Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke

18.01.2005

12. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I
Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 25.01.2005

Aufgabe 32 (13 Punkte): *Gravitoelektromagnetismus*

In der Vorlesung wurde die „Maxwellsche" Struktur der linearen Einstein-Gleichungen vorgestellt:

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E}_\mathrm{g} = -4\pi G\rho & \nabla \times (\frac{1}{2}\mathbf{B}_\mathrm{g}) = \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E}_\mathrm{g} - \frac{4\pi G}{c}\mathbf{j} \\ \nabla \times \mathbf{E}_\mathrm{g} = -\frac{1}{c}\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{B}_\mathrm{g}) & \nabla \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{B}_\mathrm{g}) = 0 \ , \end{array}$$

wobei $\mathbf{E}_\mathrm{g} := -\nabla\Phi_\mathrm{g} - \frac{1}{c}\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{A}_\mathrm{g})$ das gravitoelektrische und $\mathbf{B}_\mathrm{g} := \nabla \times \mathbf{A}_\mathrm{g}$ das gravitomagnetische Feld bezeichnen.

1. Leiten Sie diese Gleichungen aus der linearen Näherung der Einstein-Gleichungen her. Betrachten Sie als Quelle den Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit, mit Geschwindigkeiten klein im Vergleich zu c: $T^{00} = \rho$, $T^{0\alpha} = c^{-1}j^\alpha$, and $T^{\alpha\beta} = \mathcal{O}(c^{-2})$, wobei ρ die Massendichte und $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ die Massenstromdichte bezeichnen. Berücksichtigen Sie Terme bis zur Ordnung $\mathcal{O}(c^{-4})$. Führen Sie außerdem das gravitoelektrische Potential $\Phi_\mathrm{g} := \frac{c^2}{2}\overline{\Psi}_{00}$ und das gravitomagnetische Potential $(A_\mathrm{g})_\alpha := -c^2\overline{\Psi}_{0\alpha}$ ein. Sie benötigen u.a. die Lorenz-Eichung $\frac{1}{c}\partial_t\Phi_\mathrm{g} + \nabla \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{A}_\mathrm{g}) = 0$ (Herleitung!). Vergleichen Sie mit der Elektrodynamik.[1]

2. Betrachten Sie nun eine Massenverteilung, welche um den räumlichen Ursprung beschränkt ist. Berechnen Sie die Potentiale Φ_g und $\mathbf{A}_\mathrm{g}$ und erläutern Sie deren Bedeutung.

3. Leiten Sie mit obigen Definitionen die „Lorentzkraft" auf ein Teilchen der Masse m her. Stellen Sie dazu erst die Metrik auf. Betrachten Sie dann die Lagrangefunktion eines Teilchens der Masse m, $L = -mc\frac{ds}{dt}$, in linearer Ordnung in Φ_g und $\mathbf{A}_\mathrm{g}$. (Lösung: $L = -\frac{mc^2}{\gamma} - m\gamma(1 + v^2/c^2)\Psi_\mathrm{g} + \frac{2m\gamma}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$). Berücksichtigen Sie bei der Ableitung der Kraft nur Terme bis inklusive der Ordnung $\mathcal{O}(c^{-1})$ und nehmen Sie an, daß $\mathbf{A}_\mathrm{g}$ zeitunabhängig ist. Führen Sie die gravitoelektromagnetischen „Ladungen" $q_\mathrm{E} = m$ und $q_\mathrm{B} = 2m$ ein, und vergleichen Sie mit der Elektrodynamik.

[1] Für einen aktuellen Übersichtsartikel siehe: B. Mashhoon, Gravitoelectromagnetism: A brief review. `gr-qc/0311030`.

Aufgabe 33 (7 Punkte): *Lineare Theorien*

Betrachten Sie zwei Koordinatensysteme (t, x, y, z) und (t', x', y', z'), welche durch Drehung um den Winkel θ um die z-Achse auseinander hervorgehen.

(i) Eine elektromagnetische Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet, habe in den beiden Koordinatensystemen die Einheits-Polarisationsvektoren $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_{x'}$ und $\mathbf{e}_{y'}$. Finden Sie die Transformation, welche die Polarisationsvektoren im ungestrichenen System in diejenigen des gestrichenen Systems überführt.

(ii) Seien nun analog $\mathbf{e}_+$, $\mathbf{e}_\times$, $\mathbf{e}_{+'}$ und $\mathbf{e}_{\times'}$ die Polarisationstensoren für eine Gravitationswelle in der linearisierten Theorie. Finden Sie für diese die entsprechenden Transformationsformeln.

(iii) Seien $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ die quantenmechanischen Zustände eines Neutrinos mit Spin parallel bzw. antiparallel zur x-Richtung und analog $|\uparrow'\rangle$ und $|\downarrow'\rangle$ bezüglich der x'-Richtung. Stellen Sie die Zustände im gestrichenen System als reelle Linearkombination der Zustände im ungestrichenen System dar.

(iv) Wie lautet die Verallgemeinerung für die Basiszustände linearer Polarisation für ein Strahlungsfeld von beliebigem Spin s?