten: Geodätische sollen in der Nähe des Ursprungs Geraden sein

Ursprung festlegen. Es beschreibe  $x^i(s)$  eine nach der Bogenlänge  $s$  parametrisierte Geodätische, von der wir annehmen, dass sie in der Umgebung von

$x^i_0$  in eine Potenzreihe entwickelbar sei:

$$x^i(s) = x^i_0 + \underbrace{\left(\frac{dx^i}{ds}\right)_0}_=: \xi^i s + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_0 s^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3x^i}{ds^3}\right)_0 s^3 + \dots \quad (55)$$

Hier ist  $\xi^i$  ein Einheitsvektor der die Richtung der Geodätischen in  $x^i_0$  angibt. Mit Hilfe der Geodätengleichung

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad (56)$$

findet man

$$\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_0 = -\Gamma^i_{kl} \xi^k \xi^l, \quad (57)$$

wobei die Christoffel-Symbole im Punkt  $x^i_0$  auszuwerten sind. Differenziert man (57) nach  $s$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d^3x^i}{ds^3} &= -\xi^m \Gamma^i_{kl,m} \xi^k \xi^l - \Gamma^i_{kl} \frac{d^2x^k}{ds^2} \xi^l - \Gamma^i_{kl} \xi^k \frac{d^2x^l}{ds^2} \\ &= -2\Gamma^i_{kl} \underbrace{\frac{d^2x^k}{ds^2}}_{-\Gamma^k_{mn} \xi^m \xi^n} \xi^l - \Gamma^i_{kl,m} \xi^k \xi^l \\ &= 2\Gamma^i_{nl} \Gamma^k_{mk} \xi^m \xi^k \xi^l - \Gamma^i_{kl,m} \xi^m \xi^k \xi^l =: \Gamma^i_{klm}. \end{aligned} \quad (58)$$

Damit folgt

$$x^i(s) = x^i_0 + \xi^i s - \frac{1}{2} \Gamma^i_{jk} \xi^j \xi^k s^2 - \frac{1}{6} \Gamma^i_{klm} \xi^k \xi^l \xi^m s^3 + \dots$$

Definiert man  $y^i := \xi^i s$ , so folgt

$$x^i = x^i_0 + y^i - \frac{1}{2} \Gamma^i_{jk} y^j y^k - \dots \quad (59)$$

Betrachtet man diese Gleichung nun als implizite Definition einer Koordinatentransformation unter Vernachlässigung von Termen  $\mathcal{O}(y^2)$ , d.h.

$$y^i = (x^i - x^i_0) + \frac{1}{2} \Gamma^i_{jk} (x^j - x^j_0) (x^k - x^k_0) - \dots, \quad (60)$$

so spannen die  $y^i$  das Riemannsche Koordinatensystem auf. In diesem neuen Koordinatensystem lautet die Gleichung einer beliebigen Geodätischen jetzt

einfach  $y^i = \xi^i s$  mit einem entsprechenden Einheitsvektor  $\xi^i$ . Man könnte jetzt auch einen Einheitsvektor vorgeben und die obige Rechnung rückwärts durchführen, so dass der Vektor im RKS die Geodätische im Ausgangskoodinatensystem  $x^i$  bestimmt. D. h. die obige Rechnung gilt für beliebige Geodätische mit beliebigem Tangentialvektor im Punkt  $x^i_0$ , so dass auch beliebige Geodätische in  $x^i$  nun Geraden in  $y^i$  darstellen. Insbesondere sind die Koordinatenlinien des  $y$ -Koordinatensystems Geodätische. Außerdem verschwinden die Christoffel-Symbole im Ursprung und es lässt sich durch eine zusätzliche Koordinatentransformation  $\bar{g}_{ik}(0) = \eta_{ik}$  erreichen (siehe [2]). In diesem Fall spricht man vom Riemannschen Normalkoordinatensystem (RKNS).

Ein System, in dem die beiden obigen Bedingungen erfüllt sind, heißt im entsprechenden Punkt  $x^i_0$  inertiales Koordiantensystem. In diesem System ist die Gleichung einer Geodätischen, d.h. die Bewegungsgleichung eines frei fallenden Objektes, einfach durch  $d^2 y^i / ds^2 = 0$  gegeben. Das RNKS entspricht gerade dem kartesischen Koordiantensystem im frei fallenden Labor, wobei die Minkowski Metrik  $\eta_{ik}$  nur für Raum-Zeit-Distanzen  $y^i$  mit  $y^i y^k \approx 0$  eine gute Näherung an  $g_{ik}$  darstellt.

