Universität zu Köln 26.10.2004
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke

2. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I

Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 03.11.2004

Aufgabe 4 (6 Punkte): *Bewegung im Gravitationsfeld*

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Gravitationsfeld ist durch

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{kl}\,\dot{x}^k\dot{x}^l = 0 \tag{1}$$

gegeben, wobei $\dot{x}^i = dx^i/ds$ und $\Gamma^i{}_{kl} = \frac{1}{2}g^{ij}(\partial_l g_{jk} + \partial_k g_{jl} - \partial_j g_{kl})$ gilt.

1. Wiederholen Sie kurz die in der Vorlesung gegebene Ableitung von (1) aus dem Variationsprinzip $\delta\int ds = 0$. Wieso kann diese Herleitung nicht für Photonen verwendet werden?

2. Leiten Sie (1) nun aus dem Variationsprinzip

$$\delta\int g_{ik}\,\dot{x}^i\dot{x}^k\,d\lambda \equiv \delta\int \mathcal{K}\,d\lambda = 0$$

ab, wobei jetzt $\dot{x}^i = dx^i/d\lambda$. Zeigen Sie, daß diese Herleitung auch für Photonen gilt, und bestimmen Sie $\mathcal{K}$ für die Lösung von (1).

Aufgabe 5 (6 Punkte): *Christoffel-Symbole*

Berechnen Sie das Transformationsverhalten der Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}(g_{ik,l} + g_{li,k} - g_{kl,i})$$

bei einer Koordinatentransformation $x^{i'}(x^a)$. Das Resultat zeigt, daß sie keinen Tensor bilden.

Aufgabe 6 (8 Punkte): *Noch etwas zum Christoffel-Symbol*

1. Die Berechnung des Christoffel-Symboles für eine komplizierte Metrik ist im Allgemeinen sehr aufwendig. Es ist daher dringend anzuraten, dass Sie Sich mit deren Berechnung mithilfe eines oder mehrerer Computeralgebra-Systeme vertraut machen.

In dieser Hinsicht mögen sich die Online-Manuale zu REDUCE, dem Reduce-Paket EXCALC für äußere Differentialformen sowie zu dem speziell für Allgemeine Relativität geschaffenen Maple-Paket GRTENSOR als hilfreich herausstellen:[1]

[1] Als weiterführende Literatur für Reduce und Maple seien noch D. Stauffer, F.W. Hehl, N. Ito, V.Winkelmann, J.G.Zabolitzky, *Computer Simulation and Computer algebra* (Springer, Heidelberg, 1993) und M. Toussaint: *Lectures on Reduce and Maple at UAM I - Mexico* (1999), http://arxiv.org/abs/cs.SC/0105033 genannt.

`http://www.uni-koeln.de/REDUCE/3.6/doc/reduce/`
`http://www.uni-koeln.de/REDUCE/3.6/doc/excalc/`
`http://grtensor.phy.queensu.ca/`

Für Nutzer von MATHEMATICA empfielt sich das Paket MATHTENSOR:

S. Christensen, *MathTensor online documentation*, `http://smc.vnet.net/MathSolutions.html`.
L. Parker and S. M. Christensen, *MathTensor* (Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1994).

Berechnen Sie die Christoffel-Symbole (sowohl erster wie auch zweiter Art) folgender Metriken:

i) Rotierendes Bezugssystem (Verallgemeinerung der Metrik aus Aufgabe 2.5):
$ds^2 = \left\{1 - (\vec{\omega} \times \vec{x})^2\right\} (dx^0)^2 - 2\,(\vec{\omega} \times \vec{x})_\alpha\, dx^0\, dx^\alpha + \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta\,,$

ii) Metrik aus Aufgabe 2.1:
$ds^2 = (1 + gx^1)^2 (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2\,,$

iii) Euklidische Metrik in Kugelkoordinaten: $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\, \sin^2\theta\, d\varphi^2\,,$

iv) Schwarzschild-Metrik: $ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - (1 - \frac{2M}{r})^{-1} dr^2 - r^2\, \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right).$

2. Betrachten Sie nun die in der Vorlesung abgeleitete Bewegungsgleichung eines freien Massenpunktes in beliebigen Koordinaten,

$$m\ddot{x}^i + m\,\Gamma^i_{kl}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^l = 0, \tag{2}$$

mit dem in Teil 1 ii) berechneten Christoffel-Symbol. Führen Sie wieder die nicht-relativistische Näherung durch.

3. In einem (flachen) $1+1$-dimensionalen Minkowskiraum sei die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes durch $m\ddot{x} - m\,g = 0$ gegeben. In Analogie zur verallgemeinerten Bewegungsgleichung (2) setzen wir nun ${\Gamma^1}_{00} = -g$ und ${\Gamma^i}_{kl} = 0$ sonst. Physikalisch ist klar, dass es ein Bezugssystem geben sollte, in dem das Christoffel-Symbol verschwindet, die Bewegungsgleichung eines freien Massenpunktes also $m\,\ddot{x} = 0$ lautet. Finden Sie ein solches Koordinatensystem, indem Sie das Christoffel-Symbol „integrieren“.