Die kosmologische Konstante

1 Motivation

- *Einstein-Universum*: historisch wurde die kosmologische Konstante von Einstein eingeführt, um ein statisches Universum zu ermöglichen. Dies ist zu erklären durch die damalige Interpretation der astronomischen Daten sowie Einsteins Wunsch, dem Machschen Prinzip Rechnung zu tragen, welches die Dynamik des Universums auf Relativbewegungen in Bezug auf die Massenverteilung zurückführt (im Vgl. zum absoluten Raum).
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1}$$
Lovelock: die linke Seite ist der allgemeinste symmetrische, lokale, divergenzfreie 2-stufige Tensor, der nur aus $g_{\mu\nu}$ und seinen ersten beiden Ableitungen konstruiert werden kann.

  Einstein verwarf beim Wissen der Expansion des Universums später die Konstante.

- *Standard-Modell*: heute ist die kosmologische Konstante ein integraler Bestandteil des Standardmodells der Kosmologie (power law ΛCDM-Modell: flach, Λ-dominiert, zusammen mit baryonischer und nicht-baryonischer (CDM) Materie, auf großen Skalen homogen-isotrop mit adiabatischen Gaußschen Fluktuationen).

- *Interpretation als Vakuumenergie*: $\Lambda g_{\mu\nu} \propto -\rho_{vac} g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{vac}$. Kann man evtl. durch QFT-Methoden die kosmologische Konstante bestimmen? ($\Rightarrow$ Kosmologisches Konstanten Problem).

2 Kosmologie mit einer kosmologischen Konstanten

2.1 Friedmann-Robertson-Walker-Modelle

homogen-isotropes Universum: $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2]$

(a(t) : Skalenfaktor; k=± 1, 0 ≡ pos./neg. gekrümmtem, flachem Raum)

Isotropie: diagonaler Energie-Impuls-Tensor $\Rightarrow$ ideales Fluid: $T_{\mu\nu} = (p+\rho) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$

Aus den Einstein-Gln folgen dann 2 linear unabh. Gleichungen: *Friedmann-Gln* (Linearkombination):

$$H^2 = (\tfrac{\dot a}{a})^2 = \tfrac{8\pi G}{3}\rho - \tfrac{k}{a^2} + \tfrac{\Lambda}{3} \tag{2}$$
$$\tfrac{\ddot a}{a} = -\tfrac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \tfrac{\Lambda}{3} \tag{3}$$

Durch Zufügen einer *Zustandsgleichung* für die Materie kann man die gesamte Dynamik des Universums beschreiben.

Aus den obigen Gleichungen kann man nun das statische, pos. gekrümmte Einstein-Universum konstruieren mit $\Lambda, \rho, p > 0$ geeignet gewählt. (Achtung: instabil)

2.2 Kosmologische Parameter

Λ als Vakuumenergie
plausibel am Beispiel eines skalaren Feldes:
$S = \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\,\phi_{,\nu} - V(\phi)] \Rightarrow T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\,\phi_{,\nu} + \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\phi_{,\rho}\,\phi_{,\sigma}\,g_{\mu\nu} - V(\phi)g_{\mu\nu}$
Nullpunktsenergie: $T^{vac}_{\mu\nu} = -V(\phi_0)g_{\mu\nu} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}$ (entspricht idealem Fluid mit $p_{vac} = -\rho_{vac}$)

allgemein gilt: $T^{vac}_{\mu\nu} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}$ ist die einzige Lorentz-invariante Realisierung der Vakuumenergie.

für die kosmologische Konstante: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \underbrace{\frac{\Lambda}{8\pi G}}_{\rho_{vac}}g_{\mu\nu})$

Dichteparameter: führe Parameter in Bezug auf den flachen Raum ($k = 0, \rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$) ein

$$\Omega_i := \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} \tag{4}$$

auch für Krümmung: Krümmungsenergiedichte $\rho_k = -\frac{3k}{8\pi G a^2}$

$$\Rightarrow \Omega + \Omega_k = 1, \Omega = \Omega_M + \Omega_\gamma + \Omega_\Lambda \quad \text{(entspricht Friedmann-Gl.)} \tag{5}$$

Zustandsgleichungen: $p_i = w_i\rho_i$
aus kontrahierten Bianchi-Identität folgt: $\rho_i \propto a^{-n_i}, n_i = 3(w_i + 1)$.

ρ_i	w_i	n_i
Staub	0	3
Strahlung	1/3	4
Krümmung	-1/3	2
Vakuum	-1	0

Daraus kann man die Friedmanngleichung schreiben als: $H(a) = H_0(\sum_i \Omega_{i0}a^{-n_i})^{1/2}$, wobei hier H_0 der heutige Wert der Hubble-Konstante ist.