#### 4.1.2 Kreisel und lokale Inertialsysteme

Um die gravitomagnetischen Effekte auf ein lokales Inertialsystem zu betrachten, transformiert man die durch (42) gegebene und als stationär angenommene Metrik

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 \left( 1 - \frac{2}{c^2} \Phi_g \right) dt^2 + \left( 1 + \frac{2}{c^2} \Phi_g \right) dx^2 - \frac{4}{c} (\mathbf{A}_g d\mathbf{x}) dt, \\ \Phi_{g,0} &= 0 \\ \mathbf{A}_{g,0} &= 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe von (60) auf ein solches Inertialsystem in der Nähe des Punktes  $x^\alpha = X^\alpha$ ,  $ct = X^0$ . Für die Ortskomponenten des neuen Koordinatensystems gilt dann

$$y^\alpha = (x^\alpha - X^\alpha) + \frac{1}{2} \Gamma^\alpha_{ij} (x^i - X^i) (x^j - X^j).$$



Um dies weiter auswerten zu können, benötigen wir die folgenden Christoffel Symbole:

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha{}_{00} &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha l}(\underbrace{g_{l0,0}}_0 + \underbrace{g_{l0,0}}_0 - g_{00,l}) \\
&= -\frac{1}{2}g_{00,\alpha} = -\frac{1}{c^2}\Phi_{g,\alpha}, \\
\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha l}(g_{l\mu,\nu} + g_{l\nu,\mu} - \underbrace{g_{\mu\nu,l}}_{\delta_{\mu\nu,l}=0}) \\
&= \frac{1}{2}\delta_{\alpha l}(g_{l\mu,\nu} + g_{l\nu,\mu}) \\
&= \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu}) = 0, \\
\Gamma^\alpha{}_{0\beta} &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha l}(g_{l0,\beta} + \underbrace{g_{l\beta,0}}_0 - g_{0\beta,l}) \\
&= \frac{1}{2}(g_{\alpha 0,\beta} - g_{0\beta,\alpha}) \\
&= \frac{1}{c^2}\left((A_g)_{\beta,\alpha} - (A_g)_{\alpha,\beta}\right).
\end{aligned}$$

Somit erhält man

$$y^\alpha = (x^\alpha - X^\alpha) + \frac{1}{c^2}\left((A_g)_{\beta,\alpha} - (A_g)_{\alpha,\beta}\right)(x^0 - X^0)(x^\beta - X^\beta) - \frac{1}{2c^2}\Phi_{g,\alpha}(x^0 - X^0)^2$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= (\mathbf{x} - \mathbf{X}) - \frac{1}{c^2}\underbrace{\nabla \times \mathbf{A}_g}_{\mathbf{B}_g} \times (\mathbf{x} - \mathbf{X})(x^0 - X^0) - \frac{1}{2c^2}\underbrace{\nabla \Phi_g}_{-\mathbf{E}_g}(x^0 - X^0)^2 \\
\Rightarrow \boxed{\mathbf{y} &= (\mathbf{x} - \mathbf{X}) - \frac{1}{c^2}\mathbf{B}_g \times (\mathbf{x} - \mathbf{X})(x^0 - X^0) + \frac{1}{2c^2}\mathbf{E}_g(x^0 - X^0)^2.} \quad (61)
\end{aligned}$$

Schreibt man nun noch  $x^0 - X^0 =: \Delta\bar{x}^0 = c\Delta\bar{t}$  und  $\mathbf{x} - \mathbf{X} =: \Delta\bar{\mathbf{x}}$ , so findet man

$$\mathbf{y} = \Delta\bar{\mathbf{x}} - \frac{1}{c}(\mathbf{B}_g \times \Delta\bar{\mathbf{x}})\Delta\bar{t} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_g(\Delta\bar{t})^2. \quad (62)$$

Wir waren von dem Koordinatensystem  $x^i$  ausgegangen, in dem die Metrik ihre stationäre Form annahm. Dieses Koordinatensystem kann also als starres Gerüst der Raumzeit betrachtet werden. Die Transformation auf ein lokales Inertialsystem führt auf Gleichung (62) und zeigt die Effekte auf ein solches

System. Der letzte Term in (62) entspricht offenbar dem Newtonschen  $1/2gt^2$ , d. h. das lokale Inertialsystem „fällt“ in Bezug auf das System  $x^i$  in dieser Näherung mit der Beschleunigung  $\mathbf{E}_g$ . Dieser Term folgte aber bereits aus der Newtonschen Näherung. Der zusätzliche, das  $\mathbf{B}_g$ -Feld enthaltende Term, lässt sich als Rotation des lokalen Inertialsystems gegenüber dem System  $x^i$  mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\Omega} := \frac{1}{c} \mathbf{B}_g \quad (63)$$

verstehen. Dieser Ausdruck geht über die Newtonsche Näherung hinaus und beschreibt die Wirkung der bewegten (rotierenden) Masse.

