Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

15.5.2007

6. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Sommersemester 2007

Abgabe: 22.5.2007

Aufgabe 16 (6 Punkte): *Integration*

Gegeben sei eine auf $[0, a)$ strikt positive glatte Funktion f mit $f(a) = f'(0) = 0$ und $f'(a) = -\infty$. Durch diese Funktion werde nun vermöge $z^2 = [f(r)]^2$, $r^2 = x^2 + y^2$ eine Rotationsfläche A definiert. Bestimmen Sie zunächst die durch das Linienelement $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2$ induzierte Metrik g_{ij} auf dieser Fläche. Berechnen Sie dann den zugehörigen Ricci-Skalar und zeigen Sie durch explizite Rechnung, daß das Integral

$$\int_A \sqrt{g} R \, d^2x$$

nicht von der Wahl der Funktion f abhängt.

Aufgabe 17 (14 Punkte): *Killing-Vektorfelder*

a) Beweisen Sie die folgende Integrabilitätsbedingung für ein Killing-Vektorfeld v^i:

$$v_{m;nj} = -v_r R^r{}_{jmn} \quad .$$

b) Gegeben sei ein zeitartiges Killing-Vektorfeld ξ^i. Zeigen Sie, daß es ein Koordinatensystem gibt, in dem die Metrik zeitunabhängig ist, d. h. $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = 0$ gilt.

c) Finden Sie alle Killing-Vektorfelder ξ^i für den Minkowskiraum.

d) Sei T^{ik} ein symmetrisches Tensorfeld mit verschwindender Divergenz, d. h. $\nabla_i T^{ik} = 0$, und ξ^i ein Killing-Vektorfeld. Berechnen Sie $\left(\xi^i \, T_i{}^k\right)_{;k}$. Das Ergebnis ist von großer Bedeutung für die Konstruktion integraler Erhaltungsgrößen.