

## 7. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I Wintersemester 2004/2005

**Abgabe:** 07.12.2004

### **Aufgabe 17** (6 Punkte): *Staub*

Leiten Sie die in der Vorlesung angegebene Kontinuitätsgleichung sowie die Euler-Gleichung für Staub in der speziellen Relativitätstheorie her. Zeigen Sie ferner, daß in einem beliebigen Bezugssystem aus der kovarianten Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors des Staubs folgt, daß sich die Staubteilchen auf Geodätischen bewegen.

### **Aufgabe 18** (14 Punkte):

Wählen Sie eine der beiden Variationsaufgaben. Die jeweils andere zählt 10 Zusatzpunkte!

#### *Maxwell-Theorie*

Betrachten Sie die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes im Vakuum:

$$\mathcal{L} := -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} F_{ij} F^{ij}, \quad F_{ij} := 2\partial_{[i} A_{j]}.$$

1. Leiten Sie die Feldgleichungen ab.
2. Berechnen Sie den Energie-Impuls-Tensor.
3. Berechnen Sie die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors  $\nabla_i T^{ij}$ .

#### *Brans-Dicke-Theorie*

In dieser Aufgabe wird eine Gravitationstheorie untersucht, die neben der Metrik noch ein zusätzliches skalares Gravitationsfeld  $\phi$  aufweist. Sie wird definiert durch die Wirkung

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} d^4x [\phi R + \phi^{-1} \omega(\phi) g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} - 2\phi \lambda(\phi)] + S_M$$

und durch zwei Funktionen  $\omega(\phi)$  und  $\lambda(\phi)$  parametrisiert. Ferner soll die Materiewirkung  $S_M$  nicht von  $\phi$  abhängen. Aus phänomenologischen Gründen kann sich  $\phi$  nur auf sehr großen räumlichen und zeitlichen Skalen merklich ändern.

1. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die Metrik. Benutzen Sie hierzu die

Palatini-Gleichung. Arbeiten Sie in einem Riemannschen Normalkoordinatensystem, und leiten Sie zunächst die Beziehung

$$g^{ab}\delta R_{ab} = v^c{}_{;c} \quad \text{mit} \quad v_c = g^{ad}\delta g_{ad;c} - g^{ad}\delta g_{ac;d}$$

her. Nutzen Sie desweiteren  $A^{ab}{}_{;b} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^{ab})_{,b} + \Gamma^a{}_{bc}A^{cb}$  (Beweis!).

2. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für  $\phi$ . Eliminieren Sie den Krümmungsskalar aus der Feldgleichung für  $\phi$ .

3. Interpretieren Sie das Feld  $\phi$  sowie die Funktion  $\lambda(\phi)$  physikalisch. Warum ist es sinnvoll zu fordern, daß  $S_M$  nicht von  $\phi$  abhängen darf?