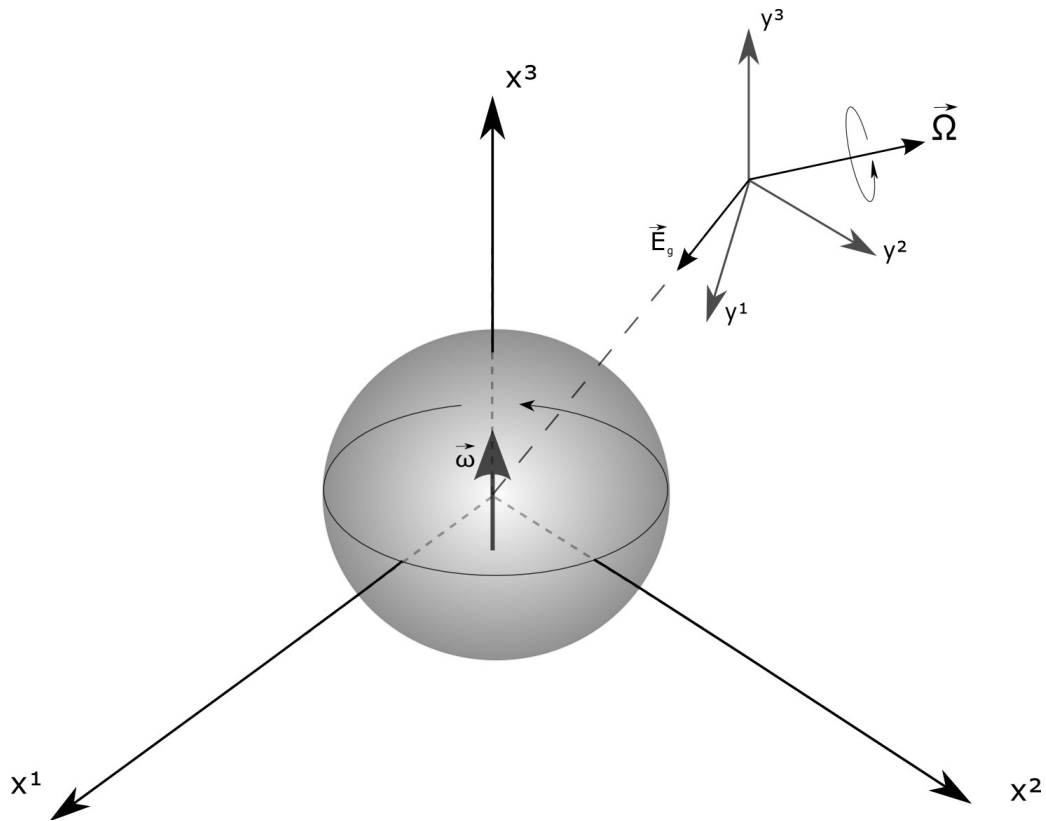


Abbildung 2: Veranschaulichung des Thirring-Schiff-Effektes: Das lokale Inertialsystem  $y^i$  rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Erinnert man sich nun an die Gravito-Lorentzkraft aus (47)

$$\mathbf{F}_L = q_E \mathbf{E}_g + q_B \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_g = -m \mathbf{E}_g - 2m \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_g, \quad (64)$$

so entpuppt sich der magnetische Teil dieser Kraft als Coriolis-Term.

$$\mathbf{F}_C = m2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} = 2m\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_g. \quad (65)$$

Natürlich wirkt diese Kraft nicht in unserem rotierenden lokalen Inertialsystem (es ist ja gerade inertial), sondern, wie auch oben hergeleitet, in unserem Ausgangskordinatensystem  $x^i$ . Dieses Ausgangskordinatensystem rotiert am Punkt  $x^i_0$  sozusagen relativ zum Inertialsystem  $y^i$ . Die zu erwartende Zentrifugalkraft von der Größenordnung  $F_Z = m\Omega^2 r$  wird in der linearen Näherung nicht sichtbar, da Terme der Form  $\mathcal{O}(\Omega^2) = \mathcal{O}(\mathbf{B}_g^2/c^2)$  vernachlässigt wurden. Betrachtet man eine kugelförmige rotierende Masse  $M$  mit Radius  $R$  und Drehimpuls  $\mathbf{J}_m$ , so folgt mit (54) in Dipolnäherung

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_g &= \frac{G}{c} \frac{\mathbf{J}_m \times \mathbf{x}}{r^3} \\ \mathbf{J}_m &= I\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{5}MR^2\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_g &= \nabla \times \mathbf{A}_g = \frac{GI}{c} \nabla \times \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}}{r^3} \\ \Rightarrow \omega_{\text{Kugel}}(\mathbf{x}) &= \frac{GI}{c^2} \frac{3(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}r^2}{r^5}. \end{aligned} \quad (66)$$

Wir erhalten also ein Dipolfeld  $\Omega(\mathbf{x})$ , welches uns angibt, wie ein lokales Inertialsystem, d.h. zum Beispiel ein dort positionierter Kreisel, am entsprechenden Punkt  $\mathbf{x}$  rotiert. Offenbar rotiert das lokale Inertialsystem an den Polen in derselben Richtung wie die Kugel, während die Rotation am Äquator entgegengesetzt verläuft. Obwohl dies zunächst paradox erscheint, existiert ein sehr bodenständiger Vergleich von Leonard I. Schiff, der 1960 auch die erste wissenschaftliche Publikation bezüglich eines Experimentes mit Kreiseln zu diesen Effekten veröffentlichte [15]: Betrachtet man eine rotierende Kugel in einer viskosen Flüssigkeit, so wird diese die Flüssigkeit mit sich ziehen. Positioniert man überall um die Kugel herum kleine Stäbe und beobachtet ihre Bewegung, so stellt man fest, dass die Stäbe in der Nähe der Pole mit der Kugel rotieren. In der Nähe des Äquators werden die Stäbe jedoch bei kleinen Radien schneller mitgezogen als bei großen, so dass sie sich hier entgegen der Kugelrotation drehen.

