Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Carsten Weber, Christian Heinicke

14.12.2004

# 9. Übungsblatt zur Relativitätstheorie und Kosmologie I
Wintersemester 2004/2005

**Abgabe:** 21.12.2004

## Aufgabe 22 (5 Punkte): *Schwarzschild-Geometrie*
Berechnen Sie in isotropen Schwarzschild-Koordinaten die Fläche eines äquatorialen Kreisrings, der sich vom Schwarzschild-Radius bis zu einem festen Radius $R$ erstreckt, sowie das Volumen einer Kugelschale zwischen diesen Radien, und vergleichen Sie die Resultate mit denen im Euklidischen Raum.

## Aufgabe 23 (10 Punkte): *Effektives Schwarzschild-Potential*
In dieser Aufgabe sollen Sie einige Eigenschaften der Bewegung materieller Probeteilchen in einer Schwarzschild-Raumzeit näher untersuchen. Betrachten Sie hierzu die Bewegungsgleichung auf der Ebene $\theta = \frac{\pi}{2}$ mit effektivem Potential $V_{eff}$, welche sich aus der Geodätengleichung ergibt:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r) = E, \qquad V_{eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}.$$

Hierbei sind $l$ und $E$ Konstanten der Bewegung. Drücken Sie radiale Abstände in Einheiten des Schwarzschild-Radius $r_S = 2M$ aus.

1. Welche Bedingung muß ein Teilchen, das aus dem Unendlichen kommt, erfüllen, um ins Zentrum des Potentials zu fallen? Unter welchen Umständen fällt ein Teilchen, das im Unendlichen aus der Ruhe startet, ins Zentrum? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Situation in der Newtonschen Gravitation.

2. Wann existieren gebundene Teilchenbahnen? Für welche Werte der Radialkoordinate gibt es stabile Kreisbahnen? Wann gibt es instabile Kreisbahnen und was passiert mit einem Teilchen, das aus so einer Bahn ein wenig ausgelenkt wird? Skizzieren Sie qualitativ das Potential. Zeigen Sie u.a.:

- Für $l/M < 2\sqrt{3}$ fällt jedes einfallende Teilchen auf den Ereignishorizont $r = 2M$ zu.
- Die am stärksten gebundene stabile Kreisbahn befindet sich bei $r = 6M$ mit $l/M = 2\sqrt{3}$ und besitzt eine relative Bindungsenergie von $1 - \sqrt{8/9}$.

3. Ein materielles Probeteilchen werde von der Radialkoordinate $R > r_S$ aus der Ruhe ($l = 0$) radial ins Zentrum fallengelassen. Zeigen Sie, daß die Bahn durch die Parametrisierung (einer Zykloidenbahn)

$$r = \frac{R}{2}\,(1+\cos\eta)\ , \quad \tau = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{R}{2M}}\,(\eta+\sin\eta)$$

gegeben ist, wobei $\tau$ die Eigenzeit des Teilchens bezeichne. Bei welcher Eigenzeit wird das Zentrum des Potentials erreicht? Zeigen Sie dann, daß die Zeit, die ein Beobachter im Unendlichen mißt, divergiert, wenn das Teilchen sich dem Schwarzschild-Radius nähert.

## **Aufgabe 24** (5 Punkte): *Lemaître-Koordinaten*

Zeigen Sie, daß die dynamisch aussehende Metrik

$$ds^2 = dt^2 - \frac{4}{9}\left[\frac{9M}{2(r-t)}\right]^{2/3} dr^2 - \left[\frac{9M}{2}(r-t)^2\right]^{2/3} d\Omega^2$$

gerade die statische Schwarzschild-Metrik ist.