Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Friedemann Queisser

5.6.2007

8. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I
Sommersemester 2007

Abgabe: 13.6.2007

Aufgabe 20 (4 Punkte): *Isotrope Koordinaten*
Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$t = \bar{t} \qquad r = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2 \bar{r}$$

der Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, d\Omega^2,$$

und berechnen Sie die Metrik in den neuen Koordinaten. Welchen Wert hat die Metrik am Horizont?

Aufgabe 21 (8 Punkte): *ADM-Energie*
Falls die Metrik einer Raumzeit in der Form $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$ mit im Unendlichen verschwindenden Funktionen h_{ij} geschrieben werden kann, ist die Gesamtenergie des Systems durch das Oberflächenintegral

$$E = \frac{1}{16\pi G} \int \sum_{\alpha,\beta} \left(g_{\alpha\beta,\beta} - g_{\beta\beta,\alpha}\right)\, d^2S_\alpha$$

über eine Fläche weit außerhalb jeder Materieverteilung gegeben (ADM-Energie). Die griechischen Indizes bezeichnen hierbei räumliche Koordinaten. Berechnen Sie diese Energie für die Schwarzschild-Raumzeit. *Tip*: Die Rechnung geht am einfachsten in isotropen Koordinaten.

Aufgabe 22 (8 Punkte): *Wurmlöcher*
Gegeben sei die Metrik

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

wobei b eine Konstante mit der Dimension einer Länge sei. Veranschaulichen Sie diese Geometrie durch Einbettung in einen flachen Raum.

Anleitung: Wählen Sie Schnitte $t = konst.$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$; warum reicht dies aus? Veranschaulichen Sie die entstehende zweidimensionale Geometrie mit dem Linienelement $d\Sigma^2 = dr^2 + (b^2 + r^2)d\phi^2$, indem Sie eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit derselben Geometrie angeben. Fertigen Sie eine Skizze an.