Nimmt man an, die Erde sei eine perfekte Kugel, so erhält man am Nordpol

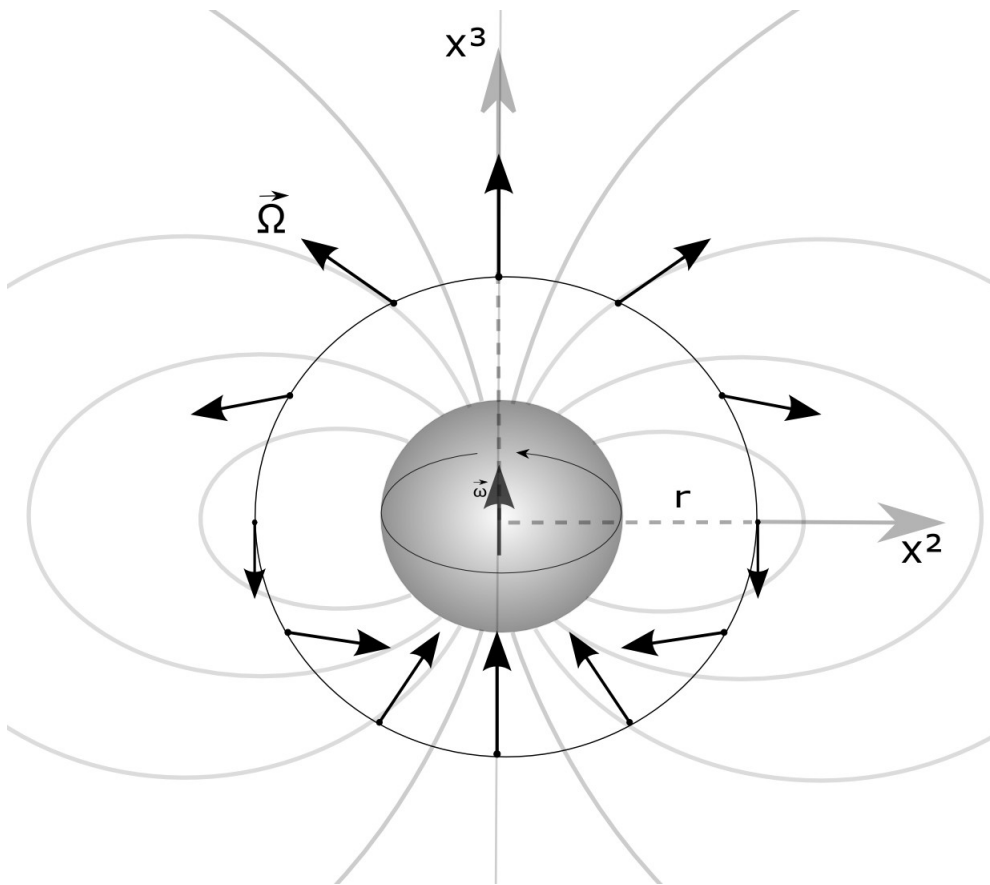


Abbildung 3: Veranschaulichung des Thirring-Schiff-Effektes: Das Gravito-magnetische Dipolfeld  $\boldsymbol{\omega}_{Kugel}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_g/c$  im Abstand  $r$  vom Mittelpunkt der rotierenden Massenkugel.

als Kreisfrequenz der lokalen Inertialsysteme

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\text{Nordpol}} &= \frac{GI}{c^2} \frac{3\omega_E R_E^2 - \omega_E R_E^2}{R_E^5} \\
 &= \frac{2GI}{c^2} \frac{\omega_E}{R_E} \\
 &= \frac{4}{5} \frac{GM_E}{c^2 R_E} \omega_E \approx 5,5 \cdot 10^{-10} \cdot \omega_E \approx \frac{0,6''}{\text{Tag}}.
 \end{aligned}$$

### 4.1.3 Gravity Probe B

Der Thirring-Schiff-Effekt soll mit Hilfe des Experimentes Gravity Probe B nachgewiesen werden. Dieses Experiment wurde von der NASA und der Universität Stanford entwickelt, kostete über 700 Millionen Dollar und basiert

auf den Vorschlägen, die Leonard I. Schiff bereits 1960 zu einem solchen Experiment machte[15]. Nach vierzig Jahren Planung wurde am 20. April 2004 der das Experiment tragende Satellit auf eine polare Umlaufbahn in 640 km Höhe um die Erde geschickt. Man wählte diese polare Umlaufbahn, um Effekte auf Grund des nicht exakt rotationssymmetrischen Newtonschen Gravitationsfeldes zu unterdrücken.

