Universität zu Köln 24.4.2007
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

3. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Sommersemester 2007

Abgabe: 02.05.2007

Aufgabe 8 (4 Punkte): *Krümmung I*

Das Verhältnis des Schwarzschildradius eines Körpers zu seinem Radius ist ein heuristisches Maß für die Abweichung der Geometrie in der Umgebung des betrachteten Körpers von der flachen Minkowski-Raumzeit. Vergleichen Sie dieses Verhältnis für einen Kugelsternhaufen ($M \approx 10^6 M_\odot, R \approx 20$ pc), die Sonne, die Erde, einen Neutronenstern ($M \approx M_\odot$, $R \approx$10 km), einen Weißen Zwerg ($M \approx M_\odot$, $R \approx 10^4$ km) sowie ein Proton und ein Elektron. Benutzen Sie für letztere deren Compton-Wellenlängen $\hbar/mc$ als (effektiven) Radius. Welche Masse müßte ein Elementarteilchen haben, damit seine Comptonwellenlänge so groß ist wie sein Schwarzschildradius, und wie groß ist dieser dann? Die bei diesen Betrachtungen auftretenden Größen werden häufig in sogenannten Planck-Einheiten angegeben, die sich in eindeutiger Weise aus den Naturkonstanten G, c und $\hbar$ ergeben. Berechnen Sie die Planck-Masse, die Planck-Länge, die Planck-Zeit und die Planck-Energie in CGS- oder SI-Einheiten.

Aufgabe 9 (6 Punkte): *Krümmung II*

Betrachten Sie die in den flachen dreidimensionalen Raum eingebettete Schar von Gaussglocken $z = \exp(-a^2 r^2)$ mit $r^2 = x^2 + y^2$. Bestimmen Sie die Metrik auf einer Gaussglocke in den Koordinaten (r, φ) und berechnen Sie die Krümmung im Scheitelpunkt zum einen mit den beiden in der Vorlesung angegebenen Formeln (Vergleich von Flächeninhalt bzw. Umfang) sowie zum anderen durch Anschmiegen einer Kugelschale und Verwendung der bekannten Krümmung einer Kugel vom Radius R.

Aufgabe 10 (4 Punkte): *Ableitung einer Determinante*

Zeigen Sie, daß die partielle Ableitung der Determinante einer nichtsingulären Matrix $\mathbf{M}$ nach einer Koordinate durch die Formel

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M}) \mathrm{Spur}(\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \mathbf{M}) \tag{1}$$

gegeben ist. *Tip:* Jede quadratische Matrix $\mathbf{A}$ kann durch eine Ähnlichkeitstransformation $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{BAB}^{-1}$ in eine Jordan-Normalform überführt werden. Beweisen Sie nun mit Hilfe von (1) die Formel

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = g^{ik} g \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = -g_{ik} g \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^j}$$

aus der Vorlesung.

Aufgabe 11 (6 Punkte): *Stereographische Projektion*
Führen Sie durch Projektionen vom Nord- bzw. Südpol auf die Äquatorfläche einer Einheitskugel stereographische Koordinaten (x_N, y_N) bzw. (x_S, y_S) ein und drücken Sie diese durch die dreidimensionalen Koordinaten (x, y, z) aus. Welchen Definitionsbereich haben diese Koordinatenabbildungen? Bestimmen Sie nun die Koordinaten (x, y, z) auf der Sphäre als Funktion von (x_N, y_N) bzw. (x_S, y_S) und berechnen Sie hiermit die durch die flache Metrik $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ auf der Kugel induzierte (zweidimensionale) Metrik in den beiden Koordinatensystemen. Bestimmen Sie weiter auf dem Überlapp der Definitionsbereiche explizit die Übergangsfunktionen und zeigen Sie, daß die Einheitskugel zusammen mit den beiden Koordinatenabbildungen eine differenzierbare Mannigfaltigkeit bildet. Verifizieren Sie schließlich noch durch Einsetzen der oben erhaltenen Ausdrücke die bekannte Umrechnungsformel für die Metrik

$$g^S_{jl} = \frac{\partial x^i_N}{\partial x^j_S} \frac{\partial x^k_N}{\partial x^l_S} g^N_{ik} \, .$$