

12. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 25.01.2005

Aufgabe 32 (13 Punkte): *Gravitoelektromagnetismus*

In der Vorlesung wurde die „Maxwellsche“ Struktur der linearen Einstein-Gleichungen vorgestellt:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}_g &= -4\pi G\rho & \nabla \times \left(\frac{1}{2}\mathbf{B}_g\right) &= \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E}_g - \frac{4\pi G}{c}\mathbf{j} \\ \nabla \times \mathbf{E}_g &= -\frac{1}{c}\partial_t \left(\frac{1}{2}\mathbf{B}_g\right) & \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{B}_g\right) &= 0,\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{E}_g := -\nabla\Phi_g - \frac{1}{c}\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{A}_g)$ das gravitoelektrische und $\mathbf{B}_g := \nabla \times \mathbf{A}_g$ das gravitomagnetische Feld bezeichnen.

1. Leiten Sie diese Gleichungen aus der linearen Näherung der Einstein-Gleichungen her. Betrachten Sie als Quelle den Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit, mit Geschwindigkeiten klein im Vergleich zu c : $T^{00} = \rho$, $T^{0\alpha} = c^{-1}j^\alpha$, and $T^{\alpha\beta} = \mathcal{O}(c^{-2})$, wobei ρ die Massendichte und $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ die Massenstromdichte bezeichnen. Berücksichtigen Sie Terme bis zur Ordnung $\mathcal{O}(c^{-4})$. Führen Sie außerdem das gravitoelektrische Potential $\Phi_g := \frac{c^2}{2}\Psi_{00}$ und das gravitomagnetische Potential $(A_g)_\alpha := -c^2\Psi_{0\alpha}$ ein. Sie benötigen u.a. die Lorenz-Eichung $\frac{1}{c}\partial_t\Phi_g + \nabla \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{A}_g) = 0$ (Herleitung!). Vergleichen Sie mit der Elektrodynamik.¹

2. Betrachten Sie nun eine Massenverteilung, welche um den räumlichen Ursprung beschränkt ist. Berechnen Sie die Potentiale Φ_g und \mathbf{A}_g und erläutern Sie deren Bedeutung.

3. Leiten Sie mit obigen Definitionen die „Lorentzkraft“ auf ein Teilchen der Masse m her. Stellen Sie dazu erst die Metrik auf. Betrachten Sie dann die Lagrangefunktion eines Teilchens der Masse m , $L = -mc\frac{ds}{dt}$, in linearer Ordnung in Φ_g und \mathbf{A}_g . (Lösung: $L = -\frac{mc^2}{\gamma} - m\gamma(1 + v^2/c^2)\Psi_g + \frac{2m\gamma}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$). Berücksichtigen Sie bei der Ableitung der Kraft nur Terme bis inklusive der Ordnung $\mathcal{O}(c^{-1})$ und nehmen Sie an, daß \mathbf{A}_g zeitunabhängig ist. Führen Sie die gravitoelektromagnetischen „Ladungen“ $q_E = m$ und $q_B = 2m$ ein, und vergleichen Sie mit der Elektrodynamik.

¹Für einen aktuellen Übersichtsartikel siehe: B. Mashhoon, Gravitoelectromagnetism: A brief review. gr-qc/0311030.

Aufgabe 33 (7 Punkte): *Lineare Theorien*

Betrachten Sie zwei Koordinatensysteme (t, x, y, z) und (t', x', y', z') , welche durch Drehung um den Winkel θ um die z -Achse auseinander hervorgehen.

- (i) Eine elektromagnetische Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet, habe in den beiden Koordinatensystemen die Einheits-Polarisationsvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_{x'}$ und $\mathbf{e}_{y'}$. Finden Sie die Transformation, welche die Polarisationsvektoren im ungestrichenen System in diejenigen des gestrichenen Systems überführt.
- (ii) Seien nun analog $\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_\times, \mathbf{e}_{+'}$ und $\mathbf{e}_{\times'}$ die Polarisationsensoren für eine Gravitationswelle in der linearisierten Theorie. Finden Sie für diese die entsprechenden Transformationsformeln.
- (iii) Seien $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ die quantenmechanischen Zustände eines Neutrinos mit Spin parallel bzw. antiparallel zur x -Richtung und analog $|\uparrow'\rangle$ und $|\downarrow'\rangle$ bezüglich der x' -Richtung. Stellen Sie die Zustände im gestrichenen System als reelle Linearkombination der Zustände im ungestrichenen System dar.
- (iv) Wie lautet die Verallgemeinerung für die Basiszustände linearer Polarisation für ein Strahlungsfeld von beliebigem Spin s ?