An Bord des Satelliten befinden sich vier hochpräzise Kreisel, die sich in einem durch flüssiges Helium gekühlten Thermo-Tank befinden. Bei den Kreiseln handelt es sich um Quarzkugeln mit einem Durchmesser von 3,8 cm. Diese Quarzkugeln gleichen bis auf maximal 40 Atomschichten einer perfekten Kugel und sind damit die „rundesten“ je hergestellten Objekte. Die Kugeln werden mit Hilfe von Helium-Gas in Rotation versetzt und rotieren dann frei in einem evakuierten Gehäuse, zu dem sie einen Abstand von circa 0,002 cm haben. Um die Symmetrie der Kreisel nicht zu verletzen, ist es nicht möglich die Kugeln irgendwie zu markieren, so dass man die Ablenkung der Kreiselachse ablesen könnte. Statt dessen macht man es sich zu Nutze, dass ein rotierender Supraleiter ein magnetisches Moment parallel zur Rotationsachse besitzt (London-Effekt, siehe [3]). Somit lässt sich die Ablenkung der magnetisch gut abgeschirmten Kreiselachse anhand dieses Momentes bestimmen.

Da der Satellit selbst durch das Sonnenlicht sowie durch Reibung atmosphärischer Gase in seiner Bahn beeinträchtigt wird, wird die Bahn des Satelliten durch einen der vier Kreisel bestimmt. Das heißt einer der Kreisel fällt praktisch frei, während seine genaue Position durch Sensoren bestimmt wird. Korrekturtriebwerke des Satelliten passen seine Bewegung durch Ausstoß von Helium an. Die Menge des Gases bei diesem Ausstoß liegt ungefähr in der Größenordnung eines Hundertstels der Menge an Luft, die ein Mensch ausatmet, um etwa eine Brille zu reinigen.

Um die Bewegung der Kreisel an einem Referenzsystem messen zu können, möchte man die Abweichungen der Kreiselachsen gerne in Bezug zu weit entfernten Quasaren setzen. Da diese jedoch nicht mittels eines im Satelliten mitgeführten optischen Teleskopes beobachtet werden können, wird der Satellit ständig mit Hilfe eines Teleskopes anhand eines weit entfernten Führungsterns (IM Pegasi) ausgerichtet. Die Bewegung dieses Führungsterns relativ zu den Quasaren wird von der Erde aus beobachtet und entsprechend umgerechnet.

Um den Thirring-Schiff-Effekt auf einen Kreisel im Gravity Probe B Sa-

telliten zu berechnen, mittelt man die Formel (66)

$$\Omega_{\text{Kreisel}}(\mathbf{x}) = \frac{GI}{c^2} \frac{3(\boldsymbol{\omega}_E \mathbf{x})\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}_E R_E^2}{R_E^5} \quad (67)$$

über die gesamte Satellitenbahn und setzt die entsprechenden Größen für die Erde ein. Wählt man das Koordinatensystem so, dass die Winkelgeschwindigkeit der Erde in x-Richtung zeigt, und drückt den Vektor  $\mathbf{x}$  in Kugelkoordinaten aus, so muss nur über den Term  $(\boldsymbol{\omega}_E \mathbf{x})\mathbf{x}$  gemittelt werden, da  $r$  auf der Satellitenbahn konstant angenommen wird. Den Winkel  $\theta$  kann man auf Grund der Symmetrie beliebig wählen.

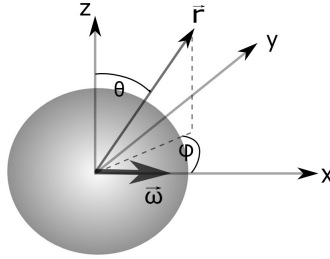


Abbildung 4: Zur Wahl des Koordinatensystems bei der Mittelung über die Satellitenbahn

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega}_E \mathbf{x})\mathbf{x} &= R_E^2 \left( \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\theta=\pi/2}{=} (R_E^2 \cos \phi \omega_x) \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \overline{(\boldsymbol{\omega}_E \mathbf{x})\mathbf{x}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} R_E^2 \cos^2 \phi \omega_x \\ R_E^2 \sin \phi \cos \phi \omega_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{R_E^2}{2\pi} \begin{pmatrix} \pi \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{R_E^2}{2} \boldsymbol{\omega}_E. \end{aligned} \quad (68)$$

$$(69)$$

Damit erhält man nun

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{Kreisel}} &= \frac{2}{5} \frac{GM_E}{c^2 R_E} \left( \frac{R_E}{R_E + 640 \text{ km}} \right)^3 \\ &\approx 1 \cdot 10^{-10} \omega_E \approx 47 \frac{\text{Millibogensekunden}}{\text{Jahr}}. \end{aligned} \quad (70)$$

$$(71)$$

Diese Bogenlänge entspricht etwa derjenigen eines Haares, welches man aus 400 Metern Entfernung betrachtet, soll jedoch im Rahmen von Gravity Probe B mit einer Genauigkeit von mehr als 0,5% nachgewiesen werden. Neben dem Thirring-Schiff-Effekt soll auch die Geodätische Präzession gemessen werden, die jedoch nicht auf die Rotation der Erde zurückzuführen ist. Sie bewirkt eine Abweichung der Bahnebene des Kreisels um 6,6 Bogensekunden pro Jahr, wobei die Drehung allerdings um die Achse senkrecht zur Bahnebene erfolgt. Die Geodätische Präzession wurde bereits 1916 von W. de Sitter für das Kreiselssystem Erde-Mond berechnet und 1988 experimentell bestätigt. Mehr zu Gravity Probe B findet man in [19].