Dominante Energiebedingung (DEC): Einschränkung an die Zustandsparameter
(i) $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0\,\forall\, l^\mu, l^\nu$ null
(ii) $T^\mu_\nu l^\mu$ ist nicht-raumartig $\forall\, l^\mu$ null
Die Aussage (i) besagt, daß ein lokaler Beobachter immer eine positive Energiedichte sieht. Für ein ideales Fluid folgt: $\rho + p \geq 0, |\rho| \geq |p|$, und somit sind 2 Fälle erlaubt:
(i) $\rho > 0$, $|w| \leq 1$
(ii) $\rho < 0$, $|w| = 1$ (entspricht kosmologischer Konstanten).

Verzögerungsparameter: $q_0 = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \sum_i \frac{n_i - 2}{2}\Omega_i$
für $n > 2$: Expansion wird gebremst (Staub, Strahlung)
für $n < 2$: Expansion wird beschleunigt (kosmol. Konstante)
die "Krümmungsenergiedichte" hat keinen Einfluß auf die Expansion

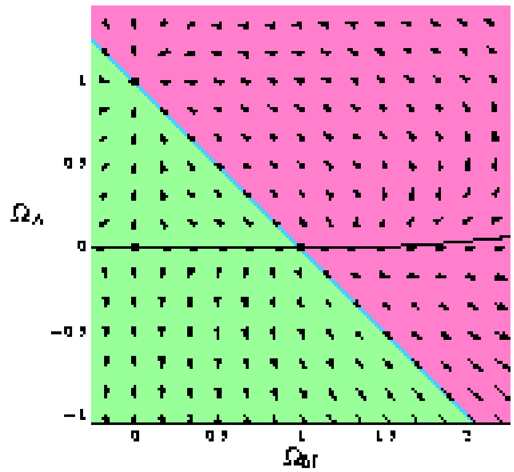

Figure 1: Entwicklung der Dichteparameter. Die Gerade $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ zeigt die flachen Universen an. Es existieren drei Fixpunkte: (0,0) ist das leere Universum, (0,1) das sog. de Sitter-Universum (materiefrei, Λ-dominiert) und (1,0) das Einstein-de Sitter-Universum ($\Lambda = 0$). (Carroll, 2001)

2.3 Modell-Universen

Heute geht man von einem Wert von $\Omega_\gamma \approx 10^{-5}$ aus, welche hauptsächlich in der kosmischen Hintergrundstrahlung steckt. Also ist eine gute Näherung: $\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda, \Omega + \Omega_k = 1$.

Man kann nun die verschiedenen Modell-Universen bei Verhandensein einer kosmologischen Konstanten betrachten:

- $\Omega_\Lambda < 0$: in diesem Fall führt die Konstellation unweigerlich zu einem Kollaps, entweder durch die vorhandene Masse oder aber durch die im Laufe der Expansion immer wichtiger werdende kosmologische Konstante.
- $\Omega_\Lambda = 0$: in diesem Fall ist das Schicksal des Universums alleine durch seine Masse gegeben: falls $\Omega_M \leq 1$ expand das Universum für alle Zeiten, falls $\Omega_M > 1$ führt die gravitative Anziehung der Materie zu einem Kollaps.
- $\Omega_\Lambda > 0$: falls Ω_M groß genug ist, kollabiert das Universum, falls nicht, dehnt sich das Universum unendlich aus.

Die Universen kann man effizient in einem $\Omega_M - \Omega_\Lambda$-Diagramm veranschaulichen:

Die Pfeile im Bild geben die Entwicklung der Dichteparameter an. Falls ein Universum oberhalb der Linie, welche approximativ bei $\Omega_\Lambda = 0$ verläuft, anfängt, so expandiert das Universum unendlich und entwickelt sich zum attraktiven Fixpunkt $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7)$, das sog. de Sitter-Universum, ein leeres, Λ-dominiertes Universum wo der Skalenfaktor sich wie $a(t) \propto e^{Ht}$ ändert. Unterhalb der Linie kollabiert jedes Universum, wie in obiger Analyse gesehen. Die Diagonale $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ zeigt die flachen Universen (k=0), wobei das sog. Einstein-de Sitter Universum ein weiterer Fixpunkt ist. Die aktuellen experimentellen Daten favorisieren ein Universum auf der Geraden.

der Rest kommt bald...

3 Experimentelle Tests

3.1 Typ 1a Supernova

3.2 Kosmische Hintergrundstrahlung

3.3 Massen-Bestimmung

3.4 Gravitationslinsen

4 Theoretische Ansätze zur Lösung des kosmologischen Konstanten Problems

4.1 Kosmologisches Konstanten Problem

4.2 Anthropisches Prinzip

4.3 Quantenkosmologie

—-

Quellen:

- S. Coleman, Nucl. Phys. B**310**, 643 (1988).
- Spergel et. al., astro-ph/0302209 (2003).
- Tonry et. al., astro-ph/0305008 (2003).
- S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- S. Carroll, Annu. Rev. Atron. Astrphys. **30**, 499 (1992).
- S. Carroll, "The Cosmological Constant", Liv. Rev. Relat. (2001).