Universität zu Köln 09.11.2004
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke

4. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I
Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 16.11.2004

Aufgabe 10 (12 Punkte): *Zur kovarianten Ableitung*

1. Die allgemeine kovariante Ableitung $\widetilde{\nabla}_i$ bedarf nur eines Zusammenhangs $\widetilde{\Gamma}^i{}_{jk}$, wobei der Zusammenhang zuerst in keiner Verbindung zur Metrik steht:

$$\widetilde{\nabla}_i T^j{}_k = \partial_i T^j{}_k + \widetilde{\Gamma}^j{}_{is} T^s{}_k - \widetilde{\Gamma}^s{}_{ik} T^j{}_s \,.$$

Zeigen Sie nun, dass die zwei Bedingungen

$$Q_{ijk} := -\widetilde{\nabla}_i \, g_{jk} = 0, \qquad T^i{}_{jk} := 2\,\widetilde{\Gamma}^i{}_{[jk]} = 0$$

äquivalent dazu sind, dass der Zusammenhang $\widetilde{\Gamma}^i{}_{jk}$ das Christoffel-Symbol 2. Art $\Gamma^i{}_{jk}$ ist. Sind die Größen Q_{ijk} und $T^i{}_{jk}$, die *Nicht-Metrizität* und *Torsion* heißen, Tensoren?

Diese Zusammenhänge (im wahrsten Sinne des Wortes) sind besonders gut in Schrödingers Buch *Die Struktur der Raum-Zeit* dargestellt.

2. Sei v^i ein Vektorfeld und $\mathfrak{v}^i := \sqrt{-g}\, v^i$ die zugehörige Vektordichte. Beweisen Sie

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_i \left(\sqrt{-g}\, v^i\right) \quad \text{oder} \quad \nabla_i \, \mathfrak{v}^i = \partial_i \, \mathfrak{v}^i \,.$$

3. Der kovariante Wellenoperator für ein skalares Feld ϕ ist durch

$$\Box\phi := \nabla^i \, \nabla_i \, \phi$$

erklärt. Schreiben Sie dies mit Hilfe des letzten Aufgabenteiles in einen Ausdruck um, der nur partielle Ableitungen enthält. Berechnen Sie als Beispiel den Wellenoperator in 3-dimensionalen Kugelkoordinaten.

4. Beweisen Sie, dass in der Nähe des Ursprungs eines Riemannschen Normalkoordinatensystems ($\xi^i \ll 1$)

$$g_{ij}(0+\xi) = \eta_{ij} + \frac{1}{3}\, R_{iklj}(0)\, \xi^k \, \xi^l + \ldots$$

gilt. Geben Sie eine physikalische Deutung.

Aufgabe 11 (8 Punkte): *Algebraische Eigenschaften des Krümmungstensors*
In der ersten algebraischen Identität des Krümmungstensors

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk} \quad \text{oder} \quad R_{ij(kl)} = 0$$

kommt zum Ausdruck, dass die letzten beiden Indizes des Krümmungstensor mit einem Flächenelement (einem *Bivektor*), das immer antisymmetrisch ist, „gefüttert" werden wollen. Die Antisymmetrie in den letzten beiden Indizes ist direkt aus der Definition ersichtlich und gilt ebenso für beliebige, asymmetrische Zusammenhänge.
Die zweite algebraische Identität

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} \quad \text{oder} \quad R_{(ij)kl} = 0$$

lässt sich für den Fall eines symmetrischen Zusammenhangs (Christoffel-Symbol) recht einfach nachrechnen, gilt aber auch noch in allgemeineren Fällen wie in einem *Riemann-Cartan*-Raum[1]. Können Sie sich denken, welche anschauliche Bedeutung die 2. algebraische Identität hat?

1. Die 3. algebraische Identität ist eine Spezialität des Riemannschen Raumes. Zeigen Sie, dass für den Fall, in dem der Zusammenhang das Christoffel-Symbol ist,

$$R^i{}_{[jkl]} = 0$$

gilt.

Nur wenige Komponenten des Krümmungstensors sind unabhängig, die folgenden Aufgaben sollen der Vergrößerung der Einsicht in diese Strukturen dienen.

2. Wie viele unabhängige Komponenten hat der Krümmungstensor im Riemann-Cartan Raum, indem wir nur die 1. und 2. algebraische Identität annehmen? Wie lässt sich die Krümmung in diesem Fall als Matrix repräsentieren?

3. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz für einen beliebigen 4-stufigen Tensor:

$$\left.\begin{array}{rcl} R_{ij(kl)} &=& 0 \\ R_{(ij)kl} &=& 0 \\ R_{i[jkl]} &=& 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} R_{ij(kl)} &=& 0 \\ R_{(ij)kl} &=& 0 \\ R_{ijkl} &=& R_{klij} \\ R_{[ijkl]} &=& 0 \end{array}\right.$$

Machen Sie sich auch durch Abzählung der Bedingungsgleichungen die Konsistenz klar.[2]

---

[1] Raum, in dem neben der Krümmung auch noch die Torsion auftritt.

[2] Hinweis: Es gibt sicher viele Möglichkeiten, Obiges zu beweisen. Falls Ihnen nichts Besseres einfällt, können Sie ja die folgende Formel verwenden, die für jeden 4-stufigen Tensor gilt, der die 1. und die 2. algebraische Identität erfüllt: $T_{ijkl} - T_{klij} = \frac{3}{2}\left(T_{j[lki]} + T_{k[lji]} + T_{l[jki]} + T_{i[klj]}\right)$