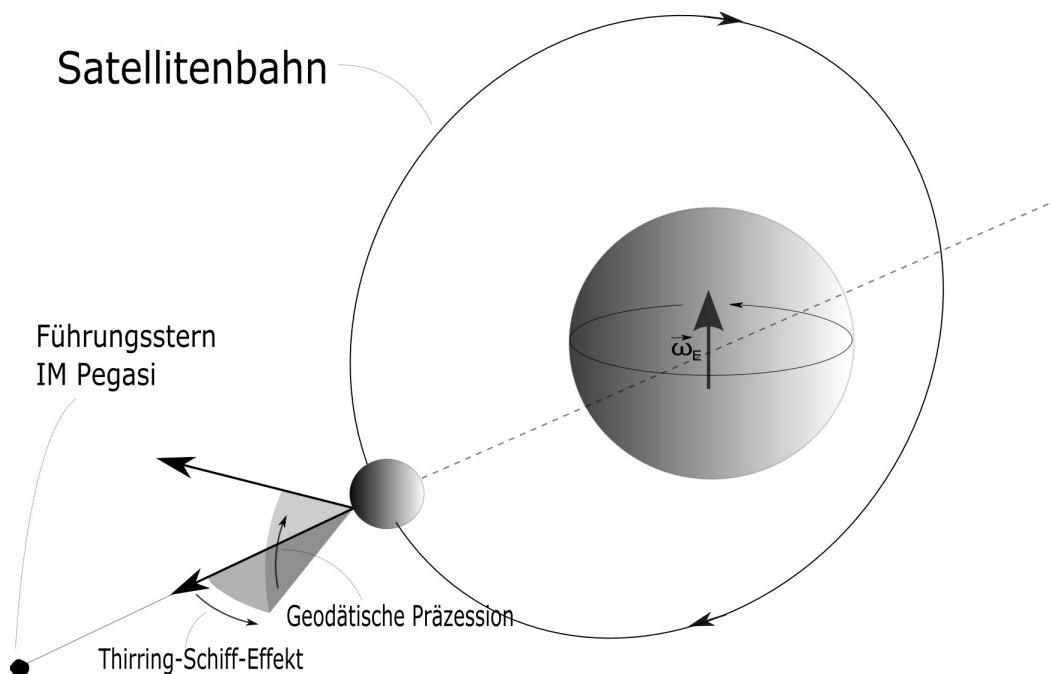


Abbildung 5: Thirring-Schiff-Effekt und Geodätische Präzession auf der polaren Bahn des die Erde umkreisenden Satelliten Gravity Probe B

## 4.2 Andere gravitomagnetische Effekte

Neben der Präzession von Kreiseln hat das Gravitomagnetische Feld noch andere Auswirkungen auf astronomische Objekte. Einer dieser Effekte ist die Präzession der Bahnebene eines eine rotierende Masse umkreisenden Körpers. Bewegt sich der Körper (z.B. ein Satellit) auf einer elliptischen Umlaufbahn mit großer Halbachse  $a$  und Exzentrizität  $\epsilon$ , so präzediert die Bahnnormale

mit der Winkelgeschwindigkeit[6]

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{Bahn}} = \frac{2G}{c^2} \frac{\mathbf{J}_m}{a^3(1 - \epsilon^2)^{3/2}}. \quad (72)$$

Dieser Effekt wurde bereits an den die Erde umkreisenden Satelliten LAGEOS I und II beobachtet. Bei diesen Satelliten handelt es sich um baugleiche, völlig passive Kugeln mit einem Radius von 60 cm, die mit Würfecken als Reflektoren umhüllt sind. Ursprünglich waren sie dazu gedacht, Unregelmäßigkeiten des Gravitationsfeldes der Erde zu bestimmen. Mit Hilfe von Laserpulsen lassen sich ihre Bahnen von der Erde aus vermessen, so dass der oben angesprochene Effekt im Jahr 2004 mit einem Fehler von 5 bis 10 Prozent bestimmt werden konnte[10].

Wesentlich stärker sollte die Präzession der Bahnebene jedoch an der Akkretionsscheibe von schwarzen Löchern oder Neutronensternen zu erkennen sein. Diese heizt sich auf Grund von Reibungseffekten so stark auf, dass Röntgenstrahlung emittiert wird. Präzediert die Akkretionsscheibe nun, so sollte wegen der periodischen Verdeckung des Zentralobjektes eine periodische Modulation der empfangenen Strahlung auftreten. Auch solche Oszillationen wurden bereits vom NASA-Satelliten RXTE beobachtet, könnten allerdings auch andere Ursachen haben.

