Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke

21.12.2004

10. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 11.01.2004

Aufgabe 25 (3 Punkte): *Klassische Tests: Übersicht*

Fassen Sie in 1-2 Seiten die klassischen Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie zusammen und diskutieren Sie deren Aspekte.

Aufgabe 26 (4 Punkte): *Rotverschiebung/Erhaltungsgrößen in der Schwarzschild-Metrik*

1. Betrachten Sie einen stationären Beobachter A bei $r = R, R \geq 2M$ im Schwarzschild-Feld der Masse M und einen Beobachter B im Unendlichen (vgl. Übung 8, Aufgabe 21). Der zeitartige Killing-Vektor sei mit $\xi^i = (1, 0, 0, 0)$ bezeichnet. Beobachter A emittiert Energie der Frequenz ω_R (gemessen in seinem Ruhesystem), welche vom Beobachter B als ω_∞ gemessen wird. Leiten Sie den Zusammenhang zwischen den Frequenzen ω_R und ω_∞ her. Was misst Beobachter B, wenn Beobachter A den Schwarzschild-Radius $r = 2M$ erreicht? Was bedeutet das für die Rotverschiebung?

2. Bei der Diskussion der Bewegung von Teilchen in der Schwarzschild-Metrik wurde gezeigt, daß der Drehimpuls $l := r^2 \sin^2\theta \frac{d\phi}{ds}$ eine Erhaltungsgröße ist. Leiten Sie dieses Ergebnis aus der Existenz eines Killing-Vektors $\eta^i = (0, 0, 0, 1)$ her, wobei die letzte Komponente der ϕ-Komponente entspricht.

Aufgabe 27 (7+2 Punkte): *Reissner-Nordström-Lösung*

In dieser Aufgabe soll das Gravitationsfeld außerhalb einer statischen, sphärisch symmetrischen Ladungsverteilung mit Masse M und Ladung Q berechnet werden. Machen Sie dazu für die Metrik wie in der Vorlesung den Ansatz

$$ds^2 = e^{\nu(t,r)}\, dt^2 - e^{\lambda(t,r)}\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2,$$

und bestimmen Sie, z.B. mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen ${F^{ij}}_{;j} = 4\pi j^i$, den Feldstärketensor F^{ij} (Lösung: $F^{0r} = e^{-(\lambda+\nu)/2} Q/r^2$) und aus diesem den zugehörigen Energie-Impuls-Tensor T^{ij}. Berechnen Sie nun mit den Einsteinschen Gleichungen die Metrikfunktionen ν und λ. Wählen Sie hierbei die Integrationskonstante so, daß der Newtonsche Grenzfall richtig herauskommt. *Bonus*: Berechnen Sie für diese Metrik die Gesamtenergie aus Aufgabe 20.

Aufgabe 28 (6 Punkte): *Klassische Tests / Reissner-Nordström-Lösung*
Betrachten Sie die oben hergeleitete Reissner-Nordström-Metrik $ds^2 = Fdt^2 - F^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2$ mit $F = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$ und $|Q| < M$. Bestimmen Sie die in der Vorlesung eingeführten Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ für die *isotrope Form dieser Metrik*, und untersuchen Sie, welchen Einfluß eine Ladung Q der Sonne auf die klassischen Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie im Sonnensystem hätte.