Institut für
Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. C. Kiefer

13. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Physik I (Mechanik)
im Wintersemester 2006/07

Aufgabe 31: **Nicht-Inertialsysteme** (6 Punkte)

Betrachten Sie die Bewegungsgleichung in einem Nicht-Inertialsystem mit $\dot{\vec{\Omega}} = 0$ und $\vec{R} = 0$. Berechnen Sie die erhaltene Energie.

Aufgabe 32: **Corioliskraft** (8 Punkte)

Ein Fluß fließe bei der nördlichen Breite φ von Osten nach Westen. Sein Wasserspiegel steht senkrecht auf der Richtung der Kraft, welche aus der Addition von Gravitations – und Corioliskraft resultiert. Dadurch entsteht ein Winkel $\alpha \neq 0$ zwischen dem Wasserspiegel des Flußes und einer ruhenden Wasseroberfläche.

a) An welchem Ufer ist der Wasserspiegel höher?

b) Wie groß ist der Höhenunterschied des Wasserspiegels zwischen den beiden Ufern, wenn die Breite des Flusses D und die Flußgeschwindigkeit v_0 beträgt? Geben Sie auch die Näherungsformel für $\left(\frac{\Omega v}{g}\right)^2 \ll 1$ an.

Aufgabe 33: **Doppelpendel** (16 Punkte)

An einem schweren Pendel der Länge l und Masse M hängt ein leichtes Pendel der Länge l und der Masse m. Es gelte im Folgenden
$m/M = \mu \ll 1$. Stellen Sie für dieses System die Lagrange-Funktion für beliebig große Auslenkungen auf. Um das daraus resultierende Differentialgleichungssystem näherungsweise lösen zu können, werden im Folgenden nur kleine Auslenkungen betrachtet. Vernachlässigen Sie deshalb alle vertikalen Geschwindigkeitskomponenten, welche in die kinetischen Energien des Doppelpendels eingehen und entwickeln Sie die Potentialterme bis zur quadratischen Ordnung.
Gehen Sie wie folgt vor:

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $X(t)$ auf. Sie sollten nur von dem Massenverhältnis μ sowie $g/l = \Omega_0^2$ abhängen.

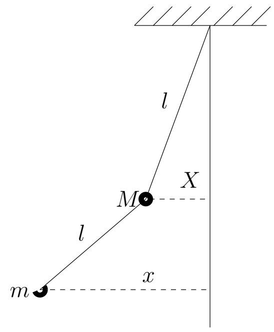
b) Lösen Sie nun mit dem Ansatz $x(t) = A\exp(i\lambda t)$ und $X(t) = B\exp(i\lambda t)$ das System der gekoppelten Differentialgleichungen.
(Wieso wird dasselbe λ für $x(t)$ und $X(t)$ verwendet?).

c) Was ergibt sich für das Verhältnis B/A? Entwickeln Sie die Eigenfrequenzen des System bis in erster Ordung in $\sqrt{\mu}$ und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen an. Überlegen Sie dabei genau, wieviele unabhängige Integrationskonstanten auftreten.
Hinweis: Das Verhältnis der Amplituden B/A ist festgelegt! Es empfiehlt sich, B/A ebenfalls bis in erster Ordung in $\sqrt{\mu}$ zu ermitteln.

d) Geben Sie die Lösung für die Anfangsbedingungen $x(0) = X(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{X}(0) = C$ an. Was ergibt sich für die Verhältnisse $x(t)/X(t)$ und $\dot{x}(t)/\dot{X}(t)$?

ZUSATZ: (10 Bonuspunkte)

Nun soll eine leicht modifizierte Version dieses Doppelpendels als Modell für eine an der Wand aufgehängte Taschenuhr mit Unruhe dienen.
Nehmen Sie dazu im Folgenden an, daß das Pendel mit der Masse m eine erzwungene Schwingung ausführt (Unruhe), so daß für dessen Auslenkung $x(t) - X(t) = A\sin(\omega t)$ gilt. Somit vereinfacht sich die Differentialgleichung, welche Sie oben für $X(t)$ aufgestellt haben. Lösen Sie diese Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen $X(0) = 0$, $\dot{X}(0) = 0$. Das entspricht dem Fall, daß sich die Uhr am Anfang in der Ruhelage befindet.
Wann kommt es zu merklichen Auslenkungen der aufgehängten Uhr?



Abgabe: Di, 30.1.2007

Klausur: Mi, 7.02.07, 14-17 Uhr im Hörsaal I