Ein weiterer Effekt ist die Periastrondrehung eines Körpers auf einer elliptischen Bahn um eine Zentralmasse. Diese Tatsache tritt bereits ohne gravitomagnetisches Feld auf, wie an der Periheldrehung des Merkur zu beobachten ist. Allerdings erzeugt ein vorhandener Drehimpuls  $\mathbf{J}_m$  des Zentralkörpers einen zusätzlichen Anteil [6](vgl. auch [11])

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{Periastron}} = \frac{2G}{c^2} \frac{\mathbf{J}_m - 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{J}_m)}{a^3(1 - \epsilon^2)^{3/2}}. \quad (73)$$

Hier ist  $\mathbf{n}$  der Einheitsvektor in Richtung des Bahndrehimpulses des umlaufenden Körpers. Dieser gravitomagnetische Anteil kann sehr genau am Doppelpulsar PSR B1913+16 nachvollzogen werden.

Die oben beschriebenen Auswirkungen des gravitomagnetischen Feldes werden auch als Machsche Effekte oder frame-dragging bezeichnet.

### 4.3 Machsche Effekte

In Newtons berühmtem Eimerversuch sollte die Wölbung der Wasseroberfläche in einem rotierenden Wassereimer einen Beweis für die Existenz des absoluten Raumes darstellen. Steven Weinberg beschreibt in in diesem Zusammenhang ein Experiment für jedermann: „First stand still, and let your



arms hang loose at your sides. Observe that the stars are more or less unmoving, and that your arms hang more or less straight down. Then pirouette. The stars will seem to rotate around the zenith, and at the same time your arms will be drawn upward by centrifugal force. It would surely be a remarkable coincidence if the inertial frame, in which your arms hung freely, just happened to be the reference frame in which typical stars are at rest, unless there were some interaction between the stars and you that determined your inertial frame“[12]. Schon Ernst Mach formulierte 1883 die These, dass Trägheitskräfte durch die Bewegung der gesamten im Universum vorhandenen Materie verursacht würden[13]. Später wurde diese Idee von Einstein als Machsches Prinzip bezeichnet. Im Gegensatz zu Newtons Idee bei seinem Eimersversuch, muss man sich nach Mach fragen, was passiert, wenn die Wände des Eimers beliebig dick gemacht werden. Würden in diesem Fall vielleicht keine Zentrifugalkräfte auf das Wasser wirken und die Wasseroberfläche flach bleiben? Auch wenn die Allgemeine Relativitätstheorie dem Machschen Prinzip nicht gehorcht, bezeichnet man in diesem Geiste die Auswirkungen von Energie-Impuls-Strömen auf die Bewegung lokaler Inertialsysteme als Machsche Effekte.

Die Machsche Idee wurde 1918 von H. Thirring aufgegriffen. Thirring berechnete die Wirkung einer Massenkugelschale auf ihr Inneres im Rahmen der ART[16]. Nach der Newtonschen Theorie ist die Kraft auf einen Probekörper in einer solchen Kugelschale Null. Berücksichtigt man jedoch auch das gravitomagnetische Feld, so findet man einen entsprechenden

### Das Machsche Prinzip

Ernst Mach (1838-1916) formulierte 1883 die Hypothese, daß die Trägheitskräfte durch die Gesamtheit der im Universum vorhandenen Materie verursacht werden. Dementsprechend sollte in einem Gedankenversuch die Trägheit eines Körpers verschwinden, wenn sämtliche übrige Materie entfernt wird. Entsprechend dem Newtonschen Eimerversuch kennzeichnet die parabolische Wölbung der Oberfläche eines mit Wasser gefüllten, rotierenden Eimers ein gegen den absoluten Raum rotierendes Bezugssystem. Da es aber nach Mach keinen absoluten Raum gibt, entsteht die Zentrifugalkraft als Ursache der Wölbung aufgrund der Rotation relativ zu den Fixsternen. Die umgekehrte Situation, nämlich die Rotation der Fixsterne um den ruhenden Eimer, ist nach Mach weder gedanklich noch experimentell vom Newtonschen Eimerversuch unterscheidbar, deshalb muß die Wasseroberfläche auch hier gewölbt sein. Das Machsche Prinzip war einer der Ausgangspunkte der Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie. (aus [5])

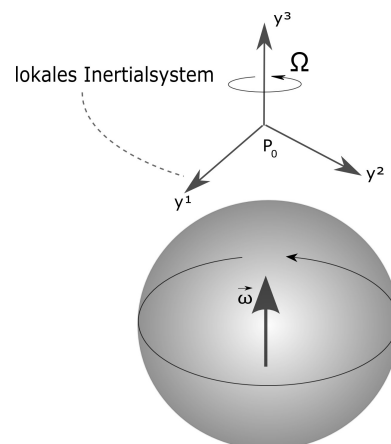
Rotationseffekt im Innenraum. Auch Einstein waren diese Kräfte bereits in einer Vorläufer-Version der ART aufgefallen und er schrieb dazu: „...leider ist der zu erwartende Effekt so gering, dass wir nicht hoffen dürfen, ihn durch terrestrische Versuche oder in der Astronomie zu konstatieren“ (siehe [9]). Im Weiteren untersuchten H. Thirring und J. Lense die Konsequenz einer rotierenden Massenkugel im Außenraum und fanden hier die oben angesprochenen gravitomagnetische Phänomene.

