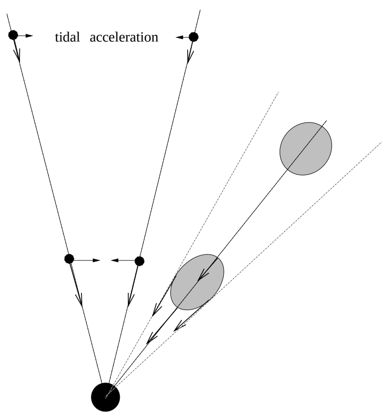
Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke

15.10.2004

Relativitätstheorie und Kosmologie I
Wintersemester 2004/2005

Gezeitenkräfte in der Newton'schen Theorie



Betrachten Sie ein im freien Fall um die Erde kreisendes Raumschiff. Wir zeichnen innerhalb des Raumschiffes einen Punkt als Koordinatenursprung aus, der den Abstand r_0 zur Erdmitte hat. Wir wählen nun ein Koordinatensystem derart, dass die z-Achse durch den Erdmittelpunkt läuft, die x-Achse tangential zur Flugbahn und die y-Achse senkrecht (und rechthändig) zu x- und z-Achse. In der Abbildung ist auch ein Wassertropfen abgebildet. Er hat keine sphärische Form, obwohl er sich „im freien Fall“ befindet – ein dezenter Hinweis auf die *Gezeitenkräfte*, die Sie in wenigen Zeilen berechnen sollen.

Auf ein Teilchen mit der Masse m am Ursprung des von uns gewählten Koordinatensystems wirkt also die Kraft $\frac{-GMm}{{r_0}^2}$, wobei G die Newton'sche Gravitationskonstante und M die Erdmasse bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Kraft, die auf einen in einem kleinen Abstand $\vec{l} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ vom Ursprung befindlichen Testkörper der Masse m wirkt. Entwickeln Sie diese Kraft bis zur ersten Ordnung und lesen Sie einen Ausdruck für die *Differenz* f_a $(a = 1, 2, 3)$ zu der Kraft ab, die auf den Testkörper im Ursprung wirken würde. Drücken Sie f_a durch das Gravitationspotential aus.

b) Wie hängt der *Gezeitenkrafttensor*

$$K_{ab} := -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^a \, \partial x^b}\bigg|_{x^a = x^b = 0}$$

mit den f_a zusammen? Welche Einheit haben die K_{ab}?

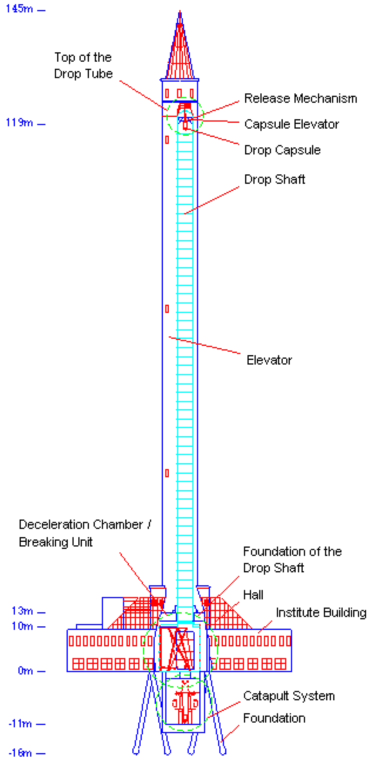
c) Berechnen Sie Divergenz und Spur des Gezeitenkrafttensors.

Der Fallturm in Bremen (Abb. nächste Seite) hat eine Höhe h von 144 m. Seine Fallröhre hat einen Durchmesser R von 3,5 m. Experimente werden in Fallkapseln durchgeführt, die einen Innenraum von etwa 2 m Länge und 0,4 m Durchmesser haben und mit maximal 200 kg belastet werden dürfen. Zwei Metallkugeln mit einer Masse von je 10 kg werden nun in einem Abstand von

a) 1,5 m übereinander,

b) 0,2 m nebeneinander

fallengelassen. Wie groß sind die Gezeitenkräfte, die zur Abwurfzeit in der Turmspitze auf die Kugeln relativ zu Ihrem gemeinsamen Schwerpunkt wirken? Wie nahe kommen sich die Kugeln während des Fluges, bzw. wann treffen sie sich?
Gehen Sie bei den Rechnungen davon aus, dass der Fuß des Turmes einen Abstand von 6378 km vom Erdmittelpunkt hat. Die Masse der Erde beträgt $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, die Gravitationskonstante $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11} \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^4 /\mathrm{N}$. Bei den Rechnungen können Sie geeignete Näherungen durchführen.
Informationen zum Fallturm: `http://www.zarm.uni-bremen.de/`



Zur Theorie des skalaren Gravitationsfeldes

a) Berechnen Sie das Newton'sche Gravitationspotential einer Kugel mit homogener Massendichte ρ_0 und Radius R_0 *innerhalb* und *außerhalb* der Kugel.

In der Newton'schen Gravitationstheorie gehorcht das Gravitationspotential $\phi = \phi(x, y, z, t)$ der *Poisson-Gleichung*

$$\Delta\phi := \frac{\partial^2\,\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\,\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\,\phi}{\partial z^2} = 4\pi\,G\,\rho_{\mathrm{gr}}\,,$$

wobei G die Newton'sche Gravitationskonstante und ρ_{gr} die (aktive gravitative) Massendichte ist. Eine zeitliche Änderung der Massendichte hat gemäß dieser Gleichung eine *instantane* Änderung des Potentiales und damit auch des Gravitationsfeldes

$$F_{\mathrm{gr}} = -\mathrm{grad}\,\phi \tag{1}$$

zur Folge. Die Newton'sche Gravitationstheorie ist also eine *Fernwirkungstheorie* und genügt daher offensichtlich nicht dem speziell-relativistischen Gebote, nach dem eine Wirkungsausbreitung stets mit einer Geschwindigkeit vor sich gehen solle, die kleiner ist als die des Lichtes. Die offensichtlichste Gleichung für ein skalares Feld ϕ, die dieser Anforderung entspricht, ist die *Wellengleichung*

$$\Box\,\phi := \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\,\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\,\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\,\phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\,\phi}{\partial z^2} = 4\pi\,G\,\rho\,.$$

b) Schreiben Sie nun die Kraftgleichung für einen Massenpunkt der Masse m, der sich im Gravitationspotential ϕ bewegt, nieder.

c) Zeigen Sie nun, dass im Falle einer konstanten (passiven) Testmasse das Kraftgesetz (1) *keine* allgemeine Gültigkeit beanspruchen und nur entlang gewisser Wegen zutreffen kann.

d) Der in Aufgabenteil c) gefundene „Fehler" kann auf zwei Arten „repariert" werden, nämlich

i) indem Sie eine vom Gravitationspotential abhängige Lichtgeschwindigkeit c annehmen und damit in die Beziehung $u^i\,u_i = c^2$ (u^i ist die Vierergeschwindigkeit) eingehen, oder

ii) indem Sie eine vom Gravitationspotential abhängige Masse m ansetzen und das Kraftgesetz in der Form $F^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,p^i$ (τ ist die Eigenzeit, p^i der Viererimpuls) auswerten.

Die hier angedeuteten Möglichkeiten wurden in den Theorien von *Abraham* (1912) und *Nordström* (1912) ausgearbeitet.