Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

10.04.2007

1. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Sommersemester 2007

Abgabe: 18.04.2007

Aufgabe 1 (5 Punkte): *Uhren*

Zwei Atomuhren werden in zwei Verkehrsflugzeugen in östlicher bzw. westlicher Richtung einmal um die Erde transportiert. Berechnen Sie die jeweiligen Gangunterschiede, welche die Uhren bezüglich einer auf der Erde zurückgebliebenen Uhr nach der Rückkehr aufweisen. Nehmen Sie dazu der Einfachheit halber an, dass die Flugzeuge über dem Äquator fliegen, wo die Geschwindigkeit der Erdrotation $v_E \approx 1667$ km/h beträgt, und setzen Sie eine durchschnittliche Reisegeschwindigkeit von $v_F \approx 800$ km/h sowie eine mittlere Flughöhe von 10 km an.
Hinweis: Beachten Sie den separaten Beitrag von Gravitationseffekt und Geschwindigkeitseffekt.

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Inertialsysteme*

Eine Rakete mit der Ruhelänge L_0 bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit radial von der Erde weg. Von der Erde wird ein Lichtimpuls ausgesandt, der von Spiegeln an der Spitze und am Ende der Rakete reflektiert wird. Das erste Signal wird nach der Zeit t_{A} wieder empfangen und das zweite nach der Zeit t_{B}.
Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Rakete?
Wie weit ist das Ende der Rakete von der Erde entfernt, wenn das erste Signal die Erde erreicht?

Aufgabe 3 (5 Punkte): *Beschleunigte Bezugssysteme*

1. Zeigen Sie, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} t &= \frac{c}{g}\,\sinh(gt'/c) + \frac{x'}{c}\,\sinh(gt'/c)\,, \\ x &= \frac{c^2}{g}\,[\cosh(gt'/c) - 1] + x'\,\cosh(gt'/c)\,, \\ y &= y'\,, \\ z &= z'\,, \end{aligned}$$

eine Transformation von einem Inertialsystem auf ein beschleunigtes Bezugsystem ($g = const.$) beschreiben. Berechnen Sie die Komponenten der Metrik bezüglich des Systems (t', x', y', z').

2. Betrachten Sie ein gemäß Teil 1 in x-Richtung beschleunigtes Bezugssystem. Darin werde ein Photon in der Höhe x_1 von einer Quelle emittiert und in der Höhe x_2 absorbiert. Berechnen Sie die Frequenzverschiebung gegenüber einem unbeschleunigten Bezugssystem mit $g = 0$. Führen Sie eine Näherung bis zur ersten Ordnung in gx'/c^2 durch.

3. Ein Photon „fällt“ in einem homogenen Gravitationsfeld $\mathbf{g} = g\,\mathbf{e}_x$ eine Strecke Δx entlang $\mathbf{e}_x$ hinab. Benutzen Sie nun die Äquivalenz von Masse und Energie (Planck-Einstein-Beziehung) und die aus der Newton'schen Gravitationstheorie bekannte Formel für die potentielle Energie, um die Frequenzverschiebung herzuleiten. Diskutieren Sie die Ergebnisse im Hinblick auf das Äquivalenzprinzip.

Aufgabe 4 (5 Punkte): *Rindler-Koordinaten*
Gegeben sei die zweidimensionale Metrik

$$ds^2 = v^2 du^2 - dv^2.$$

An welcher Stelle des Raumes weisen die Komponenten des metrischen Tensors eine Singularität auf? Finden Sie eine Koordinatentransformation, die zeigt, dass dieser Rindler-Raum nur ein Teil des zweidimensionalen Minkowski-Raums ist, der üblicherweise durch $ds^2 = dt^2 - dx^2$ dargestellt wird. Vergleichen sie die Rindler-Koordinaten mit den Koordinaten aus Aufgabe 2. Geben sie eine anschauliche Intepretation der Rindler-Koordinaten (betrachten Sie $u = const.$ und $v = const.$). Ermitteln Sie die Eigenbeschleunigung entlang der Kurve $v = const.$