## 4.4 Welcher Eimer ruht?

Zum Schluss noch ein kleines Gedankenexperiment zum Thema Inertialsysteme: Im folgenden sei das Wort „ruhen“ sowie das Wort „rotieren“ auf die Fixsterne bezogen, sofern nicht explizit etwas anderes erwähnt wird.

Die Erde rotiere gegenüber den Fixsternen mit der Frequenz  $\omega$ . Auf Grund des Thirring-Lense-Effektes rotiert das lokale Inertialsystem in der Nähe des Punktes  $P_0$  mit der Frequenz  $\Omega$ .

Plaziert man einen Wassereimer kräftefrei am Punkt  $P_0$ , so rotiert er mit dem lokalen Inertialsystem, also mit der Frequenz  $\Omega$  relativ zu den Fixsternen. Somit ruht der Eimer aber im lokalen Inertialsystem und es wirken keine Zentrifugalkräfte auf das Wasser. Die Wasseroberfläche wäre also bei dem rotierenden Eimer



flach.

Hält man den Eimer nun fest, d. h. verhindert seine Rotation mit dem Inertialsystem, so ruht der Eimer im oben beschriebenen Sinne am Punkt  $P_0$ . Damit rotiert er aber relativ zum lokalen Inertialsystem mit der Frequenz  $\Omega$ . Somit wirken also Zentrifugalkräfte auf das Wasser im Eimer, da dieses Wasser ja relativ zum Inertialsystem rotiert. Also müsste hier die Wasseroberfläche gekrümmt sein.

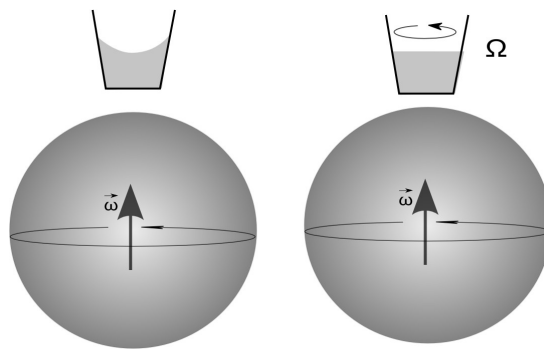


Abbildung 6: Welcher Eimer ruht?

Um den Eimer in Ruhe zu den Fixsternen (d.h. in Rotation zum Inertialsystem) zu versetzen muss eine Kraft auf ihn ausgeübt werden. Seine natürliche Bewegung ist die des Inertialsystems. Der Eimer folgt der Rotation des Inertialsystems, wenn **keine Kraft** auf ihn wirkt.

Dieses Gedankenexperiment ist nur als Denkanregung gedacht und darf nicht überinterpretiert werden.

## Literatur

- [1] John David Jackson, *Klassische Elektrodynamik*
- [2] Roman U. Sexl/Helmuth K. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie: Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie*
- [3] C. Kiefer, C. Weber, *On the interaction of mesoscopic quantum systems with gravity*, Ann. Phys. (Leipzig) **14**, No.4, 253-278(2005)
- [4] B. Mashhoon, *Gravitoelectromagnetism: A Brief Review*, arXiv:gr-qc/0311030v1 v1 8 Nov 2003

- [5] H. Rumpf, H. Urbantke, *Der Thirring-Lense-Effekt - nach 80 Jahren jetzt im Experiment*, PLUS LUCIS 2/99
- [6] D. Giulini, *Kosmische Kreisel - Inertialsysteme und Gravitomagnetismus*, Physik in Unserer Zeit, 2004, Nr. 4
- [7] H. Dittus, C. Lämmerzahl, *Kreisel testen Einstein - Gravity Probe B erfolgreich gestartet*, Physik Journal, 3 (2004), Nr. 6
- [8] W. Misner, K. S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company 1973
- [9] A. Einstein, *Zum gegenwärtigen Stand des Gravitationsproblems*, Phys. Z. 14(1913)1249; insbes. S.1261
- [10] I. Ciufolini, *LARES/WEBER-SAT, frame-dragging and fundamental physics*, arXiv:gr-qc/0412001 v3 3 Jan 2005
- [11] L. D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. II*
- [12] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology - Principles and applications of the general theory of relativity*
- [13] E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*
- [14] H. Lichtenegger, B. Mashhoon, *Mach's Principle*, arXiv:physics/0707078 v1 14 Jul 2004
- [15] L. I. Schiff, *Possible new experimental test of general relativity theory*, Physical Review Letters (1960), Volume 4, Number 5
- [16] H. Thirring, *Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie*, Physikalische Zeitschrift (1918), No. 3
- [17] A. Einstein, *Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik (1918), No. 4
- [18] I. Ciufolini, J. A. Wheeler, *Gravitation and Inertia*
- [19] Internet: *Einstein.stanford.edu*