Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke

23.11.2004

6. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I
Wintersemester 2004/2005

Abgabe: 30.11.2004

Aufgabe 15 (6 Punkte): *Integration*

Gegeben sei eine auf $[0, a)$ strikt positive glatte Funktion f mit $f(a) = f'(0) = 0$ und $f'(a) = -\infty$. Durch diese Funktion werde nun vermöge $z^2 = [f(r)]^2$, $r^2 = x^2 + y^2$ eine Rotationsfläche A definiert. Bestimmen Sie zunächst die durch das Linienelement $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2$ induzierte Metrik g_{ij} auf dieser Fläche. Berechnen Sie dann den zugehörigen Ricci-Skalar und zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass das Integral

$$\int_A \sqrt{g} R \, d^2x$$

nicht von der Wahl der Funktion f abhängt.

Aufgabe 16 (14 Punkte): *Killing-Vektorfelder*

a) Zeigen Sie, dass die Killing-Gleichung $\nabla_{(i}\, v_{j)} = 0$ auch $\mathcal{L}_v\, g_{ij} = 0$ geschrieben werden kann. Was bedeutet dies physikalisch?

b) Beweisen Sie die folgende Integrabilitätsbedingung für ein Killing-Vektorfeld v^i:

$$v_{m;nj} = -v_r R^r{}_{jmn} \quad .$$

c) Gegeben sei ein zeitartiges Killing-Vektorfeld ξ^i. Zeigen Sie, dass es ein Koordinatensystem gibt, in dem die Metrik zeitunabhängig ist, d. h. $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = 0$ gilt.

d) Finden Sie alle Killing-Vektorfelder ξ^i für den Minkowskiraum.

e) Sei $u^i = dx^i/ds$ der Tangentenvektor einer Geodätischen, d. h. $u^j\, \nabla_j\, u^i = 0$, und sei ξ^i ein Killing-Vektorfeld. Zeigen Sie, dass $u_i\, \xi^i$ längs der Geodätischen konstant ist. Verwenden Sie diese Erhaltungsgrößen, um die physikalische Bedeutung der Killing-Vektorfelder ξ^i aus Aufgabenteil d) zu erläutern.

f) Sei T^{ik} ein symmetrisches Tensorfeld mit verschwindender Divergenz, d. h. $\nabla_i\, T^{ik} = 0$, und ξ^i ein Killing-Vektorfeld. Berechnen Sie $\left(\xi^i\, T_i{}^k\right)_{;k}$. Das Ergebnis ist von großer Bedeutung für die Konstruktion integraler Erhaltungsgrößen.