

## 2. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I Sommersemester 2007

**Abgabe:** 25.04.2007

### **Aufgabe 4** (6 Punkte): *Bewegung im Gravitationsfeld*

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Gravitationsfeld ist durch

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l = 0 \quad (1)$$

gegeben, wobei  $\dot{x}^i = dx^i/ds$  und  $\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{ij}(\partial_l g_{jk} + \partial_k g_{jl} - \partial_j g_{kl})$  gilt.

1. Wiederholen Sie kurz die in der Vorlesung gegebene Ableitung von (1) aus dem Variationsprinzip  $\delta \int ds = 0$ . Wieso kann diese Herleitung nicht für Photonen verwendet werden?

2. Leiten Sie (1) nun aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k d\lambda \equiv \delta \int \mathcal{L} d\lambda = 0$$

ab, wobei  $\lambda$  ein affiner Parameter ist und  $\dot{x}^i = dx^i/d\lambda$  gilt. Zeigen Sie, daß diese Herleitung auch für Photonen gilt, und bestimmen Sie  $\mathcal{L}$  für die Lösung von (1).

### **Aufgabe 5** (6 Punkte): *Christoffel-Symbole*

Berechnen Sie das Transformationsverhalten der Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}(g_{ik,l} + g_{li,k} - g_{kl,i})$$

bei einer Koordinatentransformation  $x^{i'}(x^a)$ . Das Resultat zeigt, daß sie keinen Tensor bilden.

### **Aufgabe 6** (4 Punkte): *Rotierendes Bezugssystem*

Berechnen Sie die Christoffelsymbole für ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die z-Achse rotierendes System im Newtonschen Grenzfall und werten Sie die Geodätengleichung (1) aus. Identifizieren Sie die Zentrifugal- und die Corioliskraft in der resultierenden Bewegungsgleichung.

### **Aufgabe 7** (4 Punkte): *Frei fallender Beobachter*

In einem (flachen) 1 + 1-dimensionalen Minkowskiraum sei die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes durch  $m\ddot{x} - mg = 0$  gegeben. In Analogie zur verallgemeinerten Bewegungsgleichung (1) setzen wir nun  $\Gamma^1_{00} = -g$  und  $\Gamma^i_{kl} = 0$  sonst. Physikalisch ist klar, dass es ein Bezugssystem geben sollte, in dem das Christoffel-Symbol verschwindet, die Bewegungsgleichung eines freien Massenpunktes also  $m\ddot{x} = 0$  lautet. Finden Sie ein solches Koordinatensystem, indem Sie das Christoffel-Symbol „integrieren“.